Übungsaufgaben zu Dynamische System 1

Jörg Schmeling (Jens Rademacher)

Abgabe am 14.12.1999 - jede Aufgabe 4 Punkte

Phasenportrait heißt mindestens Gleichgewichte, Nullkline, Flußrichtung auf Nullklinen, nahe der Gleichgewichte und repräsentativ in den übrigen Regionen eintragen. Ein Computerausdruck reicht nicht, kann aber gerne beigefügt werden und es wird empfohlen Computerexperimente zu machen.

Aufgabe 1:(kanonische Transformationen)
Sei $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ Hamiltonfunktion und $\dot{x} = J[DH(x)]^t$ das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld mit 'symplektischer' Matrix

$$J : \mathbb{R}^{2n} \hat{=} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x = (u, v) \mapsto (-v, u).$$

Ein Diffeomorphismus $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$ heißt symplektisch, wenn $J = D\Psi(x) J D\Psi(x)^t$ für alle x. Zeige, daß die Hamiltonstruktur unter symplektischen Koordinatentransformationen erhalten bleibt, d.h. $y = \Psi(x)$ erfüllt eine Differentialgleichung $\dot{y} = J[D\tilde{H}(y)]^t$ für eine geeignete transformierte Hamiltonfunktion $\tilde{H}$.

Aufgabe 2:
i) Zeichne das Phasenportrait von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x-y)(x+y) \\ \dot{y} &= y(1-y-x) \end{aligned}$$

Es gibt Leute, die dies als Modell für Jäger-Beute Populationen ansehen, d.h. $x(t)$ ist die 'Anzahl' von Population x. Wer jagt hier wen und warum? Interpretiere das Phasenportrait und dessen Elemente unter dieser Sichtweise mit Begründungen.
ii) Gib ein explizites Beispiel für ein Vektorfeld mit Parameter $a \in \mathbb{R}$, so daß stets ein lokaler Fluß existiert und für $a = 0$ ein reguläres erstes Integral existiert, für eine offene Umgebung $a \neq 0$ von Null jedoch nicht. Zeichne Phasenportaits für $a = 0$ und für ein $a \neq 0$.

Aufgabe 3: Angenommen $f \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ erfüllt $f_\mu(x) = -f_\mu(-x)$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$. Zeige, daß gilt $f_\mu(0) = 0$ und $f''_\mu(0) = 0$.
Angenommen außerdem gilt $f'_{\mu_0}(0) = 0, f'''_{\mu_0} \neq 0$ und $\partial_\mu f'_\mu(0)|_{\mu=\mu_0} \neq 0$. Zeige, daß f_μ eine 'pitchfork' Verzweigung durchläuft. Zeichne dazu auch das Verzweigungsdiagramm.

Aufgabe 4: Betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 4x + 3 + \lambda y \\ \dot{y} &= y^2 - 4y + 3 + \lambda x \end{aligned}$$

Was bedeutet der Parameter λ ? Zeichne das Phasenportrait für $\lambda = 0$. Untersuche die Abhängigkeit des Phasenportraits, d.h. Anzahl und Stabilität der Nullstellen sowie Form der Nullklinen für $1/2 < \lambda < 1$. Welchem Verzweigungstyp entpricht die hier auftretende Verzweigung?
Zeichne in mehreren Skizzen für verschiedene $\lambda \in \mathbb{R}$ die Nullklinen und verfolge die Anzahl der Fixpunkte des Vektorfelds.