## Übungen vom 10.1.00

1. Sei $M$ offen in $\mathbb{R}^n$, $f\colon M \to M$ stetig differenzierbar, $F(p) = p$ und $Df(p)$ habe nur Eigenwerte vom Betrag kleiner 1. Dann gibt es eine Umgebeung $U$ von $p$ mit:
$$f^k(x) \in U \quad \text{für alle } x \in U$$
und
$$\lim_{k\to\infty} f^k(x) = p.$$
**3 Punkte**

2. Für welche Parameter ist die Nullösung stabil?
$$\dot{x} = ax - 2y + x^2$$
$$\dot{y} = x + y + xy$$
**5 Punkte**

3. Man untersuche mit Hilfe einer Lyapunovfunktion die Stabilität von
$$\dot{x} = xy - x^3 + y^3$$
$$\dot{y} = x^2 - y^3$$
**3 Punkte**

4. Dir Nullösung heißt schwach stabil, falls es für alle Umgebungen $U(0) \subset \mathbb{R}^m$ eine Umgebung $V(0) \subset U(0)$ gibt, so daß für alle $x_0 \in V(0)$ und für alle positiven Zeiten $x(x_0, t) \in U(0)$.

   Man zeige, daß für die lineare Gleichung $\dot{x} = A \cdot x$, wobei alle Eigenwete von $A$ einen verschwindenden Realteil haben, die Nullösung niemals asymptotisch stabil ist, aber schwach stabil ist, genau dann, wenn $A$ diagonalisierbar ist.

   **4 Punkte**