Der diskrete Conley–Index und das n–te Wurzelproblem

Juliette Blanca

Diplomarbeit

Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin

8. Januar 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe **5**
- 1.1 Einführung . . . 5
- 1.2 Isolierte, invariante Mengen . . . 7

2 Der Conley–Index für Flüsse **13**
- 2.1 Isolierende Blöcke . . . 13
- 2.2 Index–Paare . . . 15
- 2.3 Der Conley–Index für Flüsse . . . 16

3 Der diskrete Conley–Index **23**
- 3.1 Isolierende Blöcke . . . 23
- 3.2 Filtrationspaare . . . 29
- 3.3 Induzierte Abbildung auf dem Quotientenraum . . . 32
- 3.4 Shiftäquivalenz . . . 35
- 3.5 Der diskrete Index . . . 47
- 3.6 Trivial oder nicht trivial ? . . . 49

4 Stroboskopabbildungen **55**
- 4.1 Gemeinsame isolierte, invariante Menge . . . 55
- 4.2 Konstruktion eines gemeinsamen Index–Paares . . . 59
- 4.3 Resultat . . . 63
- 4.4 Ein Beispiel . . . 65

5 Das n–te Wurzelproblem **67**
- 5.1 Isolierte, invariante Mengen: von f zu F . . . 68
- 5.2 Isolierte, invariante Mengen: von F zu f . . . 69
- 5.3 Vergleich von $h(S,F)$ und $h(S,f)$ . . . 75
- 5.4 Perpektiven . . . 87

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Einführung

Der Conley–Index ist ein topologisches Werkzeug, um dynamische Systeme, oder genauer ihre isolierten, invarianten Mengen, zu analysieren. Wir werden Systeme mit kontinuierlicher Zeit (Flüsse) als auch mit diskreter Zeit betrachten.
Sei X ein metrischer, lokal kompakter Raum.
Ein Fluß ist eine stetige Abbildung $\phi : X \times T \longrightarrow X$, $T = \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. für alle $x \in X$, $\phi(x, 0) = x$
2. für alle $x \in X$ und $s, t \in T$, $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, s + t)$

Eine (volle) Trajektorie durch x ist dann die Menge $\{\phi(x, t), t \in \mathbb{R}\}$
Ein diskretes, dynamisches System kann man folgenderweise beschreiben:
sei $f : X \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung, der "Erzeuger" des Systems. Eine volle Trajektorie durch x ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit den Eigenschaften:

1. $x_0 = x$
2. für alle $n \in \mathbb{Z}$, $f(x_n) = x_{n+1}$

Für einen gegebenen Punkt aus X ist es klar, daß die vorwärts–Trajektorie (das heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der oberen Definition) sich eindeutig mit den Iterationen von f bestimmen lässt. Die Vorgeschichte dagegen ist problematisch: falls f nicht surjektiv ist, wird ihre Existenz gefährdet; falls f nicht injektiv ist, könnte es mehrere Vorgeschichten geben. Im diskreten Fall ist Existenz und Eindeutigkeit der Trajektorie nur für Homöomorphismen gewährleistet.
Hat man es mit einem Homöomorphismus zu tun, kann man ganz analog zur kontinuierlichen Zeit das diskrete System als eine Abbildung $\phi : X \times T \longrightarrow X$, $T = \mathbb{Z}$, mit den oben genannten Eigenschaften betrachten, wobei $\phi(x, t) := f^t(x) = x_t$.

Wir werden diese Notation im nächsten Abschnitt für beliebige diskrete, dynamische Systeme verwenden, auch wenn im Allgemeinen nicht zu jedem $x \in X$ eine eindeutige, volle Trajektorie existiert. Dies erlaubt uns, Aussagen für diskrete und kontinuierliche Zeit in einem zu behandeln. Der Begriff der isolierten, invarianten Mengen ist so ähnlich für die beiden Typen von Systemen, daß man es paralell einführen möchte. Dazu benötigt man eine gemeinsame Notation. Dabei darf man nur nicht vergessen, daß ϕ im Allgemeinen keine Abbildung $X \times \mathbb{Z} \longrightarrow X$ ist.
Im zweiten Kapitel wollen wir die Konstruktion des Conley–Index für Flüsse vorstellen. Diese Theorie ist älter als die für diskrete, dynamische Systeme. Deswegen werden wir uns mehr auf den neueren Conley–Index für diskrete, dynamische Systeme konzentrieren. Wer sich für die Conley–Index für Flüsse tiefer interessieren möchte, sollte in[Misch2] und [Ryb] nachlesen.
Die detaillierte Konstruktion des diskreten Conley–Index geschieht im dritten Kapitel, und zwar so wie sie in [Fr&Ri] eingeführt wird. Diese Definition hat den Vorteil, daß sie auf recht elementare mathematische Objekte aufbaut, und sie macht damit die diskrete Conley–Index–Theorie leichter zugänglich.
Im vierten Kapitel wollen wir diese zwei Konstruktionen vergleichen, indem wir uns mit den besonderen diskreten, dynamischen Systeme beschäftigen, die folgenderweise aus Flüssen kommen: Sei $\phi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ ein Fluß und $P \in \mathbb{R}_+^*$ fixiert. Dann ist $f := \phi(., P)$ (eine Stroboskopabbildung genannt) ein Homöomorphismus und erzeugt ein diskretes, zu ϕ assoziiertes, dynamisches System. Die eindeutige volle Trajektorie durch ein $x \in X$ ist durch $x_n := \phi(x, nP)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gegeben. Ziel dieses Kapitels ist es, zu zeigen, daß der Conley–Index für den Fluß und der aller seinen assoziierten Stroboskopabbildungen im wesentlichen die gleiche Information liefern.
Im letzten Kapiteln wollen wir den diskreter Conley–Index einer Abbildung f mit dem Conley–Index von f^n vergleichen . Dabei werden wir uns auf Homöomorphismen beschränken. Vorher muß man sich überlegen, wo der Vergleich möglich ist.
In Kapitel 4 und 5 werden die Hauptresultate dieser Arbeit bewiesen. Sie gehen auf Fragestellungen aus konkreten Problemen im Rahmen des BMBF–Projektes *Identifizierung verketteter Reaktoren mit Methoden der nichtlinearen Dynamik* von Prof. B. Fiedler zurück. Eine chemische Reaktion in einem Reaktor ist dabei durch eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ modelliert. Bei den zu untersuchenden Reaktionen hat man eine Kette von n identischen Reaktoren. Messungen finden jeweils nach Ablauf dieser Kette statt. Wir haben dadurch Information über die Abbildung $F = f^n$, die Input–Output–Relation. Unser Ziel ist es nun, aus der Dynamik von F Informationen über die Dynamik von f zu gewinnen.
Die Stroboskopabbildungen bilden eine Klasse von Abbildungen, die eine n–te Wurzel besitzen. Sie treten zum Beispiel in Problemen auf, die von gewöhnliche Differientialgleichungen regiert werden: bei regelmässigen Messungen der Zustandsvariablen. In Kapitel 5 gezeigen wir, wie die isolierten, invarianten Mengen von F und f zusammenhängen. Die isolierten, invarianten Mengen enthalten da-

bei das Langzeitverhalten. Weiter wird gezeigt, wie der Conley–Index bezüglich F und f zusammenhängt. Der Conley–Index ermöglicht es uns also, aus F Informationen über die Dynamik von f zu erhalten.

1.2 Isolierte, invariante Mengen

Sei X ein lokal kompakter, metrischer Raum mit Metrik d und sei $T = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$. Für eine Menge $A \subseteq X$ bezeichnen wir mit $int(A)$ und $cl(A)$ das Innere bzw. den Abschluß von A in X, und mit A^c das Komplement von A in X.

Definition 1.2.1

1. *Sei $\phi : X \times T \longrightarrow X$ ein dynamisches System. Eine Menge $S \subseteq X$ heißt invariant, falls es für alle $x \in S$ eine volle Trajektorie durch x existiert, die sich für alle $t \in T$ in S befindet.*

2. *Sei $K \subseteq X$. $Inv(K)$, die maximale invariante Menge, die in K enthalten ist, definieren wir, wie folgt:*

   $Inv(K) := \{x \in K$, es existiert eine volle Trajektorie durch x, die sich für alle $t \in T$ in K befindet$\}$.

Wollen wir zusätzlich die Abhängigkeit von ϕ zum Ausdruck bringen, schreiben wir $Inv(K, \phi)$ an Stelle von $Inv(K)$.

Die Bemerkung und das anschließende Lemma zeigen, daß maximale invariante Menge invariant und maximal sind.

Bemerkung 1.2.2 *Sei $K \subseteq X$ eine kompakte Menge. Wir betrachten zum Beispiel ein diskretes, dynamisches System auf X: $x \in Inv(K)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine volle Trajektorie durch x, die in K bleibt. Dann gilt für alle n aus $\mathbb{Z}$ nicht nur $x_n \in K$, sondern $x_n \in Inv(K)$. Wir finden nämlich durch jedes x_n eine volle Trajektorie $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, wobei für alle $k \in \mathbb{Z}$, $y_k := x_{k+n} \in K$.*
Für den kontinuierlichen Fall ganz analog: Wenn $\phi : X \times T \longrightarrow X$ ein Fluß ist und $x \in Inv(K)$, dann ist jeder Element $y := \phi(x, t_0)$ aus der Trajektorie von x auch in $Inv(K)$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(y, t) = \phi(\phi(x, t_0), t) = \phi(x, t_0 + t)$. Da $x \in K$, ist $\phi(x, t_0 + t) \in K$. Also $y \in Inv(K)$.

Lemma 1.2.3 *Sei $K \subseteq$ ein Kompaktum.*

1. *$Inv(K)$ ist maximal, das heißt: $S \subseteq K$ invariant $\Rightarrow S \subseteq Inv(K)$.*

2. *Sei $K' \subseteq K$ kompakt. Dann gilt $Inv(K') \subseteq Inv(K)$.*

Beweis. Der erste Punkt kommt offensichtlich aus der Definition 1.2.1. Der zweite Punkt ist auch klar: Alle $x \in Inv(K')$ besitzen eine volle Trajektorie durch sich, die in K' bleibt. Da $K' \subseteq K$, bleibt diese Trajektorie auch in K, also $x \in Inv(K)$. □

Definition 1.2.4 1. *Sei $K \subseteq X$ eine kompakte Menge. K ist eine isolierende Umgebung, falls gilt: $Inv(K) \subseteq int(K)$.*

2. *Eine Teilmenge $S \subseteq X$ ist eine isolierte, invariante Menge , falls es eine isolierende Umgebung K gibt mit $Inv(K) = S$.*

Der Conley–Index ist ein Werkzeug, um isolierte, invariante Mengen zu untersuchen. Es folgen drei Beispiele zur Einführung. Das erste Beispiel gibt ein dynamisches System mit leerer bzw. trivialer isolierter invarianter Menge. Das Beispiel 1.2.6 ist ein System mit einer einpunktigen isolierten invarianten Menge, es wird uns noch des öfteren begegnen. Das dritte Beispiel hat keine isolierte invariante Menge außer der trivialen.

