Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2022

Bernold Fiedler, Alejandro López Nieto

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 22.06.2022, 17:00.

Solutions in German or English, please.

Aufgabe 29: Berechne die Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion, für die

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{für } t \in [0, \pi), \\ 2\pi - t, & \text{für } t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Aufgabe 30: Seien $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ periodische Funktionen mit Periode 2π, und bezeichne

$$c_k(f) \;:=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, \mathrm{d}t$$

den k-ten Fourier-Koeffizienten von f.

(i) Zeige, dass für die Fourier-Koeffizienten der Ableitung $f^{(m)}$ gilt:

$$c_k(f^{(m)}) \;=\; (\mathrm{i}k)^m c_k(f).$$

(ii) Definiere die Faltung periodischer Funktionen durch

$$(f * g)(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Zeige, dass für die Fourier-Koeffizienten der Faltung $f * g$ gilt:

$$c_k(f * g) \;=\; c_k(f) c_k(g).$$

Hinweis: benutze z.B., dass beide Seiten der Behauptung linear in f sind.

Aufgabe 31: Benutze das Resultat von Aufgabe 30 (i), um alle Federkonstanten $D \in \mathbb{R}$ zu finden, für die das Hookesche Gesetz

$$x''(t) = -Dx(t)$$

2π-periodische reelle Lösungen $x(t)$ in C^∞ besitzt, die nicht konstant sind.

Aufgabe 32: Berechne

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$; (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$; (iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.