Übungen vom 29.11.99

1. Löse die folgende Gleichung (a) oder b)) durch Substitution $\dot{x} = z(x)$:

   a) $\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} = 0$
   b) $x^3\ddot{x} = 1$

   2 Punkte

2. Welche der folgenden Eigenschaften linearer Operatoren sind generisch?:

   a) $\det A \neq 0$
   b) $tr(A) \in \mathbb{Q}$
   c) $|\lambda| \neq 0$ für alle Eigenwerte
   d) A ist eine 2×2 –Matrix. Es gibt einen nicht–reellen Eigenwert.
   e) A ist eine 3×3 –Matrix. Es gibt einen nicht–reellen Eigenwert.
   f) Es gibt keine periodische Trajektorie für das System $\dot{x} = Ax$.
   g) $Ax \neq x$ und $Ax \neq -x$ für alle vektoren x

   5 Punkte

3. Eine Liouville–Zahl ist eine reelle Zahl, die sich besonders gut durch rationale Zahlen annähern läßt: Für alle positiven Zahlen n hat die Ungleichung

   $$|x - \frac{p}{q}| < q^{-n}$$

   unendliche viele Lösungen in teilerfremden ganzen Zahlen p, q. Ist es generisch eine Liouville–Zahl zu sein?

   Zusatzfrage: Wie groß ist das Lebesgue–Maß der Liouville–Zahlen im Einheitsintervall?

   3+3 Punkte

   Tip: Vereinige und schneide folgende Intervalle geschickt, um die Menge der Liouville Zahlen darzustellen:

   $$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right)$$