Beispiel 1.2.5 *Wir betrachten ein dynamisches System auf $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Phasenporträt. Die Menge K isoliert dabei die leere Menge.*

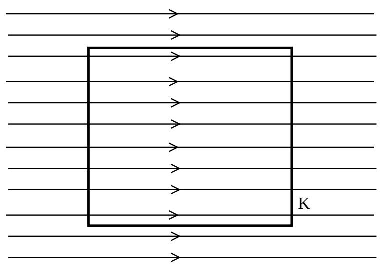

Abbildung 1.1: K isolierende Umgebung, und $Inv(K) = \emptyset$

Beispiel 1.2.6 *Eine hyperbolische Ruhelage ist eine isolierte, invariante Menge. Wir betrachten einen Fluß in $\mathbb{R}^{n+p}$, der den Ursprung als hyperbolische Ruhelage besitzt. Zum Beispiel $\phi(x,t) = e^{At}x$, wobei A eine Diagonalmatrix mit Eigenwerte $a_i < 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $a_i > 0$ für $n+1 \leq i \leq n+p$ ist.*
Diese Ruhelage hat stabile Richtungen $\{e_1, \dots, e_n\}$ und unstablile Richtungen $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+p}\}$. Dabei ist $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{n+p}$. Dann ist der $n+p$–dimensionale Würfel $N := \{\sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i \in \mathbb{R}^{n+p} : |\lambda_i| \leqslant 1\}$ eine isolierende Umgebung für $S = \{0\}$:
Sei $x = \sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i$ verschieden von 0. Die Trajektorie durch x ist gegeben durch $\phi(x,t) = \sum_{i=1}^{n+p} e^{a_i t} \lambda_i e_i$. Da $x \neq 0$, gibt es ein $\lambda_{i_0} \neq 0$. Dann gilt $|e^{a_{i_0} t} \lambda_{i_0}| > 1$

- *für t negativ und groß genug, falls $1 \leqslant i_0 \leqslant n$.*
- *für t positiv und groß genug, falls $n+1 \leqslant i_0 \leqslant n+p$.*

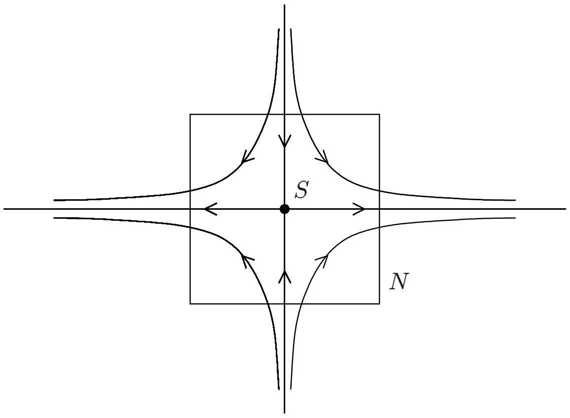

Abbildung 1.2: Ein zweidimensionaler Sattelpunkt und eine seiner isolierenden Umgebungen.

Die Trajektorie durch x hat an diesem Zeitpunkt N verlassen. Die einzige Trajektorie, die N nicht verlässt, ist der Fixpunkt 0. Damit gilt $\{0\} = Inv(N) \subseteq int(N)$, also ist N eine isolierende Umgebung für die hyperbolische Ruhelage 0.

Beispiel 1.2.7 *Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ das diskretes, dynamisches System erzeugt von der Rotation um das Winkel $\alpha \in [0, 2\pi[$. Invariant ist jeder Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung, oder sogar Teilmengen davon, falls α ein rationales Vielfaches von π ist. Aber dieses System besitzt keine nichtleere isolierte invariante Menge beziehungsweise keine isolierende Umgebung K mit $Inv(K) \neq \emptyset$.*
Sei dazu K eine isolierende Umgebung für ein solches System. Angenommen ihre maximale invariante Menge $Inv(K)$ ist nicht leer. Dann enthält sie einen Punkt $x = Re^{i\varphi}$ und damit seine ganz Trajektorie $\{Re^{i(\varphi+k\alpha)}, k \in \mathbb{Z}\}$. K ist nach De-

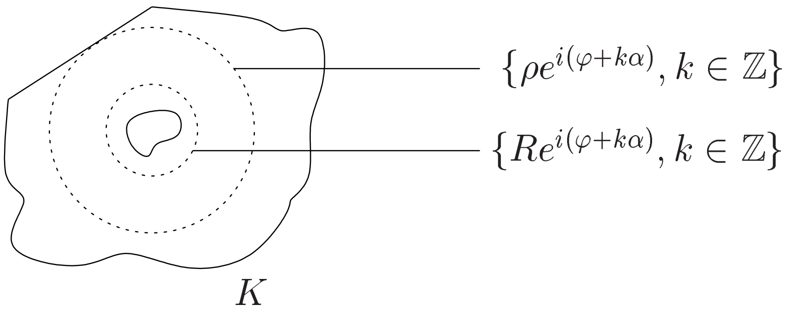

Abbildung 1.3: $Inv(K) \cap \partial K \neq \emptyset$

finition kompakt, also gilt $Diam(K) < +\infty$. $Diam(K)$ ist eine obere Schranke der Menge $\{r \in \mathbb{R}^+ : \{re^{i(\varphi+k\alpha}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq K\}$. Diese Menge ist nicht leer, da sie R

enthält. Sie besitzt also ein Supremum. Außerdem folgt aus der Kompaktheit von K, daß sie abgeschlossen ist. Deswegen existiert

$$\rho := max\{r \in \mathbb{R}^+ : \{re^{i(\varphi+k\alpha}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq K\}.$$

Offensichtlich ist dann die Trajektorie $\{\rho e^{i(\varphi+k\alpha}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ in $Inv(K)$ enthalten. Außerdem muß ein Element dieser Trajektorie auf dem Rand von K liegen. Wenn es nicht der Fall wäre, hätten wir einen Widerspruch zur Maximalität von ρ: aus $\{\rho e^{i(\varphi+k\alpha}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq int(K)$ folgt, daß ein offener ε–Schlauch (mit $\varepsilon > 0$ klein genug) um diese Trajektorie herum auch in K enthalten sein muß. Damit ist aber $\{(\rho + \frac{\varepsilon}{2})e^{i(\varphi+k\alpha}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq K$, obwohl $\rho + \frac{\varepsilon}{2} > \rho$.
Es gilt also $Inv(K) \nsubseteq int(K)$ und das System hat keine nicht triviale isolierte invariante Menge.

Jetzt wollen wir einige Eigenschaften der isolierten, invarianten Mengen kennenlernen, die uns später nützlich sein werden.

Lemma 1.2.8 *Jede isolierte, invariante Menge ist kompakt.*

Beweis. Eine isolierte, invariante Menge ist in einer kompakten, isolierenden Umgebung enthalten. Also bleibt noch zu zeigen, daß eine isolierte, invariante Menge abgeschlossen ist.
Sei S eine isolierte, invariante Menge mit isolierender Umgebung K und $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen y konvergierende Folge mit $y^k \in S$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, daß es durch eine volle Trajektorie durch y gibt, die in K bleibt.
Im Fall eines Flusses ϕ:
Wegen der Stetigkeit von ϕ, konvergiert die Folge $\phi(y^k, t)$ gegen $\phi(y, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da $\phi(y^k, t)$ im Kompaktum K liegt, liegt auch $\phi(y, t)$ in K. Also ist y in $Inv(K) = S$.
Im diskreten Fall:
Da y^k in S liegt, gibt es eine volle Trajektorie $(y^k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ durch y^k mit $y^k_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Konstruktion der Vorwärtstrajektorie ist direkt: Da y^k gegen y konvergiert, konvergiert auch $y^k_n = f^n(y^k)$ gegen $f^n(y) =: y_n$, wenn $k \to \infty$. Außerdem liegt y_n in K, weil K ist kompakt und $y^k_n \in K$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Bei der Rückwärtstrajektorie muss man Teilfolgen verwenden: $y^k = y^k_0$ konvergiert gegen $y = y_0$. Die Folge $(y^k_{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt konvergierende Teilfolgen, weil sie im Kompaktum K liegt. Sei $y^{k_p}_{-1} \in K$ eine davon und y_{-1} ihe Grenzwert. Wegen der Stetigkeit von f gilt $lim_{p\to\infty} f(y^{k_p}_{-1}) = f(y_{-1})$. Außerdem $f(y^{k_p}_{-1}) = y^{k_p}_0 \to y_0$, wobei $\to$ "konvergiert gegen" heißt. Nach der Eindeutigkeit des Limes gilt $y_0 = f(y_{-1})$. Danach geht man induktiv vor: Wenn die Rückwärtstrajektorie bis y_{-n} konstruiert ist, erhält man $y_{-(n+1)}$ als Limes einer konvergierende Teilfolge der Folge $y^{\delta(k)}_{-(n+1)}$, wobei $y^{\delta(k)}_{-n}$ die Teilfolge von y^k_{-n} war, mit der y_{-n} konstruiert wurde.

Insgesamt haben wir eine volle Trajektorie durch y konstruiert, die in K bleibt, also liegt y in $Inv(K) = S$. Damit ist S abgeschlossen und daher kompakt. □

Satz 1.2.9 *Sei K eine isolierende Umgebung für die isolierte, invariante Menge S, und K' eine kompakte Menge, so daß $K' \subseteq K$ und $S \subseteq int(K')$ gilt.*
Dann isoliert K' auch S.

Beweis. $K' \subseteq K$, also gilt nach Lemma 1.2.3 $Inv(K') \subseteq Inv(K) = S$.
Andererseits ist S nach Lemma 1.2.8 kompakt. Da S in K' enthalten ist, gilt $S = Inv(S) \overset{1.2.3}{\subseteq} Inv(K')$.
Es gilt also $S = Inv(K')$. Da $S \subseteq int(K')$ nach Voraussetzung gilt, ist K' eine isolierende Umgebung für S. □

Definition 1.2.10 *Sei $\phi : X \times \mathbb{Z}$ ein diskretes, dynamisches System. Die ω–Limesmenge von $x \in X$ ist definiert als $\omega(x) = \bigcap_{N>0} cl(\{f^n(x), n > N\})$.*

Man beachte: Ein Punkt $y \in X$ liegt in $\omega(x)$ genau dann, wenn es eine Teilfolge von $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen y konvergiert.

Satz 1.2.11 *Sei $\phi : X \times \mathbb{Z}$ ein diskretes, dynamisches System, $S \subseteq X$ eine isolierte, invariante Menge und K eine isolierende Umgebung für S. Falls die Vorwärtstrajektorie eines Punktes $x \in K$ in K liegt, dann ist die ω–Limesmenge von x in S enthalten.*

Beweis. Da K kompakt ist, gilt offensichtlich $\omega(x) \subseteq K$.
Wir zeigen, daß $\omega(x)$ invariant ist. Wegen der Maximalität von $Inv(K) = S$ ist dann $\omega(x) \subseteq S$ klar.
Es gilt $f(\omega(x)) \subseteq \omega(x)$. Sei $y \in f(\omega(x))$. Es existiert ein $\xi \in \omega(x)$ mit $y = f(\xi)$. Da ξ in $\omega(x)$ liegt, gibt es eine Teilfolge $(f^{n_i}(x))_{i\in\mathbb{N}}$, die gegen ξ konvergiert. Die Teilfolge $(f^{n_i+1}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen $f(\xi) = y$ wegen der Stetigkeit von f. Also liegt y in $\omega(x)$. Aus $f(\omega(x)) \subseteq \omega(x)$ folgt, daß die Vorwärtstrajektorien von Punkten aus $\omega(x)$ in $\omega(x)$ bleiben.
Außerdem kann man für alle $y \in \omega(x)$ ein Urbild in $\omega(x)$ finden, was uns die Existenz von vollen Trajektorien, die in $\omega(x)$ bleiben, liefert. Sei dazu $y \in \omega(x)$, und $(f^{n_j}(x))_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen y konvergiert. Für $j \geqslant 1$ ist $n_j \geqslant j \geqslant 1$, also $n_j - 1 \geqslant 0$ und damit $(f^{n_j-1}(x))_{j\geqslant 1}$ wohl definiert. Diese Folge liegt in der kompakten Menge K, also besitzt sie eine konvergierende Teilfolge mit Limes $\zeta \in \omega(x)$. Dank der Stetigkeit von f gilt $f(\zeta) = y$.

