

Kernfragen zur Analysis

IV. Integration

1. Was ist ein normierter Raum? Wann nennt man einen normierten Raum einen Banachraum?
2. Wann heißt eine Funktion zwischen zwei normierten Räumen stetig?
3. Seien X und Z normierte Räume. Was ist die Operatornorm $\|L\|$ einer linearen Abbildung $L : X \rightarrow Z$? Was kann man über $\|L\|$ sagen, wenn L stetig ist?
4. Was ist eine Regelfunktion? Welche äquivalenten Charakterisierungen gibt es (wenigstens 2)?
5. Gib je zwei Beispiele an für
 - (a) Regelfunktionen und
 - (b) Funktionen, die keine Regelfunktionen sind.

6. Wie ist das Integral einer Regelfunktion definiert?
7. Wie hängen Integration und Differentiation zusammen?
8. Welchen elementaren Funktionen entsprechen folgende unbestimmte Integrale?

$$\int \sin t \, dt; \quad \int \frac{dt}{t}; \quad \int \sqrt[n]{t+1} \, dt; \quad \int \frac{dt}{1+t^2}; \quad \int t^\alpha \, dt, \quad \text{für } \alpha \neq -1.$$

9. Wie lauten die Regeln für partielle Integration und Substitution? Gib außerdem jeweils ein nichttriviales Beispiel an.
10. Wie integriert man rationale Funktionen? Welche elementaren Integrale muss man dazu kennen?
11. Was sagt das Riemann-Lebesgue Lemma? Skizziere einen Beweis für das Lemma.
12. Wann dürfen Regelintegral und Grenzwert einer Funktionenfolge vertauscht werden?
13. Wie ist das Riemann-Integral definiert?
14. Was ist eine Lebesgue-Nullmenge?
15. Wie ist das Lebesgue-Integral definiert?
16. Gib je ein Beispiel für eine Funktion an, die
 - (a) Riemann-integrierbar, aber keine Regelfunktion ist.
 - (b) Lebesgue-integrierbar, aber nicht Riemann-integrierbar ist.
17. Was sagt der Satz von Beppo Levi über monotone Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen?

18. Was sagt der Satz zur majorisierten Konvergenz über die Vertauschbarkeit von Lebesgue-Integral und Grenzwert einer Funktionenfolge?
19. Wie lautet die Hölder-Ungleichung für integrierbare Funktionen?
20. Wie lautet der Schrankensatz? Warum gilt der Mittelwertsatz (der Differentialrechnung) nicht in höheren Dimensionen?
21. Wie lautet die Integraldarstellung von Lagrange für das Restglied der Taylorentwicklung?
22. Wie lautet die Trapezregel?
23. Wie lassen sich Integrale dank der Trapezregel approximieren?
24. Was sind uneigentliche Integrale?
25. Für welche reellen Exponenten α konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 t^\alpha dt$, für welche das uneigentliche Integral $\int_1^\infty t^\alpha dt$?
26. Was bedeutet absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale? Gib Beispiele
 - (a) absolut konvergenter;
 - (b) konvergenter, aber nicht absolut konvergenter;
 - (c) nicht konvergenter
 uneigentlicher Integrale.
27. Sei $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ monoton fallend. Wie hängen $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ und $\int_1^\infty f(t) dt$ zusammen?
28. Welche der folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale existieren? Welche konvergieren absolut?

(a) $\int_1^\infty \cos t dt$;	(c) $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt$;	(e) $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt$;
(b) $\int_1^\infty \cos(t^2) dt$;	(d) $\int_1^\infty \frac{\cos(t^2)}{t} dt$;	(f) $\int_1^\infty \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt$
29. Warum konvergiert die Reihe der Riemannsche ζ -Funktion $\zeta(s) := \sum_{k=1}^\infty k^{-s}$ für $\operatorname{Re} s > 1$?
30. Wie ist die Gamma-Funktion definiert, und welche Funktionalgleichung erfüllt sie?
31. Wie lautet die Stirling-Formel zur Approximation von $n!$?
32. Wie ist die Faltung $\varphi * f$ von zwei Funktionen $\varphi, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert?
33. Was ist eine Dirac-Folge? Gib eine Definition und wenigstens ein Beispiel an.

34. Sei $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Dirac-Folge und sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) = 0$ für $|x| \geq 1$. Bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n * f)(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
35. Wie lautet den Approximationssatz von Weierstrass?
36. Welche Funktionen können durch Polynome gleichmäßig approximiert werden? Mit welcher Grundidee lassen sich approximierende Polynome zu einer gegebenen Funktion f konstruieren?
37. Was ist ein Hilbertraum? Gib zwei unendlich-dimensionale Beispiele.
38. Was sind die Fourierkoeffizienten einer 2π -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$? Wie lautet die Fourier-Reihe zu f ?
39. Beschreibe wie 2π -periodische $f \in L^2$, die Fourier-Reihe $\hat{f}(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$, und Fourier-Koeffizienten $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$ miteinander zusammenhängen.
40. Wie hängen Fourier-Reihen mit Obertönen in der Musik zusammen?