Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2022

Bernold Fiedler, Alejandro López Nieto

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 15.06.2022, 17:00.

Solutions in German or English, please.

Aufgabe 25: In Analysis I haben wir die Wahrscheinlichkeit p_n berechnet, dass von n Personen alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben (ohne Zwillinge und Schaltjahre):

$$p_n := \frac{\binom{N}{n} n!}{N^n}, \quad \text{mit } N = 365.$$

Bestimme $\lim p_n^{1/N}$, für $N \to \infty$ und gegebene "Belegung" $\alpha := \lim n/N$. Für welches α erwarten wir $p_n = 1/\mathrm{e}$ bei $N = 365$?

Aufgabe 26: Berechne die ersten vier Polynome der Weierstraß-Approximation

$$\varphi_n * f, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

für $f(t) = 1|_{[0,1]}$. Hier bezeichnen φ_n die Landau-Kerne

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} c_n(1 - t^2)^n, & \text{für } |t| < 1, \\ 0, & \text{für } |t| \geq 1, \end{cases}$$

wobei $c_n > 0$ so gewählt sind, dass $\varphi_n * 1 = 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 27: Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, und es gelte für alle Polynome $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$\int_0^1 f(t)p(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Zeige, dass dann $f(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$ ist.

Aufgabe 28: Sei $1 \leq p < \infty$. Finde eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Regelfunktionen, die in $L^p([0, 1], \mathbb{R})$ gegen 0 konvergiert, so dass $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für *kein* $x \in [0, 1]$ gegen 0 konvergiert.