□

Bemerkung 1.2.12 *Natürlich gilt das analoge Lemma für α–Limesmengen, und für α–Limesmengen und ω–Limesmenge von Flüssen.*

Kapitel 2

Der Conley–Index für Flüsse

Sei nun $\phi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ ein Fluß auf X, einem lokal kompakten, metrischen Raum mit Metrik d. Ziel dieses Kapitels ist, den Conley–Index für Flüsse zu konstruieren, anhand einiger Beispiele seine Definition zu veranschaulichen und wichtige Eigenschaften des Conley–Index zu beweisen.

2.1 Isolierende Blöcke

Als erstes führen wir den Begriff der Exitmenge ein:

Definition 2.1.1 *Sei $N \subseteq X$ eine kompakte Menge. Ihre Exitmenge N^- ist:*

$$N^- := \{x \in N : \forall t > 0, \phi(x,]0,t[) \not\subseteq N\}$$

Lemma 2.1.2 *Die Exitmenge eines Kompaktums N liegt in ∂N.*

Beweis. Sei $x \in N^-$, der Exitmenge eines Kompaktums N. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tau_n \in]0, \frac{1}{n}[$ mit $\phi(x, \tau_n) \notin N$. Die Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge und ϕ ist stetig, also konvergiert $\phi(x, \tau_n)$ gegen $\phi(x, 0) = x$. Daher liegt x in $cl(N^c) \cap N = \partial N$. $\square$

Definition 2.1.3 *Ein isolierender Block ist ein Kompaktum $N \subseteq X$ mit $N = cl(int(N))$, so daß für alle $x \in \partial N$ und alle $\varepsilon > 0$,*

$$\phi(x,]0, \varepsilon[) \not\subseteq N \quad oder \quad \phi(x,]-\varepsilon, 0[) \not\subseteq N,$$

und die Exitmenge N^- von N ist kompakt.

Wie wir in den zwei folgenden Sätzen sehen werden, ist der Begriff des isolierenden Blockes nah an dem der isolierenden Umgebung. Sie stimmen aber nicht überein, wie man zum Beispiel in der Abbildung 2.1 sieht.

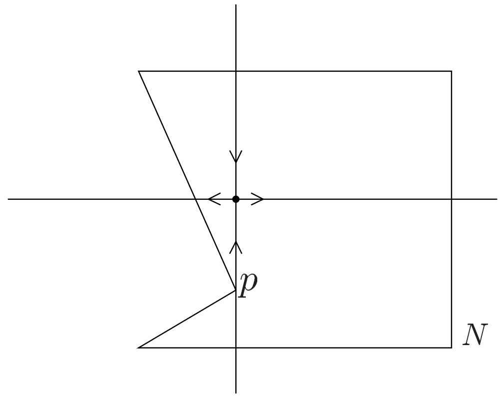

Abbildung 2.1: N ist eine isolierende Umgebung, aber kein isolierender Block.

In einem isolierenden Block fordert man, daß die Randpunkte den Block sofort (vor- oder rückwärts) verlassen. In einer isolierenden Umgebung sollen die Randpunkte das Kompaktum nur irgendwann verlassen.
In der Abb. 2.1 liegt der Punkt p am Rand von N, aber die Trajektorie von p bleibt einen Moment in N, rückwärts und vorwärts. Dagegen ist die isolierende Umgebung in der Abbildung 1.2 ein isolierender Block.

Beispiel 2.1.4 *Wir wollen das Beispiel 1.2.6 von der hyperbolischen Ruhelage fortsetzen. Wir hatten als isolierende Umgebung*

$$N := \left\{ \sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i \in \mathbb{R}^{n+p} : |\lambda_i| \leqslant 1 \right\}.$$

Diese isolierende Umgebung ist auch in isolierender Block. Falls die hyperbolische Ruhelage stabil ist, das heißt $p = 0$, ist N^- leer, denn alle Trajektorien gehen gegen den Ursprung. Sonst ist die Exitmenge von N folgende:

$$N^- = \left\{ \sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i \in N : \exists i_0 \in \{n+1, \dots, n+p\} : |\lambda_{i_0}| = 1 \right\}.$$

Um dies zu zeigen, nehmen wir einen Punkt $x = \sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i$ mit $\lambda_i \leqslant 1$, und $\lambda_{i_0} = 1$. Dann gilt $e^{a_{i_0} \frac{t}{2}} > 1$ für alle $t > 0$, da $a_{i_0} \frac{t}{2} > 0$. Damit gilt $\phi(x, \frac{t}{2}) \notin N$, also $\phi(x,]0, t[) \not\subseteq N$. Das heißt genau $x \in N^-$.
Andererseits, falls ein $x = \sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i$ in N^- liegt, dann existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $0 < t_k < \frac{1}{k}$, so daß $\phi(x, t_k) \notin N$. Es gibt zu jedem k ein $i_k \in \{1, \dots, n+p\}$ mit $|e^{a_{i_k} t_k} \lambda_k| > 1$. Die Folge $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ häuft sich auf einem $j_0 \in \{1, \dots, n+p\}$, oder genauer gesagt, besitzt sie eine Teilfolge $(i_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$, die konstant gleich j_0 ist. Außerdem gilt $|e^{a_{j_0} t_{k_p}} \lambda_{j0}| > 1$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Wenn $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ wäre, kämen wir zu einem Widerspruch zu $x \in N$. Denn es folgt aus $a_{j_0} < 0$, daß

$|\lambda_{j_0}| > |e^{a_{j_0} t_{k_p}} \lambda_{j0}| > 1$. Also liegt j_0 in $\{n+1, \ldots, n+p\}$.
Da $0 < t_{k_p} < \frac{1}{k_p}$, ist $(t_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Somit konvergiert $|e^{a_{j_0} t_{k_p}} \lambda_{j0}|$ gegen $|\lambda_{j_0}| \geqslant 1$. Da $|\lambda_{j_0}| \leqslant 1$ vorausgesetzt war, ist $|\lambda_{j_0}| = 1$.
Die Menge N^- ist kompakt. Da kein Eigenwert gleich 0 ist, verläßt jeder Punkt vom Rand die Menge N vorwärts oder rückwärts sofort (je nachdem welche Vorzeichen der Eigenwert hat).

Satz 2.1.5 *Ein isolierender Block ist eine isolierende Umgebung.*

Beweis. Sei N ein isolierender Block. Dann gilt $Inv(N) \subseteq int(N)$, weil die Punkte aus ∂N die Menge N verlassen. Damit liegen diese Punkte nicht in $Inv(N)$. □

Satz 2.1.6 *Zu jeder isolierten, invarianten Menge S und offenen Menge U mit $S \subseteq U$ existiert ein isolierender Block K mit $K \subseteq U$.*

Dieser Satz ist seit langem bekannt, wir wollen ihn in dieser Arbeit nicht beweisen. Man kann den Beweis in [Ryb] nachlesen. Dort tauchen auch die die Abbildungen φ und γ auf, welchen wir in Kapitel 4 begegnen werden.

2.2 Index–Paare

Um aus der isolierenden Umgebung Information über die Dynamik zu erhalten, braucht man noch den Begriff des Index–Paares:

Definition 2.2.1 *Sei $S \subseteq X$ eine isolierte, invariante Menge. Ein Paar (N, L) von kompakten Mengen $L \subseteq N \subseteq X$, heißt Index–Paar für S, falls*

1. *$cl(N \setminus L)$ eine isolierende Umgebung für S ist,*
2. *für alle $x \in L$ und alle $t > 0$, $\phi(x, [0,t]) \subseteq N \Longrightarrow \phi(x, [0,t]) \subseteq L$*
3. *für alle $x \in N$ und $t_1 > 0$ mit $\phi(x, t_1) \notin N$, ein $t_0 \in [0, t_1]$ existiert, so daß $\phi(x, [0, t_0]) \subseteq N$ und $\phi(x, t_0) \in L$*

Bemerkung 2.2.2 *Die zweite Bedingung wird "positive Invarianz" genannt. Sie bedeutet folgendes: wenn man in L startet, kommt man nicht mehr nach $N \setminus L$ zurück, bevor man die Umgebung verlässt. Entweder geht man aus N heraus, oder man bleibt noch einen Moment in L.*
Die dritte Bedingung besagt, daß L ein "exit–set" ist. Damit ist gemeint, daß eine Trajektorie N nicht verlässt, ohne durch L zu gehen.

Mit Hilfe der Exitmenge (Definition 2.1.1) kann man sehr leicht aus einem isolierenden Block ein Index–Paar konstruieren:

Satz 2.2.3 *Sei N ein isolierender Block für eine isolierte, invariante Menge S. Dann ist (N, N^-) ein Index–Paar für S.*

Beweis. Das Paar (N, N^-) ist ein Paar kompakter Mengen mit $N^- \subseteq N$. Als erstes muß bewiesen werden, daß $cl(N \setminus N^-)$ eine isolierende Umgebung für S ist. Da aber N^- im Rand von N liegt, ist $cl(N \setminus N^-)$ gleich N und isoliert damit S.
Als nächstes zeigt man, daß N^- positiv invariant ist. Sei $x \in N^-$ und $t > 0$. Die Aussage $\phi(x, [0, t]) \subseteq N$ ist immer falsch, da $\phi(x, [0, t])$ die Menge $\phi(x,]0, t[)$ enthält, die selber schon keine Teilmenge von N ist. Aus der falschen Aussage $\phi(x, [0, t]) \subseteq N$ folgt insbesondere $\phi(x, [0, t]) \subseteq N^-$!
Als letztes ist die "Exit-set" Eigenschaft zu beweisen. Sei $x \in N$, so daß es ein $t_1 > 0$ gibt mit $\phi(x, t_1) \notin N$. Sei $A := \{t \in [0, t_1] : \phi(x, t) \notin N\}$. Diese Menge A ist nicht leer, da sie t_1 enthält. Außerdem ist sie von unten durch 0 beschränkt, also besitzt sie ein Infimum, das wir t_0 nennen:

$$t_0 := \inf\{t \in [0, t_1] : \phi(x, t) \notin N\}.$$

Für alle $t < t_0$ gilt $\phi(x, t_0) \in N$, sonst wäre ja t_0 kein Infimum. Da N abgeschlossen ist und ϕ stetig, muß auch $\phi(x, t_0)$ in N liegen. Damit ist $\phi(x, [0, t_0]) \subseteq N$. Außerdem gehört $\phi(x, t_0)$ zu N^-: für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $t \in A$ mit $t_0 < t < t_0 + \varepsilon$. Daß t in A liegt, bedeutet $\phi(x, t) \notin N$. Es gilt also $\phi(x,]t_0, t_0 + \varepsilon[) = \phi\big(\phi(x, t_0),]0, \varepsilon[\big) \not\subseteq N$. Das heißt genau, daß $\phi(x, t_0)$ in N^- liegt. □

Beispiel 2.2.4 *Wir wollen das Beispiel 2.1.4 von der hyperbolischen Ruhelage fortsetzen. Wir hatten einen isolierenden Block N und seine Exitmenge N^- bestimmt. Nach Satz 2.2.3 ist (N, N^-) ein Index–Paar für den Ursprung. Die Abbildung 2.2 zeigt ein Index–Paar für einen Sattelpunkt.*

2.3 Der Conley–Index für Flüsse

Sei (N, L) ein Index–Paar. Wir wollen jetzt den Quotientraum N/L als punktierten Raum konstruieren. Um den Fall, in dem L leer ist, nicht als Ausnahme betrachten zu müssen, machen wir eine Konstruktion, die komplizierter aussieht, als sie eigentlich ist. Wenn L nicht leer ist, könnte man mit dem üblichen Quotientenraum N/L arbeiten, bei dem die Äquivalenzklasse von L der ausgezeichnete Punkt ist.
Sei $* \notin N$ ein universaler Punkt. Aus $N \cup \{*\}$ machen wir einen topologischen Raum: Eine Menge $M \subseteq N \cup \{*\}$ ist offen in $N \cup \{*\}$, falls $M \setminus \{*\}$ offen in N ist.

