Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2022

Bernold Fiedler, Alejandro López Nieto

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 09.06.2022, 17:00.

Aufgabe 21: Zeige für $f \in C^4$, dass es $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ mit

(i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(1/2) + \frac{f''(\xi_1)}{24};$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0) + 4f(1/2) + f(1)}{6} - \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{2880};$

existieren.

Aufgabe 22: Gegeben seien drei reelle Zahlen $1 < p, q, r < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Zeige, dass für beliebige Funktionen $f \in L^p([0,1],\mathbb{R})$, $g \in L^q([0,1],\mathbb{R})$ und $h \in L^r([0,1],\mathbb{R})$ ihr Produkt fgh in $L^1([0,1],\mathbb{R})$ liegt und folgende Ungleichung gilt:

$$\int_0^1 |f(x)g(x)h(x)|\,\mathrm{d}x \;\le\; \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}\,\|h\|_{L^r}.$$

Freiwilliger Zusatz: Beweise die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung: Für reelle Zahlen $1 < p, q, r < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ und Funktionen $f \in L^p([0,1],\mathbb{R})$, $g \in L^q([0,1],\mathbb{R})$ liegt fg in $L^r([0,1],\mathbb{R})$ mit $\|fg\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}$.

Aufgabe 23: [„Der Blitz schlägt nie zweimal am selben Ort ein!“ oder „Unverhofft kommt oft!“] Das paradiesische Dorf Annaliesingen mit 1000 Häusern wird leider regelmäßig von Gewittern heimgesucht. Im Durchschnitt schlägt jede Woche in eines der Häuser ein Blitz ein (wobei die Wahrscheinlichkeit eines Einschlags für jedes Haus gleich ist).

Schätze die Wahrscheinlichkeit ab, dass es ein Haus gibt, das

(i) innerhalb eines Jahres (52 Wochen)

(ii) innerhalb von 2 Jahren

zweimal vom Blitz getroffen wird.

Aufgabe 24: Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;

(ii) $\displaystyle\int_0^1 t^2 (\log t)^4\,\mathrm{d}t$;

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty t^3 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty t^2 \mathrm{e}^{-|t-1|}\,\mathrm{d}t$.

Hinweis: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.