Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 19.6.2008

Aufgabe 29: Sei $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ glatt. Das Hamilton-System

$$\dot{x} = f(x) = J\nabla H(x), \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \\ -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \end{pmatrix},$$

besitze im Ursprung einen Fixpunkt, $f(0) = 0$. Ferner habe die Linearisierung $Df(0)$ ein paar einfacher Eigenwerte $\pm\mathrm{i}$, alle anderen Eigenwerte haben nicht verschwindende Realteile.

Zeige, dass es in einer Umgebung des Ursprungs eine 2-dimensionale Fläche gibt, die aus periodischen Orbits besteht. Was kannst Du über die Perioden sagen?

Hinweis: Betrachte das System $g(\lambda, x) = (J + \lambda)\nabla H(x)$ und diskutiere die auftretende Hopf-Verzweigung.

Aufgabe 30: Leite die normierte Gleichung

$$\ddot{\theta} = \Omega \sin 2\theta - \sin\theta - \nu\dot{\theta}$$

eines Fliehkraftreglers her. Dabei ist θ die Auslenkung des Regelungsarmes, Ω die (normierte) Winkelgeschwindigkeit, und ν ein Reibungskoeffizient.

Für welche (fixierten) Werte Ω tritt in $(\nu, \theta) = (0, 0)$ Hopf-Verzweigung auf? Diskutiere die resultierende Dynamik.

Aufgabe 31: Das dynamische System $\dot{x} = f(\lambda, x)$ besitze eine Folge $(\lambda_n, \gamma_n(\cdot))$ periodischer Lösungen γ_n zum Parameterwert λ_n. Bezeichne $p_n > 0$ die minimale Periode von γ_n. Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p_\infty < \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n \to \lambda_\infty$$

Ferner mögen die periodischen Orbits gegen einen einzelnen Punkt konvergieren,

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \{x_\infty\}.$$

Zeige, dass das linearisierte System $\dot{y} = Df(x_\infty)y$ eine periodische Lösung der Periode p_∞ besitzt.

Aufgabe 32: Vergleiche im Fall der Hopf-Verzweigung die (Nicht)resonanzbedingung der Lyapunov-Schmidt-Reduktion mit der Frage nach resonanten Termen der Normalform, d.h. nach homogenen Polynomen im Kern der Adjungierten der Linearisierung.

Betrachte dazu z.B. ein System in $\mathbb{R}^4$, dessen Linearisierung in einem Gleichgewicht zwei Paare rein imaginärer Eigenwerte aufweist.