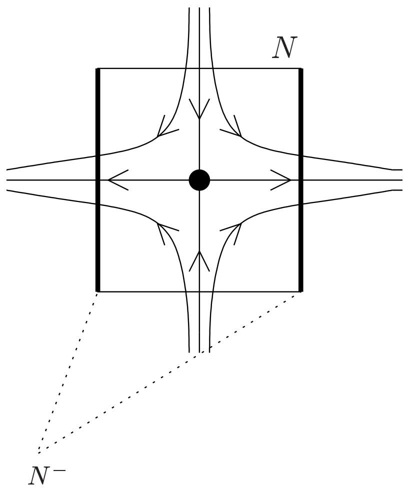

Abbildung 2.2: Ein Index–Paar für einen Sattelpunkt.

Wir definieren auf $N \cup \{*\}$ die Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt:
$x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x \in L \cup \{*\}$ und $y \in L \cup \{*\}$. Anders gesagt kollabiert die Menge L zu dem Punkt $o(*)$, der der Basispunkt unseres punktierten Raumes wird.
Wir nennen o die Quotientenabbilung, die $x \in N$ auf seine Äquivalenzklasse abbildet, und $N/L := o(N)$. Genauer sieht o so aus:

$$\begin{aligned} o: \quad N \cup \{*\} &\longrightarrow N/L \\ x &\longmapsto \begin{cases} o(*) = L \cup \{*\} & \text{falls } x \in L \cup \{*\} \\ o(x) = \{x\} & \text{falls } x \notin L \cup \{*\} \end{cases} \end{aligned}$$

Dadurch, daß die Elemente aus $N \setminus L$ allein in ihren Äquivalenzklassen sind, kann man durch $o(x) \mapsto x$ eine Bijektion zwischen $(N/L) \setminus \{o(*)\}$ und $N \setminus L$ herstellen. Dies erlaubt uns, N/L mit $(N \setminus L) \cup \{o(*)\}$ zu identifizieren.
Die Topologie dieses Raumes ist die folgende:
Eine Menge $U \subseteq N/L$ ist offen genau dann, wenn ihr Urbild unter o offen in $N \cup \{*\}$ ist.
Falls $o(*) \notin U$, gilt für sein Urbild $o^{-1}(U) \cap (L \cup \{*\}) = \emptyset$. Durch unsere Identifizierung gilt also $o^{-1}(U) = U$. U muß also offen in N sein.
Falls $o(*)$ doch zu U gehört, definieren wir $V := U \setminus o(*)$. Es gilt $o^{-1}(U) = o^{-1}(V) \cup o^{-1}(o(*))$. Durch die Identifizierung ist also $o^{-1}(U) = V \cup L \cup \{*\}$, und U ist genau dann offen, wenn $V \cup L$ offen in N ist.

Beispiel 2.3.1 *Sei N ein Kompaktum, und $L = \emptyset$. Dann ist $o(*) = \{*\}$ und durch unsere Identifikation N/L das gleiche wie $N \cup \{*\}$ mit $*$ als ausgezeichnetem Punkt.*

Beispiel 2.3.2 *Wir kehren zu unserem Beispiel der hyperbolischen Ruhelage zurück. Das Index–Paar (N, N^-), das in 2.2.4 angegeben wurde, liefert uns den Quotientenraum N/N^-. Die Abbildung 2.3 beschreibt, wie man sich das im Fall eines Sattelpunktes vorstellen kann.*

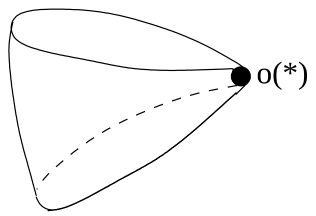

Abbildung 2.3: Die Exitmenge kollabiert zu einem Punkt.

Beispiel 2.3.3 *Die leere Menge ist bei jedem Fluß isoliert invariant und $(\emptyset, \emptyset)$ bildet trivialerweise ein Index–Paar für $\emptyset$. Mit unserer Notation erhalten wir für den Conley–Index von $\emptyset$,*

Definition 2.3.4 *Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte, topologische Räume. Zwei stetige, basispunkterhaltende Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen homotop, falls es eine stetige Abbildung $h : X \times [0, 1] \to Y$ gibt, mit*

$$h(x, 0) = f(x) \text{ für alle } x \in X,$$

$$h(x, 1) = g(x) \text{ für alle } x \in X,$$

$$h(x_0, t) = y_0 \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Bemerkung 2.3.5 *Die Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller stetigen,basispunkterhaltenden Abbildungen $X \to Y$.*

Lemma 2.3.6 *Seien A, B, X und Y topologische punktierte Räume und $a : A \to X$, $b : Y \to B$, $f, g : X \to Y$ stetige, basispunkterhaltende Abbildungen.*
Wenn $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ homotop sind, dann gilt auch:

1. *$f \circ a$ und $g \circ a$ sind homotop,*
2. *$b \circ f$ und $b \circ g$ sind homotop.*

Beweis. Da f und g homotop sind, gibt es eine Homotopie $h : X \times [0, 1] \to Y$ mit $h(., 0) = f$ und $h(., 1) = g$. Dann ist $h(a(.), .)$ eine Homotopie zwischen$f \circ a$ und $g \circ a$ und $b(h(., .))$ eine Homotopie zwischen $b \circ f$ und $b \circ g$. □

Beispiel 2.3.7 *Jede Abbildung* $f : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ *ist homotop zu* $id_{\mathbb{R}}$ *durch die Homotopie* $h(x,t) = tf(x) + (1-t)x$.

Beispiel 2.3.8 *Sei* Σ^1 *die punktierte eindimensionale Sphäre. Wir betrachten die Abbildung* $s : \Sigma^1 \longrightarrow \Sigma^1$, *die an der Achse durch den ausgezeichneten Punkt und seinen Antipoden spiegelt. Diese Abbildung bildet den ausgezeichneten Punkt natürlich auf sich selbst ab. Sie ist nicht homotop zur Identität von* Σ^1. *Um dies zu sehen, betrachten wir den geschlossenen Weg* $\alpha : [0,1] \to \Sigma^1$, *der einmal um* Σ^1 *herumläuft, sie erzeugt* $H_1(\Sigma^1$. *Es gilt für die in erster Homologie induzierte Abbildung* s_1, *wobei* $[.]$ *die Homolopieklasse bezeichnet:* $s_1([\alpha]) := [s \circ \alpha] = -[\alpha]$, *und natürlich* $id_1([\alpha]) = [\alpha]$. *Da der Homologiefunktor homotopieinvariant ist, können* s *und* id *nicht homotop sein.*

Definition 2.3.9 *Seien* (X, x_0) *und* (Y, y_0) *punktierte, topologische Räume.* (X, x_0) *heißt homotopieäquivalent zu* (Y, y_0), *falls es zwei stetige, basispunkterhaltende Abbildungen*

$$f : X \longrightarrow Y \text{ und } g : Y \longrightarrow X$$

gibt, mit folgenden Eigenschaften:

- $g \circ f$ *ist homotop zur Identität von* (X, x_0)
- $f \circ g$ *ist homotop zur Identität von* (Y, y_0)

Bemerkung 2.3.10 *Die Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation für (punktierte) topologische Räume. Falls man Homotopie zwischen nicht punktierten topologischen Räumen definert, fordert man nicht, daß die Abbildungen basispunkterhaltend sind.*

Definition 2.3.11 *Sei* $S \subseteq X$ *eine isolierte, invariante Menge und* (N, L) *ein Index–Paar für* S. *Dann ist der Conley–Index* $h(S)$ *von* S *die Homotopieklasse von* N/L.

Beispiel 2.3.12 *Zur Erinnerung: Wir hatten für eine hyperbolische Ruhelage folgendes Index–Paar konstruiert*

$$N := \left\{ \sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i \in \mathbb{R}^{n+p} : |\lambda_i| \leqslant 1 \right\}$$

$$N^- = \left\{ \sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i \in N : \text{ es gibt ein } i_0, \text{ so daß } n+1 \leqslant i_0 \leqslant n+p \text{ und } |\lambda_{i_0}| = 1 \right\}$$

Ziel ist jetzt zu zeigen, daß N/N^- *zur* p*–dimensionalen punktierten Sphäre* Σ^p *homotopieäquivalent ist. Dafür geben wir zuerst eine Homotopieäquivalenz zwi-*

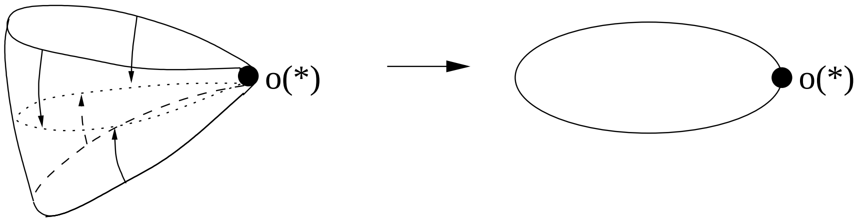

Abbildung 2.4: Der Conley–Index eines Sattelpunktes ist Σ^1

schen N und dem p–dimensionalen Würfel

$$K^p = \{x = \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i e_i : |\lambda_i| \leqslant 1 \textit{ für alle } n+1 \leqslant i \leqslant n+p\} \subseteq N$$

an, deren Einschränkung auf N^- eine Homotopieäquivalenz zwischen N^- und dem Rand vom K^p ist. Dabei tun wir nichts anderes, als unser Index–Paar in die stabilen Richtungen zu "kontrahieren".
Wir definieren:

- *f als die Projektion von N auf K^p*

$$\begin{aligned} f: \quad & N & \longrightarrow\ & K^p \\ & x = \textstyle\sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i & \longmapsto\ & f(x) = \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i e_i \end{aligned}$$

- *g als die Inklusion von K^p in N*

$$\begin{aligned} g: \quad K^p & \longrightarrow N \\ x & \longmapsto x. \end{aligned}$$

