

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2022

Bernold Fiedler, Alejandro López Nieto

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabetermin: Mittwoch, 25.05.2022, 17:00.

Bitte Lösungen auf Deutsch oder Englisch

Aufgabe 13: Bestimme die Partialbruchzerlegungen von zwei der folgenden Funktionen $f : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$, und bestimme ihre Stammfunktionen $F(x) := \int_1^x f(t) dt$:

$$(i) \quad f(t) = \frac{1}{(t+1)(t^2-2t+5)}; \quad (iii) \quad f(t) = \frac{1}{t(t+2)^3}.$$

$$(ii) \quad f(t) = \frac{1}{t^3+8};$$

Aufgabe 14: Man finde eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion f konvergieren, sodass

(i) f nicht integrierbar ist

(ii) f integrierbar ist und

$$\int_0^1 f(t) dt \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt.$$

Betrachte entweder das Regel- oder Riemann Integral
(Zusatzaufgabe: Betrachte beides!)

Aufgabe 15: Man zeige, dass die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & t = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \gcd(p, q) = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

Riemann integrierbar wenn $t \in [0, 1]$ ist und bestimme den Wert des Integrals.

* gcd heißt größter gemeinsamer Teiler (greatest common divisor).

Aufgabe 16: Betrachte das Einheitsintervall $C_0 := [0, 1]$ und definiere C_n als C_{n-1} nachdem man das offene mittlere Drittel von jeder verbundenen Teil herausnimmt, z.B., $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, usw.

Die *Cantor-Menge* C ist als der abzählbare Schnitt definiert

$$C := \bigcap_{n \geq 0} C_n.$$

Zeige, dass C eine überabzählbare Lebesgue Nullmenge ist.

Aufgabe E1(Zusatzaufgabe): Ein Student definiert eine Menge $A \subset [0, 1]$ als *S-null*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Überdeckung $A \subset \bigcup_k I_k$ offener und **disjunkter** Intervalle I_k sodass

$$\sum_k |I_k| < \varepsilon.$$

Beweise oder widerlege bezüglich A :

- (i) S-null impliziert dicht;
- (ii) S-null impliziert undicht;
- (iii) S-null impliziert Lebesgue null.
- (iv) Lebesgue null impliziert S-null.