Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 12.6.2008

Aufgabe 25: Betrachte die Automorphismengruppe Γ des Würfels $[-1, 1]^3$ in $\mathbb{R}^3$.

(i) Charakterisiere Γ als Darstellung einer möglichst einfach zu definierenden endlichen Gruppe (z.B. einer Permutationsgruppe)

(ii) Ist die Darstellung irreduzibel? Is sie absolut irreduzibel?

(iii) Finde alle Isotropieuntergruppen und deren Fixpunkträume.

Freiwilliger Zusatz: Betrachte den Oktaeder anstatt des Würfels.

Aufgabe 26: Betrachte die durch Konjugation gegebene Dastellung ρ der Gruppe $O(3)$ der orthogonalen (3×3)-Matrizen auf dem Raum $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ aller (3×3)-Matrizen,

$$\rho(\gamma)A = \gamma^{-1}A\gamma, \qquad \text{für alle } \gamma \in O(3).$$

Bestimme die irreduziblen Unterräume und die irreduziblen Darstellungen auf diesen.

Aufgabe 27: Betrachte die Abbildung

$$f_\lambda(u) = u'' + \lambda \sin u$$

für $u : S^1 \to \mathbb{R}$.

(i) Beschreibe die Gruppe Γ (möglichst aller) Äquivarianzen von f_λ.

(ii) Charakterisiere die Fixräume von $\delta \in \Gamma$ bzw. $\nu \in \Gamma$ mit

$$[\delta u](x) = -u(-x), \qquad [\nu u](x) = u(-x)$$

als Unterräume von Funktionen mit Dirichlet bzw. Neumann-Randbedingungen.

(iii) Finde aus der trivialen Lösung $u \equiv 0$ verzweigende Äste nichttrivialer Lösungen $f_\lambda(u) = 0$. Welche Isotropie haben die abzweigenden Lösungen?

Aufgabe 28: Betrachte den Raum

$$V_\ell = \{\ h \in H_\ell(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid \Delta h = 0\ \}$$

harmonischer, homogener, skalarer Polynome in (x_1, x_2, x_3) vom Grad ℓ.

(i) Zeige, dass $\Delta : H_\ell \to H_{\ell-2}$ surjektiv ist und somit V_ℓ die Dimension $(2\ell+1)$ besitzt.

(ii) Zeige, dass durch

$$[\rho(\gamma)h](x) = h(\gamma^{-1}x)$$

eine Darstellung der Gruppe $SO(3)$ auf V_ℓ gegeben ist.

(iii) In sphärischen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ gilt

$$\Delta h(x) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}h\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}h\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}h\right)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind definiert als

$$Y_{\ell,m} = P_{\ell,|m|}(\cos\theta)\exp(im\phi), \qquad -l \le m \le l;$$

$$P_{\ell,m}(z) = (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_\ell(z), \qquad P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dz^\ell}(z^2-1)^\ell.$$

Zeige, dass der Raum V_ℓ durch die Real- und Imaginärteile der radial skalierten Kugelflächenfunktionen aufspannt wird, d.h.

$$V_\ell = \operatorname{span}\left(r^\ell P_{\ell,m}(\cos\theta)\cos(m\phi), r^\ell P_{\ell,m}(\cos\theta)\sin(m\phi), 0 \le m \le l\right)$$