Sei $x = \sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i e_i \in N$. Dann ist $(g \circ f)(x) = \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i e_i = f(x)$. Eine Homotopie h zwischen $(g \circ f)$ und der Identität von N ist durch

$$h(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t e_i + \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i e_i$$

gegeben.
Außerdem ist für alle $x \in K^p$, $(f \circ g)(x) = x$, also ist $(f \circ g) = id_{K^p}$.
Wir haben $\partial K^p = \{x = \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i e_i :$ es gibt ein $n+1 \leqslant i_0 \leqslant n+p$ mit $|\lambda_{i_0}| = 1\}$.
Mit den vorher definierten f, g und h haben wir

$$N^- \xrightarrow{f_{|N^-}} \partial K^p \xrightarrow{g_{|\partial K^p}} N^-$$

und sogar noch mehr: $f(x) \in \partial K^p \Leftrightarrow x \in N^-$ *und* $g(x) \in N^- \Leftrightarrow x \in \partial K^p$ *Die Restriktion von* h *definiert eine Homotopie zwischen* $f_{|_{N^-}} \circ g_{|_{\partial K^p}}$ *und* $id|_{N^-}$*. Dann induzieren* f*,* g *und* h *eine Homotopieäquivalenz zwischen den Quotientenräumen* N/N^- *und* $K^p/\partial K^p$*:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "o"'] & K^p \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[d, "p"] \\ N/N^- \arrow[r, shift left, "\tilde{f}"] & K^p/\partial K^p \arrow[l, shift left, "\tilde{g}"] \end{tikzcd}$$

wobei o *und* p *die Quotientabbildungen sind, und*

$$\tilde{f} : o(x) \longmapsto \begin{cases} p(f(x)) & \textit{falls } x \notin N^- \\ p(*) & \textit{sonst ,} \end{cases}$$

$$\tilde{g} : p(x) \longmapsto \begin{cases} o(g(x)) & \textit{falls } x \notin \partial K^p \\ o(*) & \textit{sonst .} \end{cases}$$

Es ist einfach zu sehen, daß diese Abbildungen wohldefiniert sind, und daß das Diagramm kommutiert.
Außerdem sind $\tilde{f}$ *und* $\tilde{g}$ *stetig. Wir nehmen eine Menge* U*, die offen in* $K^p/\partial K^p$ *ist und* $p(*)$ *enthält. Sei* $U' := U \setminus p(*)$*. Durch die Identifizierung von* $K^p/\partial K^p$ *mit* $K^p \setminus \partial K^p \cup \{p(*)\}$ *erhalten wir:* U *ist offen in* $K^p/\partial K^p$ *genau dann, wenn* $U' \cup \partial K^p$ *offen in* K^p *ist. Da* f *stetig ist, muß dann die Menge*

$$f^{-1}(U' \cup \partial K^p) = f^{-1}(U') \cup f^{-1}(\partial K^p) = f^{-1}(U') \cup N^-$$

offen sein.
Andererseits ist aber

$$\tilde{f}^{-1}(U) = \tilde{f}^{-1}(U' \cup \{p(*)\}) = \tilde{f}^{-1}(U') \cup \tilde{f}^{-1}(p(*)) = f^{-1}(U') \cup \{o(*)\}.$$

Die letzte Menge ist offen in N/N^- *genau dann, wenn* $f^{-1}(U') \cup N^-$ *offen in* N *ist, was wir gerade gezeigt haben. Also ist* $\tilde{f}^{-1}(U)$ *offen in* N/N^-*. Für* $\tilde{g}$ *geht dies ganz analog.*
Die Abbildung $h : N/N^- \times [0,1] \longrightarrow N/N^-$

$$\tilde{h} : (t, o(x)) \longmapsto \begin{cases} o(h(t,x)) & \textit{falls } x \notin N^- \\ o(*) & \textit{sonst} \end{cases}$$

ist auch stetig, und liefert eine Homotopie zwischen $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ *und* id_{N/N^-}*. Außerdem gilt* $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{K^p/\partial K^p}$*. Damit sind* N/N^- *und* $K^p/\partial K^p$ *homotopieäquivalent. Der punktierte Raum* $K^p/\partial K^p$ *ist nichts anderes als die punktierte* p*–dimensionale Sphäre* Σ^p*.*

Beispiel 2.3.13 *Die leere Menge ist bei jedem Fluß isoliert invariant und* $(\emptyset, \emptyset)$ *bildet trivialerweise ein Index–Paar für* $\emptyset$*. Mit unserer Notation erhalten wir für den Conley–Index von* $\emptyset$*, den wir "trivialer Conley–Index" nennen,* $\{*\}/\{*\} = \{*\}$ *(dabei wird die Quotientenabbildung weggelassen, da sie gleich die identität ist).*

Die Wohldefiniertheit zeigen wir nicht in dieser Arbeit. Man kann dies zum Beispiel in [Ryb] nachlesen. Die Idee des Beweises ist folgende: Die Quotientenräume, die von zwei Index–Paaren geliefert werden, gehören der gleichen Homotopieklasse an. Dazu kommt die nötige Homotopie aus dem Fluß.

Kapitel 3

Der diskrete Conley–Index

Wir betrachten nun ein diskretes dynamisches System $f : X \longrightarrow X$ auf einem lokal kompakten, metrischen Raum X mit Metrik d.

3.1 Isolierende Blöcke

Definition 3.1.1 *Eine kompakte Menge $N \subseteq X$ heißt isolierender Block, falls*

$$f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subseteq int(N).$$

Bemerkung 3.1.2 *Diese Definition ist analog zu der eines isolierenden Blocks im kontinuierlichen Fall. Auch hier besteht der Unterschied zwischen einem isolierendem Blocks und einer isolierenden Umgebung hauptsächlich aus folgender Tatsache: Sei $N \subseteq X$ ein isolierender Block und $x \in \partial N$. Da N kompakt ist, gehört x zu N. Aus $x \notin int(N)$, folgt $x \notin f(N)$ oder $x \notin f^{-1}(N)$. In dem Fall $x \notin f(N)$ hat x kein Urbild in N. Das würde heißen, daß sich keine volle Trajektorie durch x zum Zeitpunkt $n = -1$ in N befindet. Falls eine solche volle Trajektorie existiert, verlässt sie rückwärts im nächsten Schritt N. Der Fall $x \notin f^{-1}(N)$ heißt $f(x) \notin N$, also verlässt eine Trajektorie durch x zum Zeitpunkt $n = 1$ die Menge N. Die Punkte auf dem Rand von N verlassen N sofort, vorwärts oder rückwarts.*

Wir benötigen isolierende Blöcke, um die Existenz des Conley–Index zu beweisen.

Beispiel 3.1.3 *Wir betrachten folgende Abbildung:*

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\to \quad \mathbb{R} \\ x &\mapsto \quad -x|x| \end{aligned}$$

Diese Abbildung erzeugt ein diskretes, dynamisches System mit folgenden isolierten, invarianten Mengen: $\{0\}$, $\{-1, 1\}$, $[-1, 1]$. Wir interessieren uns für $S := \{-1, 1\}$, die aus einer periodischen Orbit besteht, da $f(1) = -1$ und

$f(-1) = 1$. *Die Menge* $N = [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ *bildet einen isolierenden Block für* S *(siehe Abb. 3.1), da* $f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) = [-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}] \subseteq int(N)$.

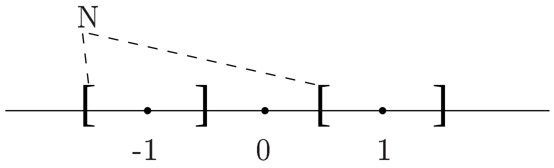

Abbildung 3.1: Ein isolierender Block für $\{-1, 1\}$

Satz 3.1.4 *Sei* $N \subseteq X$ *ein isolierender Block. Dann ist* N *eine isolierende Umgebung .*

Beweis. Sei nun N eine kompakte Menge mit $f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subseteq int(N)$.
Wir zeigen $Inv(N) \subseteq f(N) \cap N \cap f^{-1}(N)$.
Sei $x \in Inv(N)$. Dann existiert eine Trajektorie $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ durch x mit

- $x_0 = x$,
- $f(x_n) = x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und
- $x_n \in N$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Daraus folgt

- $x = X_0 \in N$,
- $x \in f(N)$, weil $x = x_0 = f(x_{-1})$, $x_{-1} \in N$, und
- $x \in f^{-1}(N)$, weil $x = x_0$, $f(x_0) = x_1 \in N$.

□

Satz 3.1.5 *Jede isolierende Umgebung enthält einen isolierenden Block.*

Um den Beweis konstruktiv führen zu können, benötigen wir noch eine Definition und zwei Lemmata:

Definition 3.1.6 *1. Eine* ε*–Kette ist eine endliche Folge* $(x_n)_{q \le n \le p}$ *wobei* $d(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$ *für alle* $n \in \{q, \dots, p-1\}$ *gilt.*

2. *Sei S eine isolierte, invariante Menge und N eine isolierende Umgebung von S. Die Menge aller $x \in N$, durch die eine ε-Kette in N von S zu S läuft ist: $C_\varepsilon(N,S) := \{x \in N : \exists k \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon$–Kette $(x_n)_{-k \le n \le k} \subseteq N : x_0 = x, x_k$ und $x_{-k} \in S\}$.*

Lemma 3.1.7 *$C_\varepsilon(N,S)$ ist offen in N.*

Beweis. Sei $x \in C_\varepsilon(N,S)$. Wir zeigen, daßman für alle y nah genug an x gilt, daß $y \in C_\varepsilon(N,S)$ ist. Dazu konstruieren wir eine ε–Kette durch y von S zu S, indem wir die ε–Kette durch x zum Zeitpunkt $n = 0$ ändern (siehe dazu die Abbildung 3.2). Nach Definition existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und eine ε-Kette $(x_n)_{-k \le n \le k} \subseteq N$ mit

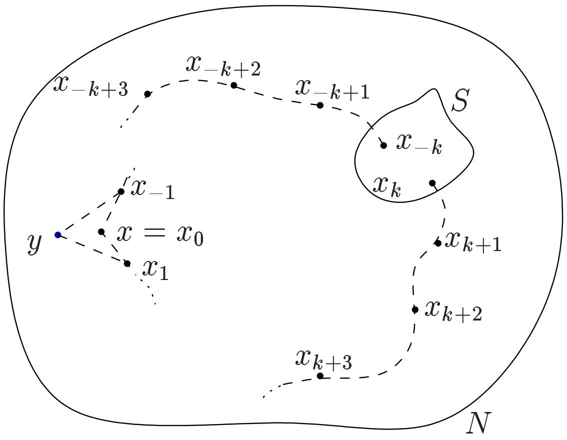

Abbildung 3.2: Man erhält eine ε–Kette unabhängig davon, ob der Weg durch x oder durch y führt.

$x_0 = x$, und $x_k, x_{-k} \in S$. Es gilt $d(f(x), x_1) < \varepsilon$, das heißt $d(f(x), x_1) = q\varepsilon$ für ein $0 \leqslant q < 1$.
Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, daß für alle y, aus $d(x,y) < \delta$ folgt $d(f(x), f(y)) < (1-q)\varepsilon$.
Außerdem gilt $d(f(x_{-1}), x) < \varepsilon$, also $d(f(x_{-1}), x) = q'\varepsilon$ für ein $0 \leqslant q' < 1$. $U := \{y \in N, d(x,y) < min(\delta, (1-q')\varepsilon)\}$ ist eine Umgebung von x, die in $C_\varepsilon(N,S)$ enthalten ist: für $y \in U$ ist

$$(y_n)_{-k \le n \le k}, \text{ wobei } y_n = \begin{cases} y & \text{für } n = 0 \\ x_n & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

eine ε-Kette durch y von S zu S. Es gilt nämlich

- für $n = -1$,

$$\begin{aligned} d(f(y_n), y_{n+1}) &= d(f(y_{-1}), y_0) \\ &= d(f(x_{-1}), y) \quad \leqslant d(f(x_{-1}), x) + d(x,y) \\ &\qquad\qquad\qquad < q'\varepsilon + (1-q')\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

,

- für $n = 0$,

$$\begin{aligned} d(f(y_n), y_{n+1}) &= d(f(y_0), y_1) \\ &= d(f(y), x_1) \leqslant d(f(y), f(x)) + d(f(x), x_1) \\ &\qquad < (1-q)\varepsilon + q\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

und

- für $n \notin \{0, -1\}$, $d(f(y_n), y_{n+1}) = d(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$.

