Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 24.4.2008

Aufgabe 1: Sei $H_2(\mathbb{R}^2)$ der Raum der Monome vom Grad 2 in zwei Variablen x, y, also

$$H_2(\mathbb{R}^2) \;=\; \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimme das Bild von $\mathrm{ad}\, A(H_2(\mathbb{R}^2))$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Bestimme die Dimension der Räume $H_m(\mathbb{R}^N)$ der Monome vom Grad m in N Variablen.

Aufgabe 3: Betrachte die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ antisymmetrischer reeller (3×3)-Matrizen. Identifiziere $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^3$ und zeige, dass die Lie-Klammer

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{a}$$

auf $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ dem Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$ entspricht.

Hinweis: Versuche eine geometrisch interpretierbare Identifikation von $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^3$ zu finden. Achte auf korrekte Vorzeichen.

Aufgabe 4: Zeige, dass jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ durch

$$A(t) = \exp(\mathfrak{a} t)$$

eine Einparameter-Untergruppe $\{A(t), t \in \mathbb{R}\}$ von $SO(3, \mathbb{R})$, der Lie-Gruppe orthogonaler reeller (3×3)-Matrizen mit Determinante 1, definiert.

Bemerkung: Der Tangentialraum an die Mannigfaltigkeit $SO(3, \mathbb{R})$ im Einheitselement Id ist durch $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ gegeben. Jedes Element $\mathfrak{a} \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ der Lie-Algebra definiert durch Anwendung der Lie-Gruppe ein Vektorfeld an die Lie-Gruppe. $A(t)$ ist die Integralkurve dieses Vektorfeldes zum Anfangswert Id. Im Gegensatz zur Gruppe der Diffeomorphismen ist exp hier lokal surjektiv.