Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 29.5.2008

Aufgabe 17: Vergleiche folgende Entfaltungen von $f(x) = x^3$:

(i) ohne triviales Gleichgewicht: $f(\lambda_1, \lambda_0, x) = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_0$

(ii) mit trivialem Gleichgewicht: $f(\lambda_2, \lambda_1, x) = x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1 x$

Bestimme insbesondere die Verzweigungskurven der Nullstellen in der Parameterebene $\lambda \in \mathbb{R}^2$.

Freiwilliger Zusatz: Vergleiche mit der Darstellung des Faltenwurfes bei Gemälden.

Aufgabe 18: Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

(i) $p(x) = x^2$;

(ii) p ein Polynom, so dass die Ableitung p' nur einfache Nullstellen besitzt.

Zeige, dass alle Zusammenhangskomponenten der Nullstellenmenge

$$\Big\{ 0 = f(\lambda, x) := \lambda^2 + p(x) \ \mid\ \lambda \in \mathbb{R},\ \ x \in \mathbb{C} \Big\}$$

in λ unbeschränkt sind.

Gib ein Beispiel an, so dass bei Einschränkung auf reelle Argumente Inseln, d.h. beschränkte Zusammenhangskomponenten, entstehen.

Freiwilliger Zusatz: Betrachte $f(\lambda, x) := g(\lambda) + p(x)$ für stetiges g.

Aufgabe 19: Untersuche das System

$$\dot{x} = f(\lambda, x) = \lambda - x^3 + x.$$

Was passiert, wenn der Parameter *langsam* variiert?

$$\dot{\lambda} = -\varepsilon x, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Freiwilliger Zusatz: Was hat dieses System mit dem Van-der-Pol-Oszillator zu tun?

$$\ddot{y} + \alpha(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0.$$

Aufgabe 20: Sei X ein Banachraum und $X_1, X_2 \subseteq X$.

(i) Zeige dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Es existiert eine beschränkte, lineare Projektion $P : X \to X$ mit $X_1 = \text{Kern}(P)$ und $X_2 = \text{Bild}(P)$.

(b) X_1, X_2 sind abgeschlossene, lineare Unterräume von X mit $X = X_1 \oplus X_2$.

(ii) Sei Γ eine Gruppe linearer Abbildungen auf X. Zeige dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Es existiert eine Γ-äquivariante, beschränkte, lineare Projektion $P : X \to X$ mit $X_1 = \text{Kern}(P)$ und $X_2 = \text{Bild}(P)$.

(b) X_1, X_2 sind Γ-invariante, abgeschlossene, lineare Unterräume von X mit $X = X_1 \oplus X_2$.

Hinweis: Eine Abildung $P : X \to X$ heißt Γ-äquivariant, falls $\forall \gamma \in \Gamma : \gamma \circ P = P \circ \gamma$. Ein Menge $Y \subseteq X$ heißt Γ-invariant, falls $\forall \gamma \in \Gamma : \gamma(Y) \subseteq Y$.