Da $(x_n)_{-k \leq n \leq k}$ eine ε–Kette von S zu S war, ist dies auch der Fall für $(y_n)_{-k \leq n \leq k}$, also liegt y in $C_\varepsilon(N, S)$. □

Die $C_\varepsilon(N, S)$ bilden eine Basis der Umgebungen von S:

Lemma 3.1.8 *Sei S eine isolierte, invariante Menge mit isolierender Umgebung N und V eine offene Umgebung von S. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $C_\varepsilon(N, S) \subseteq V$.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen es gäbe zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x(\varepsilon)$ in $C_\varepsilon(N, S) \setminus V$. Das heißt, daß es eine ε–Kette $(x_n(\varepsilon))_{-k(\varepsilon) \leqslant n \leqslant k(\varepsilon)}$ von S zu S gibt, wobei $k(\varepsilon) \neq 0 \in \mathbb{N}$. Aus dieser ε–Kette konstruieren wir folgendermaßen eine Folge $(x_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{Z}}$:
Da $x_{-k(\varepsilon)}(\varepsilon)$ in S liegt, hat dieser Punkt eine Vorgeschichte. Wir können also die ε–Kette für $n \leqslant -k(\varepsilon)$ mit einer Rückwärtstrajektorie durch $x_{-k(\varepsilon)}(\varepsilon)$ verlängern. Genauer sieht es so aus:
Sei $(\xi_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{Z}}$ eine volle Trajektorie durch $x_{-k(\varepsilon)}(\varepsilon)$. Sie existiert und bleibt im Kompaktum N, da $x_{-k(\varepsilon)}(\varepsilon)$ in S liegt. Nun brauchen wir nur noch für $n < -k_\varepsilon$ $x_n(\varepsilon) := \xi_{n+k_\varepsilon}$ zu setzen.
Für $n \geqslant k(\varepsilon)$ setzen wir mit $x_{n+1}(\varepsilon) := f(x_n(\varepsilon))$ fort. Hier bleiben auch die $(x_n(\varepsilon))_{n \geqslant k(\varepsilon)}$ in N, weil $x_{k(\varepsilon)}(\varepsilon)$ in S war.
Insgesamt haben wir jetzt für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(x_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{Z}}$, die ganz in N liegt mit $x_0(\varepsilon) \notin V$. Sei nun $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, wobei $\varepsilon_i > 0$ für alle i gilt. Da N kompakt ist, hat jede Folge $(x_n(\varepsilon_i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergierende Teilfolge. OBdA nehmen wir an, daß $(x_n(\varepsilon_i))_{i \in \mathbb{N}}$ selber gegen ein $x_n \in N$ konvergiert.
Einerseits muß x_0 in $N \setminus V$ liegen, da $N \setminus V$ abgeschlossen ist und $x_0(\varepsilon_i) \in N \setminus V$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Andererseits ist $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine volle Trajektorie durch x_0, die in N bleibt:
Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ ist der Abstand $d(x_{n+1}(\varepsilon), f(x_n(\varepsilon)))$ entweder 0 (wenn $|n|$ groß genug ist), oder zumindestens kleiner als ε, da wir von einer ε–Kette ausgegangen sind. Aus $d(x_{n+1}(\varepsilon_i), f(x_n(\varepsilon_i))) < \varepsilon_i$ folgt für $i \to +\infty$, daß $x_{n+1} = f(x_n)$. $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist also tatsächlich eine Trajektorie. Wegen der Abgeschlossenheit von N liegt x_n in N für alle $n \in \mathbb{Z}$. Also liegt x_0 in S. Da $S \subseteq V$ gilt, muß $x_0 \in V$ gelten

– was uns aber einen Widerspruch liefert.
Schließlich haben wir bewiesen, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, mit $C_\varepsilon(N, S) \subseteq V$. □

BEWEIS.von Satz 3.1.5
Sei S eine isolierte, invariante Menge und N eine isolierende Umgebung für S. Wir behaupten, daß $B := cl(C_\varepsilon(N, S))$ ein isolierender Block für S ist.
Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann gilt $f(B) \cap B \cap f^{-1}(B) \nsubseteq int(B)$. Oder anders ausgedrückt, es gibt einen Punkt $x \in f(B) \cap B \cap f^{-1}(B)$, der nicht in $int(B)$ liegt. Da $x \in f^{-1}(B)$, hat er ein Urbild $y \in B$, mit $x = f(y)$. Aus $x \in f^{-1}(B) \cap B \cap f(B)$ folgt, daß y, $f(y)$, und $f^2(y)$ in B liegen.
Die Stetigkeit von f liefert uns ein $\delta > 0$, so daß für alle ξ mit $d(y, \xi) < \delta$ folgt $d(f(y), f(\xi)) < \varepsilon$.
Nach Lemma 3.1.7 gilt $int(B) = C_\varepsilon(N, S)$. Da y in B liegt, finden wir ein $\xi \in C_\varepsilon(N, S)$, so daß $d(y, \xi) < \delta$. Daß ξ in $C_\varepsilon(N, S)$ liegt, bedeutet, es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und eine ε–Kette durch ξ, $(\xi_n)_{-k \leqslant n \leqslant k}$, von S zu S: ξ_k, $\xi_{-k} \in S$ und $\xi_0 = \xi$. Insbesondere $d(y, \xi_0) < \delta$.
Außerdem folgt aus $f^2(y) \in B$, daß es ein $\chi \in int(B) = C_\varepsilon(N, S)$ gibt mit $d(\chi, f^2(y)) < \varepsilon$. Also haben wir ein $m \in \mathbb{N}$ und eine ε–Kette $(\chi_n)_{-m \leqslant n \leqslant m}$ von S zu S durch χ. Insbesondere $\chi_0 = \chi$ und $\chi_m \in S$.
Sei p :=max$\{m, k\}$. Wir konstruieren jetzt eine ε–Kette $(\zeta_n)_{-p-1 \leqslant n \leqslant p+1}$ durch $f(y)$ von S zu S. Die Idee dabei ist folgende: Unsere ε–Kette (ζ_n) folgt erst der ε–Kette durch ξ. Wenn sie ξ erreicht hat, springt sie auf $f(y)$. Dann geht sie mit χ und der ε–Kette durch χ weiter. Damit (ζ_n) der Definition einer ε–Kette entspricht, brauchen wir sie nur noch am Anfang oder am Ende bis zum Zeitpunkt $-p$ oder p zu verlängern. Das ist möglich, da sowohl ξ_{-k} als auch χ_m in S liegen. Deswegen können wir die letzten Schritte auf der einen oder der anderen Trajektorie tun, ohne S zu verlassen. Siehe dazu die Abbildung 3.3.
Formal definieren wir also $(\zeta_n)_{-p-1 \leqslant n \leqslant p+1}$ wie folgt:
Falls $p = m$, das heißt $-p < -k : \xi_{-k} \in S$, also finden wir wegen 1.2.2 eine Trajektorie durch ξ_{-k}, die in S liegt. Insbesondere existieren ζ_i, $i \in \{-p-1, \ldots, -k-1\}$ so daß :

- $\forall i \in \{-p-1, \ldots, -k-1\}$, $\zeta_i \in S$,
- $\forall i \in \{-p-1, \ldots, -k-1\}$, $\zeta_{i+1} = f(\zeta_i)$ und
- $\zeta_{-k-1} = \xi_{-k}$.

Wegen der zweiten Bedingung gilt offensichtlich für $i \in \{-p-1, \ldots, -k-1\}$, $d(\zeta_{i+1}, f(\zeta_i)) = 0 < \varepsilon$.
Für $i \in \{-k, \ldots, -1\}$, setzen wir $\zeta_i := \xi_{i+1}$. Es gilt für alle $i \in \{-k, \ldots, -1\}$

$$d(\zeta_{i+1}, f(\zeta_i)) = d(\xi_{i+2}, f(\xi_{i+1})) < \varepsilon,$$

weil (ξ_n) schon eine ε-Kette war.
Weiter setzen wir $\zeta_0 := f(y)$. Wir hatten ξ so gewählt, daß die Ungleichung

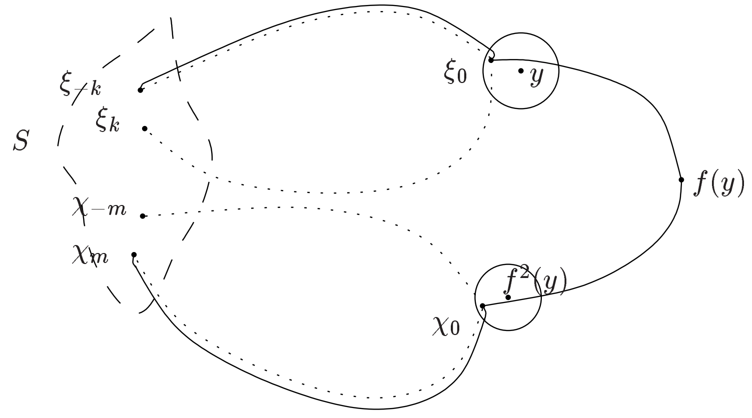

Abbildung 3.3: Die durchgezogene Linie stellt die ε–Kette durch $f(y)$ dar, die wir aus einer ε–Kette durch ξ und einer ε–Kette durch χ konstruieren.

$d(\xi, y) < \delta$ gilt. Damit erhalten wir:

$$d(f(\zeta_{-1}), \zeta_0) = d(f(\xi_0), f(y)) = d(f(\xi), f(y)) < \varepsilon.$$

Für $i \in \{1, \ldots, p+1\}$, wird $\zeta_i := \chi_{i-1}$ gesetzt. Nun folgt nach unserer Wahl von χ folgende Ungleichung:

$$d(f(\zeta_0), \zeta_1) = d(f^2(y), \chi_0) = d(f^2(y), \chi) < \varepsilon.$$

Außerdem gilt für $i \leqslant 1$:

$$d(f(\zeta_i), \zeta_{i+1}) = d(f(\chi_{i-1}), \chi_i) < \varepsilon,$$

weil (χ_n) eine ε-Kette war.
Die oberen Ungleichungen zeigen, daß $(\zeta_n)_{-p-1 \leqslant n \leqslant p+1}$ eine ε–Kette ist. Außerdem gilt $\zeta_0 = f(y)$, $\zeta_{-p-1} \in S$ und $\zeta_{p+1} \in S$.
Für den Fall $p = k$ gehen wir ganz analog vor:

- Für $i \in \{-p-1, \ldots, -1\}$, wird $\zeta_i := \xi_{i+1}$ gesetzt.
  Als ζ_0 wählen wir wieder $f(y)$.
  Für $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, setzen wir $\zeta_i := \chi_{i-1}$.

- Für $m+1 \leqslant i \leqslant p$ folgen wir der Trajektorie durch $\zeta_{m+1} = \chi_m$ und setzen $\zeta_{i+1} := f(\zeta_i)$. Diese Punkte liegen in S, da χ_m schon in S lag. Außerdem gilt $d(f(\zeta_i), \zeta_{i+1}) = 0 < \varepsilon$.

Damit haben wir eine ε–Kette durch $f(y) = x$ konstruiert. Es steht im Widerspruch zu $x \notin int(B) = C_\varepsilon(N, S)$. Es muß also gelten, daß

$$f(B) \cap B \cap f^{-1}(B) \subseteq int(B).$$

□

3.2 Filtrationspaare

Analog zum kontinuierlichen Fall definieren wir in diesem Abschnitt die Exitmenge. Sie wird in der Konstruktion des Filtrationspaares – dem diskreten Analogon zum Index–Paar – eine wichtigee Rolle spielen.

