Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2022

Bernold Fiedler, Alejandro López Nieto

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 29.06.2022, 17:00.

Solutions in German or English, please.

Aufgabe 33: Die C-Dur-Tonleiter besteht aus acht Tönen $c'', d'', e'', f'', g'', a'', h'', c'''$ im Abstand:

Ganzton – Ganzton – Halbton – Ganzton – Ganzton – Ganzton – Halbton.

Die übliche Konzertpraxis normiert dabei die Frequenz von a'' auf 880 Hz, d.h. die Periode dieser Schwingung beträgt 1/880 Sekunden. Erläuterungen →Wikipedia.

Bestimme numerisch für diese Tonleiter

a) die Frequenzen $\gamma_1, \ldots, \gamma_8$ einer gleichschwebend temperierten Stimmung, bei der jedem Halbtonschritt das gleiche Frequenzverhältniss zukommt, so dass $c'''/c'' = 2 = 1200$ Cent;

b) die „falschen" Frequenzen $\varphi_1 := \gamma_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_8$, die zu den Obertönen 8Φ bis 16Φ eines Grundtons $\Phi := \varphi_1/8$ gehören;

c) die relativen Fehler $(\varphi_k - \gamma_k)/\gamma_k$ in Cent.

Hinweis [BF]: unser Ohr kann zB bei Quinten (Violin-Stimmung) relative Fehler bis ca 0.5 Cent erkennen.

Aufgabe 34: Die Shepard-Skala oder Shepard-Tonleiter (→Wikipedia) enthält nichttriviale Töne $f(t)$, deren Tonhöhe beliebig anzuwachsen scheint. Konstruiere einen reinen Shepard Ton der Form

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \sin\left(2^{a_k(t)} t\right)$$

$a_k(0) = k,\ a_k(t+T) = a_{k+1}(t)$ mit $0 \leq t \leq T$, und geeigneten c_k, so dass f stetig ist mit Periode T.

Freiwilliger Zusatz: Realisiere $f(t)$ als audio output und reiche das Resultat als mp3 ein. Unser Ohr schneidet, je nach Alter, Frequenzen oberhalb $10-20$ kHz ohnehin ab. Wähle eine Zeitskala, so dass die Periode 2π von $\sin t$ unterhalb der unteren Hörschwelle von ca 20 Hz liegt.

Aufgabe 35: Bestimme für folgende Mengen A jeweils Inneres, Abschluss und Rand im Raum E mit Metrik d.

(i) $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}, \quad E = \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x-y|;$

(ii) $A = \bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), \quad E = \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x-y|;$

(iii) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \quad E = \mathbb{R}^2, \quad d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2};$

(iv) $A = \left\{ x \in E : d(x, \binom{0}{0}) = d(x, \binom{2}{2}) \right\}, \quad E = \mathbb{R}^2, \quad d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2};$

(v) $A = \left\{ x \in E : d(x, \binom{0}{0}) = d(x, \binom{2}{2}) \right\}, \quad E = \mathbb{R}^2, \quad d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$

Aufgabe 36: Sei (E, d) ein metrischer Raum und $E' \subset E$ mit derselben Metrik d. Beweise:

(i) $A' \subset E'$ ist offen in E' genau dann, wenn $A \subset E$ existiert, so dass A offen in E ist und $A' = A \cap E'$.

(ii) $A' \subset E'$ ist abgeschlossen in E' genau dann, wenn $A \subset E$ existiert, so dass A abgeschlossen in E ist und $A' = A \cap E'$.