Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 5.6.2008

Aufgabe 21: Finde Beispiele parameterabhängiger Verktorfelder

$$f(\lambda, x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit trivielem Glechgewicht, $f(\lambda, 0) = 0$, so dass in $(\lambda, x) = (0, 0)$ die Linearisierung $D_x f$ einen geometrisch doppelten Eigenwert besitzt und

(i) ein 2-dimensionale Mannigfaltigkeit von Gleichgewichten

(ii) eine/mehrere 2-dimensionale Kurven von Gleichgewichten

(iii) Gleichgewichte, aber nicht als Kontinuum,

(iv) keine Gleichgewichte

verzweigen.

Aufgabe 22: Bestimme die komplex irreduziblen Darstellungen von $O(2)$, $SO(2)$, D_n, und $\mathbb{Z}_n$. Vergleiche mit den reell irreduziblen Darstellungen aus der Vorlesung.

Aufgabe 23: Betrachte den Raum $L_2(S^1, \mathbb{R})$, $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, periodischer reellwertiger Funktionen. Die kanonische Darstellung der Gruppe $SO(2) = S^1$ auf $L_2(S^1)$ ist durch

$$(\gamma f)(x) = f(\gamma + x)$$

gegeben. Bestimme alle invarianten Unterräume von $L_2(S^1, \mathbb{R})$, auf denen $SO(2)$ irreduzibel operiert.

Hinweis & freiwilliger Zusatz: Betrachte die Fourier-Transformation $T : L_2(S^1, \mathbb{R}) \to \ell_2(\mathbb{C})$. Bestimme insbesondere die durch T induzierte Darstellung von $SO(2)$ auf ℓ_2.

Aufgabe 24: Sei G eine abelsche Gruppe und ρ eine endlich-dimensionale irreduzible Darstellung von G auf einem komplexen Vektorraum V. Zeige, dass V eindimensional ist.