Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2022

Bernold Fiedler, Alejandro López Nieto

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabetermin: Mittwoch, 18.05.2022, 17:00.

Lösungen auf Deutsch oder Englisch

Problem 9: Zeige, dass die Formel für die Fläche eines Rechtecks $A(a, b) = ab$, wobei a und b die Länge der Seiten bezeichnet, die einzige stetige Funktion $A : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ ist, sodass für alle $a, a_1, a_2, b > 0$

(i) $A(a, b) = A(b, a)$.

(ii) $A(a_1 + a_2, b) = A(a_1, b) + A(a_2, b)$.

(iii) $A(1, 1) = 1$.

Interpretiere die Annahmen (i)–(iii)

Problem 10: Zeige:

(i) Gegeben eine *ungerade* Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, z.B., sodass $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$. Zeige

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

(ii) Gegeben eine *periodische* Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einer Periode $p > 0$, z.B., sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ es gibt $g(x + p) = g(x)$. Dann für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{a}^{a+p} g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{0}^{p} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problem 11: Für alle ganze Zahlen k, l, bestimme die sogenannte *Orthogonalitätsbeziehungen*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x.$$

Problem 12: Bestimme vier der folgenden Integrale

(i) $\displaystyle\int \sqrt{t}\,\ln t\,\mathrm{d}t;$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t + \sin t};$

(iii) $\displaystyle\int \sqrt{\tan\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t;$

(iv) $\displaystyle\int t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t;$

(v) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t;$

(vi) $\displaystyle\int \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t;$

(vii) $\displaystyle\int t^2(\ln t)^2\,\mathrm{d}t;$

(viii) $\displaystyle\int t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$