Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 26.6.2008

Aufgabe 33: Betrachte eine Iteration $x_{n+1} = h(\lambda, x_n)$, $h(\lambda, 0) = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Sei $\mu(0) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2\pi p/q}$, p, q teilerfremd, algebraisch einfacher, nichtresonanter Eigenwert der Linearisierung $A(\lambda = 0)$. Gelte ferner die Transversalitätsbedingung $\det \mu'(0) \neq 0$.

Diskutiere die Verzweigungsgleichung der subharmonischen Verzweigung

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi(\lambda, r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \left(\alpha_0(\lambda) + \alpha_1(\lambda)r^2 + \cdots + \alpha_{[q/2]}r^{2[q/2]}\right) r + \beta(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}r^{q-1} + \mathcal{O}(r^q)$$

für $q \geq 5$.

Freiwilliger Zusatz: Was kannst Du im Fall $q \leq 4$ sagen?

Aufgabe 34: Betrachte ein reversibles Vektorfeld

$$\dot{x} = f(x) \in \mathbb{R}^N, \qquad f(Rx) = -Rf(x),$$

R lineare Involution, $R^2 = \mathrm{id}$.

(i) Zeige, dass jeder Orbit $x(\cdot)$ mit $x(0), x(T) \in \mathrm{Fix}(R)$ und $x(0) \neq x(T)$ periodisch ist. Bestimme die Periode. Solche Orbits heißen *reversible periodische Orbits*.

(ii) Zeige, dass jeder Orbit $x(\cdot)$ mit $x(0) \in \mathrm{Fix}(R)$, $\alpha(x(\cdot)) = \{x_-\}$ und $x(0) \neq x_- \in \mathrm{Fix}(R)$ homoklin zu x_- ist.

(iii) Sei N ungerade und $\dim \mathrm{Fix}(R) = \frac{1}{2}(N+1)$. Zeige dass dann generische Gleichgewichte $x_0 \in \mathrm{Fix}(R)$ auf Kurven von Gleichgewichten liegen.

Freiwilliger Zusatz: Verallgemeinere (iii).

Aufgabe 35: Sei wieder $\dot{x} = f(x)$ ein reversibles Vektorfeld in $\mathbb{R}^N$ und $x(\cdot)$ ein reversibler periodischer Orbit. Zeige, dass mit jedem Floquet-Multiplikator μ von $x(\cdot)$ auch μ^{-1}, $\overline{\mu}$ sowie $\overline{\mu}^{-1}$ Floquet-Multiplikatoren von $x(\cdot)$ sind.

Aufgabe 36: Sei wieder $\dot{x} = f(\lambda, x)$ für jeden Parameterwert λ ein reversibles Vektorfeld in $\mathbb{R}^{2N}$. Die Reversibilität habe einen Fixpunktraum der Dimension N.

Sei $x(0, \cdot)$ ein reversibler periodischer Orbit zum Parameterwert $\lambda = 0$ mit Periode T.

Zeige, dass es unter geeigeneten Nichtausartungsbedingungen für alle $\lambda \approx 0$ einen periodischen Orbit $x(\lambda, \cdot) \approx x(0, \cdot)$ der Periode T gibt.