Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 22.5.2008

Aufgabe 13: Betrachte die Verzweigungsgleichung der Lyapunov-Schmidt-Reduktion unter den Voraussetzungen des Satzes von Crandall & Rabinowitz.

$$f : \mathbb{R} \times X \to Y, \qquad (\lambda, x) \mapsto f(\lambda, x), \qquad f(\lambda, 0) = 0.$$

Welcher Term unterscheidet eine transkritische Verzweigung von einer Pitchfork-Verzweigung? Formuliere eine Nichtausartungsbedingung, die im Satz von Crandall & Rabinowitz eine transkritische Verzweigung sichert, d.h. eine Parametrisierung des abzweigenden Astes nichttrivialer Nullstellen durch den gegebenen Systemparameter, $(\lambda(s), x(s)) = (s, x(s))$.

Freiwilliger Zusatz: Woran können sub- und superkritische Pitchfork-Verzweigung unterschieden werden, falls obige Nichtausartungsbedingung verletzt ist?

Aufgabe 14: Was sagt der Satz von Crandall & Rabinowitz über ein System

$$\dot{x} = f(\lambda, x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N, \qquad f(\lambda, 0) = 0,$$

falls die Linearisierung $A(\lambda) = \mathrm{D}_x f(\lambda, 0)$ in $\lambda = 0$ einen geometrisch einfachen aber algebraisch doppelten Eigenwert besitzt?

Freiwilliger Zusatz: Haben wir damit die Bogdanov-Takens-Verzweigung verstanden?

Aufgabe 15: [Newton Polygon] Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von 0 analytisch, $f(0) = 0$, $\mathrm{D}f(0) = 0$. Betrachte im Gitterquadranten $\mathbb{N}^2$ alle Punkte (k, ℓ), so dass in der Entwicklung

$$f(\lambda, x) = \sum_{k,\ell} a_{k\ell} x^k \lambda^\ell$$

$a_{k,\ell} \neq 0$ gilt. Die konvexe Hülle dieser Punkte ist das *Newton-Polygon*.

Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q > 0$ so dass durch

$$p\alpha + q\beta = r, \qquad r \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

eine zum Ursprung weisende Kante des Newton-Polygons gegeben ist, d.h. das *Newton-Polynom*

$$g(\lambda, x) = \sum_{pk+q\ell=r} a_{k\ell} x^k \lambda^\ell$$

mindestens 2 nicht verschwindende Koeffizienten enthält und die Skalierung

$$s^{-r} f(s^q \tilde{\lambda}, s^p \tilde{x}) = g(\tilde{\lambda}, \tilde{x}) + \mathcal{O}(s)$$

für $s \searrow 0$ gilt.

Zeige, dass jede einfache Nullstelle $\tilde{x} = x_0$ des Newton-Polynoms $g_\pm(\tilde{x}) := g(\pm 1, \tilde{x})$ einen Zweig

$$x(s) = x_0 s^p + o(s^p), \qquad \lambda(s) = \pm s^q$$

von Nullstellen von f induziert.

Bemerkung: Für obige Behauptung genügt es, dass f glatt genug ist. Für komplex-analytische f und bei rekursiver Anwendung des Verfahrens an mehrfachen Nullstellen erhält man auf diese Weise alle Nullstellen in einer Umgebung des Ursprungs.

Aufgabe 16: Sei

$$\varphi(\lambda, x) = x^4 + x^3 - 2\lambda^2 x^2 + (5\lambda^3 - \lambda)x + 3\lambda^4 + \lambda^3 + \mathcal{O}\left((|x| + |\lambda|)^5\right).$$

eine Verzweigungsgleichung. Bestimme das lokale Verzweigungsbild nahe $(\lambda, x) = (0, 0)$.