Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 2.5.2008

Aufgabe 5: Für $(n \times n)$-Matrizen $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ definieren wir das Skalarprodukt $(A, B) := \operatorname{trace}(AB^*)$ und den Kommutator $L_A B = [A, B] = AB - BA$. Die Matrix B^* bezeichnet dabei die zu B adjungierte Matrix $(B^*)_{ij} = \overline{(B)_{ji}}$. Zeige:

(i) $(L_A)^* = L_{A^*}$, das heißt

$$\forall B, C \in M^{n\times n}(\mathbb{C}) \ : \ (L_A B, C) = (B, L_{A^*} C)$$

(ii) Berechne $\ker (L_A)^*$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, mit $0 \neq \lambda \neq \mu \neq 0$.

(iii) Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi_A \ : \ GL(n) \to M^{n\times n}(\mathbb{C}), \quad G \mapsto G^{-1}AG$$

analytisch ist mit der Ableitung

$$D\Psi_A(\mathrm{id}) \ : \ M^{n\times n}(\mathbb{C}) \to M^{n\times n}(\mathbb{C}), \quad C \mapsto L_A C.$$

Aufgabe 6: Die Gruppe $GL(n)$ operiert auf den $(n \times n)$-Matrizen durch Konjugation

$$T_G A := G^{-1}AG.$$

Die Konjugationsklassen $\{T_G A \mid G \in GL(n)\}$, $A \in M^{n\times n}$, werden so zu Orbits der Gruppenaktion. Eine Normalform wählt hierzu einen geeigneten Schnitt.

Vergleiche im Fall $n = 2$ die Jordansche Normalform mit dem durch die 2-Parameter-Familie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$$

(Arnold Normalform) gegebenen Schnitt hinsichtlich Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Glattheit und Analytizität.

Aufgabe 7: Zeige, dass die Exponentialabbildung

$$\exp : sl(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})$$

nicht surjektiv aber lokal (nahe id) surjektiv ist. Dabei bezeichnet $SL(2, \mathbb{R})$ die Gruppe reeller (2×2)-Matrizen mit Determinante 1 und $sl(2, \mathbb{R})$ die Algebra reeller spurfreier (2×2)-Matrizen.

Aufgabe 8: Sei A eine reelle Matrix und

$$\Gamma = \operatorname{clos} \{ \exp(At) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

kompakt. Zeige, dass dann Γ ein Torus ist, d.h. $\Gamma \equiv \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ für geeignetes k.