Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 10.7.2008

Aufgabe 41: Betrachte das entlang eines homoklinen Orbits linearisierte System

$$\dot{z} = A(t)z$$

mit $A(t) \to A_0$ für $t \to \pm\infty$. Sei A_0 hyperbolisch. Zeige, dass kleine beschränkte Lösungen $z(t)$ tatsächlich homokline Lösungen sind.

Aufgabe 42: Seinen X, Y Banachräume. Zeige, dass die Menge kompakter linearer Operatoren $X \to Y$ in der Operatornorm abgeschlossen ist.

Hinweis: Die kompakten Operatoren sind tatsächlich der Abschluss der Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild.

Aufgabe 43: Betrachte erneut das nichtautonome lineare System

$$\dot{z} = A(t)z.$$

(i) Sei $A(t) = A_+$ for $t \geq 0$ and $A(t) = A_-$ for $t < 0$ für hyperbolische $A_\pm$.

(ii) Konvergiere $\lim_{t\to\pm\infty} A(t) = A_\pm$ gegen hyperbolische $A_\pm$ mit exponentieller Rate.

Zeige, dass der zugeordnete Operator

$$\mathcal{L} : BC^1 \to BC^0, \qquad \mathcal{L}z = \dot{z} - A(t)z$$

einen Fredholm-Operator darstellt. Zeige, dass sich der Fredholm-Index als Differenz der instabilen Dimensionen von $A_\pm$ ergibt.