Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2022

Bernold Fiedler, Alejandro López Nieto

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 06.07.2022, 17:00.

Solutions in German or English, please.

Aufgabe 37: Sei (E, d) metrischer Raum. Beweise oder widerlege:

(i) $A \subset E$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Limes jeder in E konvergenten Folge von $a_n \in A$ ebenfalls in A liegt. [Frage von Kasra Sammak]

(ii) Für $x \in E$, $r > 0$ ist die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_r(x)$ abgeschlossen und der Abschluss der offenen Kugel $B_r(x)$. [Frage von Jakob Ballhausen]

Aufgabe 38: Betrachte folgende Variante des „Spiels von Banach-Mazur“, das wir noch aus der Analysis I kennen: Annaliese und Annalyx konstruieren gemeinsam eine reelle Zahl $x \in [0, 1]$. Zunächst einigen sich beide auf eine Menge $M \subseteq [0, 1]$. Dann beginnt Annaliese durch Wahl eines beliebigen Intervalls $[a_1, b_1] \subset [0, 1]$. Nun wählen Annalyx und Annaliese abwechselnd ein Intervall $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ der Länge $b_n - a_n < n^{-1}$. Diese Intervallschachtelung definiert eindeutig eine reelle Zahl

$$\{x\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Annaliese gewinnt, falls x in der zuvor festgelegten Menge liegt, $x \in M$. Ansonsten ist Annalyx der Sieger.

Besitzt Annaliese eine Gewinnstrategie, falls M von zweiter Baire-Kategorie ist, d.h. den Durchschnitt abzählbar vieler, offener, dichter Mengen enthält? Besitzt Annalyx eine? Was passiert, falls M eine magere Menge (d.h. Komplement einer Menge von zweiter Baire-Kategorie) ist?

Aufgabe 39: Eine *Cantormenge* sei definiert als eine nichtleere, vollständige, total unzusammenhängende, perfekte Menge $C \subseteq [0,1]$ bezüglich der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$. Beweise oder widerlege:

(i) Endliche Vereinigungen von Cantormengen sind wieder Cantormengen.

(ii) Abzählbare Vereinigungen von Cantormengen sind wieder Cantormengen.

(iii) Der Durchschnitt zweier Cantormengen ist entweder leer oder wieder eine Cantormenge.

(iv) Jede Cantormenge ist Lebesgue-Nullmenge.

(v) Das Komplement einer Cantormenge kann keine Lebesgue-Nullmenge sein. (Cantormengen haben niemals „volles Maß.“)

Aufgabe 40: Sei E eine Menge und d_1, d_2 zwei äquivalente Metriken auf E, d.h. die Identität $\mathrm{id} : (E, d_1) \to (E, d_2)$ ist ein Homöomorphismus.

Beweise oder widerlege: (E, d_1) ist genau dann vollständig, wenn (E, d_2) vollständig ist.