Kernfragen zur Analysis

IV. Differentiation

1. Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 differenzierbar? Wie lässt sich die Ableitung geometisch interpretieren?

2. Gib Beispiele für Funtionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die
   (a) stetig, aber in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar;
   (b) differenzierbar, aber nicht gleichmäßig stetig;
   (c) differenzierbar, aber in $x_0 = 0$ nicht stetig differenzierbar sind.

3. Was bedeuten die Landau-Symbole $o(h)$, $\mathcal{O}(h^2)$ und $o(1)$? Wie lassen sich Stetigkeit und Differenzierbarkeit mit ihrer Hilfe ausdrücken?

4. Für welche reellen α ist $|x|^\alpha$ in $x = 0$ reell differenzierbar?

5. Wie lautet die Produktregel für Ableitungen? Warum gilt sie (Beweis)?

6. Wie lauten Quotienten- und Kettenregel für Ableitungen?

7. Was sind die Ableitungen folgender Funktionen nach x?
$$\mathrm{e}^x \sin x, \qquad \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \exp(-x^2), \qquad \log \frac{1+x}{1-x}, \qquad x^x$$

8. Wann besitzt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Umkehrfunktion f^{-1} ?

9. Wie lautet der Mittelwertsatz (der Differentialrechnung)? Wie lautet der Satz von Rolle?

10. Warum gilt der Satz von Rolle (Beweisskizze)?

11. Wie lauten die Regeln von de l'Hospital?

12. Welche Werte haben die stetigen Fortsetzungen folgender Funktionen in $x = 0$?
$$\frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{\cos x - 1}{x^2}, \qquad \frac{\log(1+x)}{x}, \qquad \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

13. Berechne
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

14. Wie lauten die Ungleichungen von Young und Hölder?

15. Skizziere die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$, beschreibe ihre Nullstellen, Ableitungen, Monotonie, Konvexität und Konkavität, und erläutere unsere Definition von π.

16. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Welche (notwendige) Bedingung ist erfüllt, wenn f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum besitzt? Unter welcher (hinreichenden) Bedingung besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum?

17. Wann heißt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex? Wann heißt sie strikt konvex?

18. Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei zweimal diferenzierbar. Wie lassen sich Konvexität und strikte Konvexität durch Bedingungen an die zweite Ableitung ausdrücken?

19. Wieviele Minima bzw. Maxima kann eine strikt konvexe Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ haben? (Gib alle möglichen Zahlen an.)

20. Wo sind (reelle) Potenzreihen differenzierbar? Wie lautet die Ableitung?

21. Wie ist der Raum $\mathcal{BC}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert? Was bedeutet seine Vollständigkeit für die Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung einer Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

22. Wie lautet das n-te Taylor-Polynom? Wie kann das Restglied ausgedrückt werden?

23. Wann (und wo) wird eine reelle Funktion durch ihre Taylor-Reihe dargestellt? Gib ein Beispiel und ein Gegenbeispiel.

24. Wie lauten die Taylor-Reihen folgender Funktionen in $x_0 = 0$?

$$e^x, \quad \sin x, \quad \arctan x, \quad (1+x)^\alpha, \quad \log(1+x)$$