Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2022

Bernold Fiedler, Alejandro López Nieto

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Due date: Wednesday, 04.05.2022, 17:00.

Solutions in German or English, please.

Problem 1: Betrachte den Banachraum $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, wobei sich $\|\cdot\|$ auf eine beliebige Norm in $\mathbb{R}$ bezieht. Wo ist *die Norm Abbildung* $\|\cdot\| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig? Wir nennen $\|\cdot\|$ differenzierbar in $x \in \mathbb{R}$ wenn $A \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|x + h\| - \|x\| - Ah}{\|h\|} = 0.$$

Ist $\|\cdot\|$ differenzierbar in 0?

Problem 2: Sei X und Z Banachräume und betrache nun den Raum $BL(X, Z)$ der linearen Abbildungen $L : X \to Z$ mit der endlichen Operatornorm:

$$\|L\| := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Lx\|_Z.$$

Zeige:

(i) Diese Norm erfüllt:

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|_Z}{\|x\|_X}.$$

(ii) $BL(X, Z)$ mit der Operatornorm ist ein Banachraum.

Problem 3: Sei P_N ein $\mathbb{R}$-Vektorraum reeler Polynomen von Grad $\leq N$ im Interval $[0, 1]$, mit sup-norm $\|p\|_{C^0} := \sup_{x \in [0,1]} |p(x)|$. Zeige oder widerlege:

(i) P_N ist ein Banachraum.

(ii) Die Ableitung $p \mapsto p'$ ist eine surjektive lineare Abbildung, die P_N auf sich selbst abbildet.

(iii) Die Ableitung $p \mapsto p'$ ist eine beschränkte lineare Abbildung in P_N.

Zusatzaufgabe: Betrachte stattdessen die Vereinigung P von allen P_N, $N \in \mathbb{N}$.

Problem 4: Betrachte $C^0([0,1],\mathbb{R})$ und $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Sei die sup-norm $\|f\|_{C^0} := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ und die C^1-norm $\|f\|_{C^1} := \|f(x)\|_{C^0} + \|f'(x)\|_{C^0}$ definiert. In Bezug auf *der Ableitungsabbildung* $' : f \mapsto f'$, Beweise oder widerlege:

(i) $' : (C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1}) \to (C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0})$ ist eine beschränkte lineare Abbildung.

(ii) $' : (C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0}) \to (C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0})$ ist eine beschränkte lineare Abbildung.

Falls die Ableitungsabbildung beschränkt ist, bestimmen die Operatornorm $\| \cdot' \|$.