

Kernfragen zur Analysis

II.2 Reihen

1. Wann heißt eine Reihe konvergent, wann absolut konvergent?
2. Für welche komplexen q existiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$? Welchen Wert hat die Summe?
3. Warum divergiert die harmonische Reihe?
4. Wann konvergiert eine Reihe positiver Summanden?
5. Wie lauten Cauchy-, Majoranten-, Verdichtungs- und Leibniz-Kriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen?
6. Wie lauten Wurzel- und Quotientenkriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen?
7. Bei welchen der folgenden Reihen gibt das Quotientenkriterium Aufschluss über Konvergenz oder Divergenz?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}.$$

8. Wie lautet der kleine Umordnungssatz absolut konvergenter Reihen?
9. Wie lautet der große Umordnungssatz absolut konvergenter Reihen?
10. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

11. Für welche reellen/komplexen s konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ der Riemannschen ζ -Funktion?
12. Was ist eine Potenzreihe? Was ist ihr Konvergenzradius? Wie berechnet er sich?
13. Wann ist das Produkt zweier Potenzreihen wieder eine Potenzreihe? Wie lautet sie? Wie hängen die Konvergenzradien der Potenzreihen und ihres Produktes zusammen?
14. Wie lauten die Darstellungen von $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ als Potenzreihen?
15. Wie hängen e^z , $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\sinh(z)$, $\cosh(z)$ im Komplexen zusammen?