

Kernfragen zur Analysis

VI. Differentiation im Banachraum

1. Wann heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X und Y Fréchet-differenzierbar? Was ist die Fréchet-Ableitung von f ?
2. Wann heißt eine Fréchet-differenzierbare Abbildung stetig differenzierbar?
3. Ist eine Fréchet-differenzierbare Abbildung f zwischen Banachräumen immer stetig?
4. Was sind die Gateaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X und Y ?
5. Was sind die partiellen Ableitungen einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?
6. Wie lautet die Jacobi-Matrix für eine Fréchet-differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$? Wie hängen Fréchet-Ableitung und Jacobi-Matrix zusammen?
7. Wie hängen die (reelle) Jacobi-Matrix mit der komplexen Ableitung einer komplexen Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zusammen?
8. Wie lautet die Kettenregel für die Ableitung von $g \circ f$?
9. Wie lässt sich die Linearisierung einer Abbildung $g \circ f$ durch die partiellen Ableitungen der Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ausdrücken?
10. Was ist die Ableitung des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ im Hilbertraum H ?
11. Warum sind stetig differenzierbare Funktionen mit (global) beschränkter Ableitung Lipschitz-stetig? (Beweis!)
12. Verwende die Kettenregel, um eine Formel für die Ableitung der (als existent angenommene) Inversen einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zu zeigen.
13. Welche der folgenden Aussagen sind für Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ richtig, welche falsch?
 - (a) Gateaux-differenzierbare Abbildungen sind stetig.
 - (b) Fréchet-Differenzierbare Abbildungen sind stetig.
 - (c) Gateaux-differenzierbare, stetige Abbildungen sind Fréchet-differenzierbar.
 - (d) Stetig Gateaux-differenzierbare Abbildungen sind Fréchet-differenzierbar.
 - (e) Stetig Gateaux-differenzierbare Abbildungen sind stetig Fréchet-differenzierbar.
14. Wie hängen Fréchet-Ableitung und Gateaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X und Y zusammen?