Freiwillige Ferienaufgaben zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2022

Bernold Fiedler, Alejandro López Nieto

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Diese freiwilligen Übungen zählen nicht für die aktive Teilnahme an der Lehrveranstaltung, sondern dienen zur Anregung für Selbststudium und eigene Lerngruppen.

Aufgabe 45: Sei X ein Banachraum und $f : X \to X$ eine surjektive Abbildung. Ferner existiere eine Konstante $M > 1$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| \;\geq\; M\|x - y\|.$$

Beweise, dass f genau einen Fixpunkt besitzt. Wie könnte man den Fixpunkt finden?

Aufgabe 46: In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}^N$ und für welche Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f \,:\, \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto (\|x\|_1)^\alpha \;:=\; (|x_1| + \cdots + |x_N|)^\alpha$$

stetig bzw. differenzierbar? Berechne gegebenenfalls den Gradienten ∇f.

Aufgabe 47: Die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. für alle $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ gilt

$$f(\lambda x) \;=\; \lambda^\alpha f(x).$$

Zeige dass dann für alle $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ die *Eulersche Identität* gilt:

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x).$$

Für welche α lässt sich das auf $x = 0$ ausdehnen?

Aufgabe 48: Betrachte die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} x & \text{für } y = x^2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Bestimme die Gateaux- und Fréchet-Ableitungen von f und die Punkte, an denen sie definiert sind. An welchen Stellen ist f stetig Fréchet-differenzierbar?

Aufgabe 49: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \dots, \partial_N f$ seien auf U beschränkt.

Beweise oder widerlege: Dann ist f stetig.

Aufgabe 50: Sei C^k_{per}, $k \geq 0$, der Raum der k-mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode 2π, und der Norm $\|f\|_{C^k_{\text{per}}} := \max\{\|f\|_{\text{sup}}, \dots, \|f^{(k)}\|_{\text{sup}}\}$. Betrachte die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times C^k_{\text{per}} \to C^k_{\text{per}}$, so dass

$$\Phi(s, f)(t) := f(t + s).$$

(i) Ist Φ stetig? Wo ist Φ Gateaux differenzierbar? Wo Fréchet? Berechne die Fréchet-Ableitung, wenn dies sinnvoll ist. Beginne mit dem Fall $k = 0$.

(ii) Studiere die Fragen aus (i) für die Einschränkung der Abbildung Φ auf $\mathbb{R} \times C^{k+1}_{\text{per}} \to C^k_{\text{per}}$.

Aufgabe 51: Sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definiere eine Abbildung

$$F : C^1(X, X)^3 \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(\chi, \varphi, \rho, x) \;=\; \Big\langle \chi(\varphi(x)), \chi(\rho(x)) \Big\rangle.$$

Bestimme die partiellen Ableitungen ($\partial_\chi F$, $\partial_\varphi F$, $\partial_\rho F$, $\partial_x F$).

Aufgabe 52: Bestimme gegebenenfalls die ersten Ableitungen (im Banachraum!) folgender Abbildungen

(i) $\Phi \;:\; BC^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad (g, f) \longmapsto g \circ f$

(ii) $\Psi \;:\; BC^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad f \longmapsto f \circ f$

Dabei bezeichnen BC^0 und BC^k die Banachräume der beschränkten stetigen Funktionen bzw. der beschränkten Funktionen mit k beschränkten und stetigen Ableitungen. (Vgl. Aufgabe 48.)

Freiwilliger Zusatz: Ist Ψ in (ii) aufgefasst als Abbildung $BC^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to BC^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ebenfalls differenzierbar?

Aufgabe 53: Sei X ein beliebiger Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in X$. Zeige dass $f'(x_0) = 0$ gilt, wenn f in x_0 ein lokales Minimum oder Maximum besitzt.

Aufgabe 54: Finde den minimalen Euklidischen Abstand zwischen den Kreisen $\Gamma_1 := \{(\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$ und $\Gamma_2 := \{(r\cos t + 1, r\sin t + 1) : t \in \mathbb{R}\}$, für beliebigen festen Radius $r \geq 0$. Skizziere die Resultate geometrisch. (Vgl. Aufgabe 53.)

Aufgabe 55: Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \longmapsto x^3 - 3xy^2.$$

Zeige dass f auf keiner Geraden durch $(0, 0)$ ein striktes Minimum oder Maximum besitzt. Plotte f. Warum nennt man f auch den „Affen-Sattel“?

