Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 8.5.2008

Aufgabe 9: Betrachte die Logistische Abbildung

$$F : [0,1] \to [0,1], \qquad F(x) = ax(1-x)$$

für Parameterwerte $1 \leq a \leq 4$. Sei $x^*(a)$ der Pfad nichttrivialer Fixpunkte, der in $a = 0$ vom trivialen Gleichgewicht $x = 0$ transkritisch abzweigt. Sei $a^* > 0$ der Parameterwert, an dem $x^*(a)$ erneut verzweigt, d.h. kritische Stabilität besitzt.

(i) Transformiere auf Koordinaten $y = x - x^*(a)$, $\lambda = a - a^*$.

(ii) Bestimme die Normalform in $(y, \lambda) = (0,0)$ zu mindestens Ordnung 3.

(iii) In welche Parameterrichtung zweigen die Lösungen doppelter Periode ab?

Aufgabe 10: Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \qquad (x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

mit einem trivialen Gleichgewicht, $f(0, \lambda) = 0$. Die Linearisierung $D_x f(0, \lambda)$ habe für $\lambda \approx 0$ Eigenwerte $\alpha(\lambda) \pm \mathrm{i}\omega(\lambda)$ mit

$$\alpha(0) = 0, \qquad \omega(0) \neq 0, \qquad \alpha'(0) \neq 0.$$

Zeige formal, d.h. mittels Normalform unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung, dass in $\lambda = 0$ eine Familie periodischer Orbits abzweigt.

Aufgabe 11: Bestimme die Normalform eines Vektorfeldes

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

mit Linearisierung

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine geeignete Entfaltung

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

in Normalform.

Aufgabe 12: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für Vektorfelder mit nicht-resonanter Linearisierung in Normalform alle Koeffizienten verschwinden, d.h. das Vektorfeld formal linearisiert werden kann.

Für Tupel $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ von Eigenwerten bezeichnet eine *Resonanz* eine Beziehung

$$\lambda_s = (m, \lambda), \qquad m \in \mathbb{N}_0^n, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_k \geq 2.$$

Für ein gegebenes Tupel m von Koeffizienten definiert diese Resonanzbedingung eine *Resonanzebene* in $\mathbb{C}^n$.

Definiere das *Poincaré*-Gebiet als Menge der Tupel $\lambda \in \mathbb{C}^n$, so dass die convexe Hülle von $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ in $\mathbb{C}$ den Ursprung nicht enthält. Definiere das *Siegel*-Gebiet als Menge der Tupel $\lambda \in \mathbb{C}^n$, so dass die convexe Hülle von $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ in $\mathbb{C}$ den Ursprung als inneren Punkt enthält.

Sei λ ein Punkt im *Poincaré*-Gebiet. Zeige:

(i) λ erfüllt eine höchstens endliche Zahl von Resonanzbedingungen.

(ii) Es existiert eine Umgebung von λ in $\mathbb{C}^n$, die keine weiteren Resonanzebenen schneidet.

Freiwilliger Zusatz: Resonanzebenen sind im Siegel-Gebiet überall dicht.