Definition 3.2.1 *Sei N eine kompakte Menge. $N^- := \{x \in N, f(x) \notin int(N)\}$ heißt die Exitmengenge von N.*

Bemerkung 3.2.2 *N^- enthält die Punkte, die $int(N)$ bei der nächsten Iteration verlassen. N^- ist eine kompakte Menge, weil $N^- = N \cap f^{-1}(int(N)^c)$.*

Zur Illustration setzen wir das Beispiel 3.1.3 vom Anfang das Kapitels fort.

Beispiel 3.2.3 *Für den oben genannten N gilt*

$$N^- = [-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}] \cup [-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}].$$

Siehe dazu Abb. 3.5.

Definition 3.2.4 *Sei $S \subseteq X$ eine isolierte, invariante Menge. Ein Paar kompakter Mengen (N, L), $L \subseteq N$, heißt ein Filtrationspaar für S, falls gilt:*

1. *$S = Inv(cl(N \setminus L)) \subseteq int(N \setminus L)$, das heißt $cl(N \setminus L)$ ist eine isolierende Umgebung für S.*

2. *L ist eine kompakte Umgebung von N^- in N, das heißt, L ist kompakt und N^- liegt im Inneren einer Menge $\mathcal{L} \subseteq X$ mit $L = \mathcal{L} \cap N$.*

3. *$f(L) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$*

Bemerkung 3.2.5 *Es gibt für diesen Begriff in der Literatur drei verschiedene Definitionen. Die ursprüngliche ist die von [RS]. Sie fordert vom Paar (N, L), daß die von f induzierte Abbildung auf dem Quotientraum N/L (siehe Satz 3.3.1) stetig wird. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind relativ kompliziert. Die meisten Autoren benützen eine Definition des Index–Paares, in der nur hinreichende Bedingungen für diese Stetigkeit vorkommen. Diese Definition hat den Vorteil, daß sie bequem zu behandeln ist. Der Nachteil ist aber, daß so ein Index–Paar nicht mehr robust unter Störungen ist.*
Die Definition, die ich gewählt habe, ist in [Fr&Ri] gegeben. Sie schien mir für unsere Zwecke die sinnvollste: die Bedingungen sind recht einfach und liefern ein robustes Paar.

Satz 3.2.6 *Jede isolierte, invariante Menge besitzt ein Filtrationspaar.*

Um den Satz 3.2.6 zu beweisen, werden wir einen Umweg über isolierende Blöcke und Exitmengen machen.

Satz 3.2.7 *Sei N ein isolierender Block für die isolierte, invariante Menge S und L eine hinreichend kleine Umgebung von N^- in N. Dann ist (N, L) ein Filtrationspaar für S.*

Mit dieser Aussage ist der Beweis von 3.2.6 sehr einfach.
BEWEIS.von Satz 3.2.6
Sei N eine isolierende Umgebung für S. Nach Satz 3.1.5 wissen wir, daß N einen isolierenden Block enthält. Der vorangegangene Satz 3.2.7 ermöglicht uns, aus diesem isolierenden Block ein Filtrationspaar zu konstruieren. □

BEWEIS. von Satz 3.2.7
Für die Bedingung (1) der Definition 3.2.4:
Erst wollen wir zeigen, daß $S \subseteq N \setminus L$ für eine Umgebung L von N^- gilt. Die Exitmenge war, wie folgt, definiert: $N^- = \{x \in N : f(x) \notin int(N)\}$, woraus folgt, daß $f(N^-)$ in $(intN)^c$ enthalten ist. Da S im Inneren von N liegt, schneidet sie $f(N^-)$ nicht: es gilt $S \cap f(N^-) = \emptyset$.
Jetzt muß man L so klein wählen, daß $S \cap f(L) = \emptyset$ immer noch gilt. Das ist wegen folgender Überlegung möglich:
Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{2}d(f(N^-), S) > 0$. Da f stetig und N kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig auf N. Es existiert also $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in N$ aus $d(x, y) \leqslant \delta$ die Ungleichung $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$ folgt. Wir wählen die Menge L so, daß sie in dem δ–Schlauch um N^- enthalten ist und ihr Inneren die Menge S enthält. Genauer: $L \subseteq \{x \in N : d(x, N^-) \leqslant \delta\}$ kompakt und $S \subseteq int(L)$. Dann

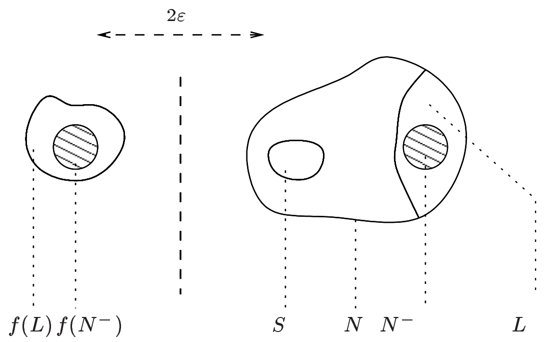

Abbildung 3.4: Wahl von L

gilt für alle $x \in L$,

$$\underbrace{d(f(N^-), S)}_{=2\varepsilon} \leqslant \underbrace{d(f(N^-), f(x))}_{\leqslant \varepsilon} + d(f(x), S)$$

Es gilt also $d(f(x), S) \geqslant \varepsilon > 0$ für alle $x \in L$. Daraus folgt, daß $f(L)$ die Menge S nicht schneidet: $f(L) \cap S = \emptyset$.
Wäre $S \cap L$ nicht leer, so auch $f(S \cap L) = f(S) \cap f(L) = S \cap f(L)$[1]. Also muß $S \cap L$ leer gewesen sein, und damit $S \subseteq N \setminus L$.
Es bleibt nur noch zu zeigen, daß S im Inneren von $N \setminus L$ liegt. Der Rand von $N \setminus L$ ist in $\partial N \cap \partial L$ enthalten. Da S die kompakte Menge L nicht schneidet, schneidet sie auch ihren Rand nicht, das heißt $S \cap \partial L = \emptyset$. Außerdem haben wir vorausgesetzt, daß N ein isolierender Block sei. Nach Definition gilt also $S \cap \partial N = \emptyset$. Insgesamt haben wir bewiesen, daß $S \subseteq N \setminus L$ und $S \cap \partial(N \setminus L) = \emptyset$ gilt. Wir schließen daraus $S \subseteq int(N \setminus L)$. Wegen Lemma 1.2.9 ist $cl(N \setminus L)$ eine isolierende Umgebung von S.
Die Bedingung (2) der Definition 3.2.4 ist trivialerweise erfüllt.
Die dritte Bedingung, die wir beweisen wollen, besagt, daß $f(L)$ die isolierende Umgebung $cl(N \setminus L)$ nicht schneidet. Wieder machen wir einen Umweg und beweisen erst, daß für N^-, $f(N^-) \cap cl(N \setminus N^-) = \emptyset$ gilt. Nachher reicht das Argument der gleichmäßigen Stetigkeit aus, um zu zeigen, daß es für eine hinreichend kleine Umgebung L auch gilt.
Nach Definition gilt $N^- = N \cap (f^{-1}(int(N))^c$. Daher gilt

$$\begin{aligned} N \setminus N^- &= N \cap (N^-)^c \\ &= N \cap (N \cap (f^{-1}(int(N))^c)^c \\ &\subseteq N \cap f^{-1}(int(N)) \\ &\subseteq N \cap f^{-1}(N). \end{aligned}$$

Die Menge $N \cap f^{-1}(N)$ ist abgeschlossen, also gilt auch $cl(N \setminus N^-) \subseteq N \cap f^{-1}(N)$. Andererseits gilt $f(N^-) \subseteq f(N) \cap (int(N))^c$. Also

$$\begin{aligned} f(N^-) \cap cl(N \setminus N-) &\subseteq f(N) \cap (int(N))^c \cap N \cap f^{-1}(N) \\ &= \underbrace{f(N) \cap N \cap f^{-1}(N)}_{\subseteq int(N),\text{ da } N \text{ isolierender Block}} \cap (int(N))^c \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Stetigkeit von f auf dem Kompaktum N liefert uns zu $\varepsilon' := \frac{1}{2} d(f(N^-), cl(N \setminus N^-)) > 0$ ein δ', so daß für alle $x, y \in N$ mit $d(x, y) < \delta'$ die Ungleichung $d(f(x), f(y)) < \varepsilon'$ gilt. Wieder reicht es, daß L eine kompakte Umgebung von S ist, die in dem δ–Schlauch um S liegt, um einen positiven Abstand $d(f(L), cl(N \setminus L) \geqslant \varepsilon' > 0$ zu bekommen. Damit sind $f(L)$ und $cl(N \setminus L)$ disjunkt, was der Bedingung (3) entspricht.
Insgesamt haben wir bewiesen, daß jeder isolierende Block N zusammen mit einer

[1]Es gilt $f(S) = S$: $f(S) \subseteq S$ gilt, denn durch jeden $f(s)$ aus $f(S)$ geht die volle Trajektorie durch s durch und diese bleibt in K. $S \subseteq f(S)$, denn jeder $s \in S$ hat eine Vorgeschichte in S, insbesondere gibt es $s_{-1} \in S$ mit $s = f(s_{-1})$

hinreichend kleinen Umgebung seiner Exitmenge N^- ein Filtrationspaar bildet. Wie klein die Umgebung sein muß, hängt von der Abbildung f ab,insbesondere von den Abständen $d(f(N^-), S)$ $d(f(N^-), cl(N \setminus N^-))$. □

Beispiel 3.2.8 *Der Satz 3.2.7 erlaubt uns aus N und N^- ein Filtrationspaar (N, L) zu bilden, wobei L eine hinreichend kleine Umgebung von N^- ist. Dieses Filtrationspaar (N, L) wird in Abb. 3.5 dargestellt.*

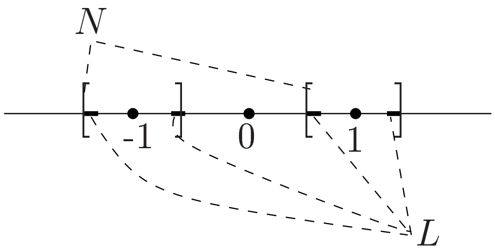

Abbildung 3.5: (N, L) Filtrationspaar für $\{-1, 1\}$.

3.3 Induzierte Abbildung auf dem Quotientenraum

Wie beim Conley–Index für Flüsse bilden wir jetzt den Quotienten N/L, wobei (N, L) ein Filtrationspaar einer isolierten, invarianten Menge S sein soll. An dieser Stelle ist die Homotopie–Äquivalenz aber nicht das richtige Konzept: verschiedene Filtrationspaare können nicht homotope Quotientenräume liefern . Siehe dazu die Abbildung 3.6, dort ist ein diskretes System dargestellt, das von einer Stroboskopabbildung erzeugt wird. Der Fluß zur Stroboskopabbildung hat einen Sattelpunkt, außerdem springen die diskreten Trajektorien von den Punkten aus den kleinen Kästchen direkt in den großen Kasten. Das Paar aus der Abbildung 2.2 liefert uns für dieses System auch ein Filtrationspaar. Die Quotientenräume, die bei diesen Filtrationspaaren entstehen, sind nicht homotop. Der eine der beiden ist zusammenhängend, der andere nicht. Die Deswegen führen wir im nächsten Abschnitt die “passende” Äquivalenzrelation ein.