Aufgabe 56: Gegeben seien k Punkte $p^{(1)}, \ldots, p^{(k)} \in \mathbb{R}^N$. Bestimme den Punkt $x \in \mathbb{R}^N$, der die Summe der Quadrate der euklidischen Abstände

$$\sum_{i=1}^{k} \|x - p^{(i)}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N} \left(x_j - p_j^{(i)}\right)^2$$

minimiert. (Vgl. Aufgabe 53.) Hat x einen Namen?

Aufgabe 57: Betrachte die Abbildung

$$J : C_0^2 \to \mathbb{R}, \quad J[u] := \int_0^\pi (u'(t)^2 - u(t)^2)\,\mathrm{d}t,$$

wobei C_0^2 der Banachraum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ ist, für die $u(0) = u(\pi) = 0$ gilt.

Zeige dass die Fréchet–Ableitung von J bei $u(t) = \sin(t)$ verschwindet. Ist $\sin(t)$ ein lokales Minimum von J? Ist $\sin(t)$ ein globales Minimum von J? (Vgl. „Poincaré-Ungleichung“.)

Aufgabe 58: Die Höchstmaße für sperrige Pakete (quaderförmige Sendungen) sind laut den Service-Informationen der Post: „Länge höchstens 200 Zentimeter, Gurtmaß (Länge plus größter nicht in Längsrichtung gemessener Umfang zusammen) maximal 360 Zentimeter."

Bestimme das Paket mit dem größten Volumen, das die Höchstmaße der Post nicht überschreitet. (Vgl. Aufgabe 53.)

Freiwilliger Zusatz: Ende des letzten Jahrtausends hieß die Schranke noch „Länge höchstens 200 Zentimeter, Länge plus größter nicht in Längsrichtung gemessener Umfang zusammen maximal 450 Zentimeter". Wie schlimm hat uns der „Niedergang der Zeit" erwischt?

Aufgabe 59: Die Mercator-Projektion $P : S^2 \setminus \{N, S\} \to Z$ nach G. Mercator (1512-1594) bildet die Einheits-Erde S^2 (bis auf den Nordpol N und den Südpol S) auf den Zylinder $Z = S^1 \times \mathbb{R}$ ab, der die Erde am Äquator berührt. Koordinaten auf S^2 sind hier die geographische Länge $\phi \in [0, 2\pi)$ und die geographische Breite $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Die Projektion hat die Form $P(\phi, \theta) = (\phi, p(\theta))$ mit $p(0) = 0$. Bestimme $p : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, so dass P *winkeltreu* ist. „Winkeltreu" heißt: für zwei beliebige differenzierbare Kurven

$$(\cos(\phi_i(t)) \cos(\theta_i(t)), \sin(\phi_i(t)) \cos(\theta_i(t)), \sin(\theta_i(t))), \quad i = 1, 2,$$

auf der Einheits-Erde, stimmt der Winkel in einem beliebigen Schnittpunkt mit dem Winkel im entsprechenden Schnittpunkt der Mercator-Projektionen $(\phi_i(t), p(\theta_i(t)))$ überein.

(i) Bestimme konkret die Abstände l zwischen Breitenkreis x Grad nördlicher Breite und dem Äquator für

$$x \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$$

Vergleiche die Ergebnisse mit folgenden Werten, die von einer Orginalkarte Mercators stammen (1567, ca. 100 Jahre vor Newton!):

x	10	20	30	40	50	60	70	80
l/mm	55	112	172	238	314	407	534	749

(Niemand scheint zu wissen, wie Mercator das eigentlich gemacht hat.)

(ii) Folgere, dass Bilder von sogenannten Loxodromen, d.h. Kurven auf der Sphäre, die alle Längenkreise unter dem gleichen Winkel schneiden, Geraden auf Z sind. Deshalb sind die Mercator-Karten für die Seefahrt von großer Bedeutung. Sie ermöglichen die Navigation per Lineal (z.B. in Piratenfilmen).

Aufgabe 60: Die echte Zylinderprojektion der Einheitssphäre ist eine Zentralprojektion der Sphäre aus ihrem Mittelpunkt auf einen Zylinder, dessen Symmetrieachse durch Nordpol und Südpol verläuft. (Der Radius des Zylinders kann sich vom Radius der Sphäre unterscheiden.)
Zeige dass die echte Zylinderprojektion nicht winkeltreu im Sinne der Aufgabe 59 ist.

