Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 3.7.2008

Aufgabe 37: Betrachte ein reversibles Vektorfeld

$$\dot{x} = f(x), \qquad Rf(x) = -f(Rx), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Der Ursprung sei ein Gleichgewicht, $f(0) = 0$, ohne Eigenwert 0, d.h. mit invertierbarer Linearisierung.

Zeige, dass dann notwendig

$$\dim \mathrm{Fix}(R) = N/2$$

gelten muss.

Bemerkung: Die Voraussetzungen sind zum Beispiel im Satz über die reversible Hopf-Verzweigung erfüllt. Der Fixpunktrum der Reversibilität muss also die halbe Raumdimension besitzen. Insbesondere ist die Dimension des Phasenraums gerade.

Aufgabe 38: Betrachte die Darstellung der $D_n \times S^1$ auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, die durch

$$\begin{aligned} \beta(z_1, z_2) &= (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n} z_1, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/n} z_2) \\ \sigma(z_1, z_2) &= (z_2, z_1) \\ \vartheta(z_1, z_2) &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} z_1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} z_2) \end{aligned}$$

erzeugt wird. Bestimme die Isotropieuntergruppen und ihre Fixpunkträume.

Hinweis: Unterscheide nach Restklassen n mod 4.

Aufgabe 39: Betrachte einen Ring gekoppelter identischer Zellen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{pmatrix} = F(x_k, y_k, \lambda) + K(\lambda) \begin{pmatrix} x_{k-1} + x_{k+1} - 2x_k \\ y_{k-1} + y_{k+1} - 2y_k \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^2, \qquad k \bmod n,$$

mit Kopplungsmmatrix $K(\lambda)$; oder allgemein

$$\dot{w}_k = g(w_{k-1}, w_k, w_{k+1}, \lambda), \qquad k \bmod n, \qquad w_k \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$$

mit

$$g(u, v, w, \lambda) = g(w, v, u, \lambda).$$

Welche Muster erwartest Du in der Nähe einer Hopf-Verzweigung?

Bemerkung: “ponies on a merry-go-round”.