Vergleiche mit der Mercator-Karte aus Aufgabe 59: wie groß ist die Abweichung der Zylinderprojektion (mit optimal gewähltem Radius) von einer Mercator-Karte der Karibik, also für geographische Breiten von ca. 10 bis 30 Grad.

Aufgabe 61: Betrachte einen durch die Kurve $y = x^2$ gegebenen Parabolspiegel in der Ebene. Einfallende Lichtstrahlen parallel zur y-Achse werden am Spiegel reflektiert, d.h. der Einfallswinkel (Winkel zwischen einfallendem Lichtstrahl und Normalenvektor an die Parabel) ist gleich dem Ausfallswinkel.

Zeige dass sich alle reflektierten Strahlen in einem Punkt schneiden und bestimme diesen Brennpunkt.

Freiwilliger Zusatz: Was ist der geometrische Ort der Punkte der Ebene, die von einem gegebenen Punkt denselben Abstand wie zu einer gegebenen Geraden haben?

Aufgabe 62: Dir obliegt die Versorgung der Gäste der Semesterabschluss-Party mit Getränken. Dazu transportierst Du ein Fass Bier auf einer Schubkarre durch die Stadt. Das Fass stehe dabei möglichst vertikal. Aufgrund diverser Schlaglöcher beginnt das Fass jedoch bedrohlich zu kippeln. Um es zu stabilisieren, schenkst Du Bier an umstehende Schaulustige aus. (Selbst trinkst Du natürlich nichts: Schubkarren-Fahrverbot ab 3 Promille!)

Wie weit muss das Fass ausgetrunken werden, damit es möglichst stabil steht?

Hinweis: Die Höhe des Schwerpunktes

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}} t\,\rho(t)\,\mathrm{d}t$$

soll also minimiert werden! Hierbei ist ρ die durchschnittliche Querschnittsdichte, die für übliche Flüssigkeiten in Fässern einen beschränkten Träger hat. Wir nehmen daher an, dass das Fass durch ein endliches Intervall dargestellt wird. Das leere Fass soll dabei eine Masse m und eine Schwerpunktshöhe h haben (die man normieren kann).

Aufgabe 63: Nachdem der Bier-Transport dank der selbstlosen Hilfe vieler Passanten gut geklappt hat, wendet sich eine Transportfirma an Dich.

Die Firma plant, Bier in Fässern zu transportieren, die entsprechend der vorigen Aufgabe zwecks maximaler Stabilität befüllt werden. Alle Fässer haben die gleiche Größe und Form. Allerdings stehen unterschiedliche Materialien für die Fässer zur Verfügung.

Bestimme die Masse des Fasses mit bestmöglicher Nutzlast, d.h. maximalem Verhältnis der Masse des eingefüllten Biers zur Gesamtmasse von Bier und Fass.

Bestimme eine allgemeine Lösung und/oder wähle plausible Werte der Parameter.

Aufgabe 64: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass für jedes $t > 0$ die Folge $f(t), f(2t), f(3t), \ldots$ eine Nullfolge ist. Zeige dass dann gilt:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \;=\; 0.$$

Aufgabe 65: [π ist irrational] Folgender elementarer Beweis wird Mary Cartwright zugeschrieben. (Vgl. auch Wikipedia.) Betrachte für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Folge von Integralen

$$A_n \;=\; \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

(i) Zeige dass die A_n für $n \geq 2$ der Rekursion

$$A_n \;=\; \frac{1}{\alpha^2}\left(2n(2n-1)A_{n-1} - 4n(n-1)A_{n-2}\right)$$

genügen, und berechne A_0 sowie A_1.

(ii) Zeige dass A_n die Form

$$A_n \;=\; \frac{n!}{\alpha^{2n+1}}\left(P_n(\alpha)\sin\alpha - Q_n(\alpha)\cos\alpha\right)$$

besitzt, wobei $P_n(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$ Polynome vom Grad $\leq 2n$ in α mit ganzzahligen Koeffizienten sind.

(iii) Nimm nun an, dass $\pi = p/q$ rational sei, $p, q \in \mathbb{N}$. Setze $\alpha := \pi/2 = p/(2q)$. Zeige dass dann

$$\frac{p^{2n+1}A_n}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl ist.

(iv) Sei weiterhin $\alpha = \pi/2$. Zeige die (grobe) Abschätzung

$$0 \;<\; A_n \;<\; 2$$

und zeige dass dies im Widerspruch zu (iii) steht.