Satz 3.3.1 *Sei S eine isolierte, invariante Menge mit Index–Paar $P = (N, L)$. Eine stetige Abbildung $f : N \longrightarrow N$ induziert eine stetige Abbildung $f_{(N,L)} : N/L \longrightarrow N/L$.*

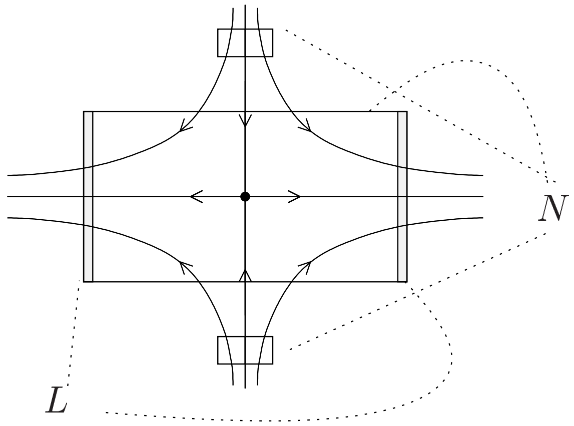

Abbildung 3.6: Σ^1 gehört nicht zur Homotopieklasse von N/L

Beweis. Sei $o : N \to N/L$ die Quotientenabbildung.
Wir zeigen erst, daß

$$f_{(N,L)}(o(x)) := \begin{cases} o(f(x)) & \text{falls } x \notin L \cup \{*\} \\ o(*) & \text{falls } x \in L \cup \{*\} \end{cases}$$

dadurch wohldefiniert ist:
Sei $o(x) \in N/L$. Falls $x \notin L$, $o(x) = x$ und x ist nicht in der Exitmenge von N nach Bedingung (2) von der Definition 3.2.4 vom Index–Paar, also $f(x) \in N$: $o(f(x))$ macht dann Sinn.
Außerdem hängt das Bild von $o(x)$ nicht von seinem Repräsentanten ab: Sei $y \in o(x)$, $y \neq x$. Dann gilt $x \in L \cup \{*\}$ und $y \in L \cup \{*\}$. Das Bild durch $f_{(N,L)}$ ist also $o(*)$, egal welchen Repräsentanten man betrachtet hat. Drittens wollen wir die Stetigkeit von f_P überprüfen. Die Stetigkeit außerhalb von $o(*)$ ist klar, weil es da, dank der Identifizierung von $N/L \setminus \{o(*)\}$ mit $N \setminus L$, die Hintereinanderausführung von $f : N \setminus L \longrightarrow N$ und $o : N \longrightarrow N/L$ ist. Diese beide Abbildungen sind stetig. Bleibt also die Stetigkeit in $o(*)$ nachzuprüfen. Die Metrik auf X induziert eine Metrik[2] auf N/L, deren Topologie mit der schon im vorigen Kapitel beschriebenen Topologie übereinstimmt. Sei $(o(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $o(*)$ bezüglich der induzierten Metrik konvergiert. In dem Fall, in dem diese Folge für große n konstant gleich $o(*)$ ist, ist es trivial, daß ihr Bild unter f_P gegen $o(*)$ geht. Wir betrachten also eine Folge $(o(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, bei der für

[2]Diese induzierte Metrik δ ist die folgende:

$$\delta(o(x), o(y)) = \begin{cases} d(x,y) & \text{für } o(x), o(y) \neq o(*) \\ d(x,L) & \text{für } o(y) = o(*) \\ d(y,L) & \text{für } o(x) = o(*) \end{cases}$$

alle n, $o(x_n) \neq o(*)$, das heißt $x_n \notin L \cup \{*\}$ gilt. Wegen der Kompaktheit von N zerfällt (x_n) in konvergierende Teilfolgen, die gegen Punkte aus L konvergieren: $d(x_n, L) = \delta(o(x_n), o(*)) \longrightarrow 0$.
Sei $(o(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine dieser Teilfolgen, und $x \in L$ ihr Limes. Wegen der Stetigkeit von f gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$.
Die Exitmenge N^- liegt im Inneren von L, und x auf seinem Rand als Limes einer Folge, die außerhalb von L liegt. Also $x \notin N^-$, oder anders gesagt, $f(x) \in int(N)$. Es gilt außerdem $f(x) \in L$ wegen der Bedingung (3) der Definition 3.2.4 eines Filtrationspaares.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} f_{(N,L)}(o(x_{n_k})) &= \lim_{k\to\infty} o(f(x_{n_k})) \quad \text{weil } x_{n_k} \in N \setminus L \\
&= o(\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})) \text{ weil } o \text{ stetig ist} \\
&= o(f(x)) \quad \text{weil } f \text{ stetig ist} \\
&= o(*) \text{ weil } f(x) \in L \\
&= f_{(N,L)}(x)
\end{aligned}$$

$f_{(N,L)}$ ist also in $o(*)$ auch stetig. □

Beispiel 3.3.2 *Wir betrachten weiter den Beispiel 3.1.3 mit dem Filtrationspaar (N, L) aus 3.2.8. Der Quotientenraum (N, L) ist die Einpunktvereinigung von zwei punktierten 1–Sphären (das heißt zwei an ihren Basispunkt verklebte Σ^1), bezeichnet mit $\Sigma^1 \vee \Sigma^1$. Siehe dazu Abb. 3.7.*

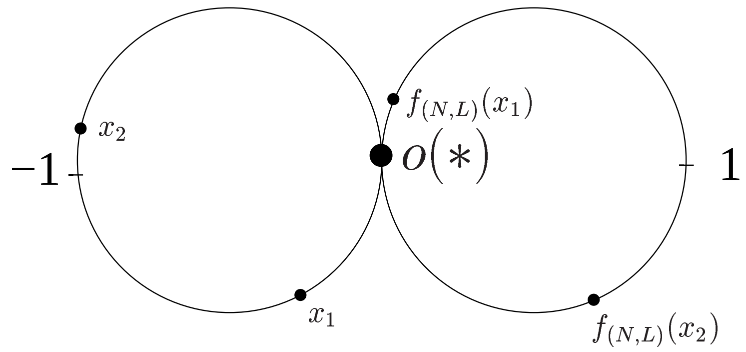

Abbildung 3.7: N/L und die induzierte Abbildung $f_{(N,L)}$.

Die Definition des diskreten Conley–Indizes wollen wir mit Hilfe dieser induzierten Abbildung formulieren. Dazu brauchen wir eine Äquivalenzrelation, die Abbildungen vergleichen kann, die auf verschiedenen Räumen definiert sind.

3.4 Shiftäquivalenz

Definition 3.4.1 *Abbildungen $f : X \to X$ und $g : Y \to Y$ heißen shiftäquivalent, falls $m \in \mathbb{N}$ und stetige Abbildungen $r : X \to Y$, $s : Y \to X$ existieren, so daß:*

- *folgende Diagramme kommutieren:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & X \arrow[d, "r"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

- *r, s, f und g erfüllen*

$$r \circ s = g^m$$
$$s \circ r = f^m.$$

Die Shiftäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation: Reflexivität und Symmetrie sind klar. Bei der Tansitivität braucht man nur die Abbildungen vom ersten Raum zum zweiten, und die vom zweiten zum dritten hintereinanderauszuführen.
Jetzt wollen wir uns überlegen, was diese Äquivalenzrelation überhaupt bedeutet. Dafür betrachten wir erst einmal den Fall, in dem $m = 0$ ist. Dann sind r und s invers zueinander, und wegen $g \circ r = r \circ f$ wird durch r eine Trajektorie durch einen Punkt x aus X unter f auf die Trajektorie durch $r(x)$ unter g abgebildet:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "f"] & x_{-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & x_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & x_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "g"] & r(x_{-1}) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & r(x_0) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & r(x_1) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "f"] & x_{-1} \arrow[r, "f"] & x_0 \arrow[r, "f"] & x_1 \arrow[r, "f"] & \cdots \end{tikzcd}$$

In diesem Fall ist die Shiftäquivalenz eine topologische Konjugation zwischen den beiden dynamischen Systemen, die von f und g erzeugt werden.
Bei größeren m ist $s \circ r$ nicht mehr die Identität, sondern sie wirkt wie eine Iteration von f. Die Trajektorie $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ wird unter $s \circ r$ auf $(f^m(x_n))_{n\in\mathbb{Z}} = (x_{n+m})_{n\in\mathbb{Z}}$ abgebildet, also um m nach links verschoben:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "f"] & x_{-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & x_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & x_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "g"] & r(x_{-1}) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & r(x_0) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & r(x_1) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "f"] & x_{m-1} \arrow[r, "f"] & x_m \arrow[r, "f"] & x_{m+1} \arrow[r, "f"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Diese dynamischen Systeme sind also “bis auf einem Shift” äquivalent. Die natürliche Zahl m nennt man Zeitverschiebung (“lag” im Englischen).

Bemerkung 3.4.2 *Homöomorphismen $f : X \to X$ und $g : Y \to Y$ sind genau dann shiftäquivalent, wenn sie topologisch konjugiert sind – das heißt, es existiert ein Homöomorphismus $h : X \to Y$, so daß $h^{-1} \circ g \circ h = f$.*

Beweis. Im Beweis verwenden wir, daß f und g Homöomorphismen sind, dadurch kann man die Zeitverschiebung “nachholen”. Angenommen f und g sind shiftäquivalent mit Zeitverschiebung m. Dann existieren $r : X \to Y$ und $s : Y \to X$ wie oben beschrieben. Nun gilt

$$\begin{aligned} r \circ f^{-m} &= g^{-m} \circ g^m \circ r \circ f^{-m} \\ &= g^{-m} \circ r \circ s \circ r \circ f^{-m} \\ &= g^{-m} \circ r \circ f^m \circ f^{-m} \\ &= g^{-m} \circ r \end{aligned}$$

Wir definieren $h := r \circ f^{-m} = g^{-m} \circ r$, und zeigen, daß f und g durch h topologisch konjugiert sind.
Erst überprüfen wir, daß h homöomorph ist: das ist der Fall, weil s stetig und zu h invers ist:

$$\begin{aligned} s \circ h &= s \circ r \circ f^{-m} \\ &= f^m \circ f^{-m} \\ &= id_X \\ h \circ s &= g^{-m} \circ r \circ s \\ &= g^{-m} \circ g^m \\ &= id_Y \end{aligned}$$

Daraus folgt $h^{-1} = s$.
Außerdem gilt

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ g \circ h &= s \circ g \circ g^{-m} \circ r \\ &= s \circ g^{-m} \circ g \circ r \\ &= \underbrace{s}_{h^{-1}} \circ \underbrace{g^{-m} \circ r}_{h} \circ f \\ &= f. \end{aligned}$$

f und g sind also durch h topologisch konjugiert.
Nehmen wir nun an, daß f und g durch einen Homöomorphismus $h : X \to Y$ topologisch konjugiert sind, und sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir zeigen daß folgende

Abbildungen r und s eine shiftäquivalenz mit Zeitverschiebung m liefern.
Als erstes zeigen wir, daß aus $h \circ f = g \circ h$ für $m \geqslant 1$ folgt:

$$\begin{aligned} h \circ f^m &= h \circ (h^{-1} \circ g \circ h)^m \\ &= h \circ h^{-1} \circ g^m \circ h \\ &= g^m \circ h. \end{aligned}$$

Diese Formel stimmt auch für $m = 0$. Dann definieren wir $r := h \circ f^m = g^m \circ h$ und $s = h^{-1}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} g \circ r &= g \circ h \circ f^m \\ &= h \circ f \circ f^m \\ &= h \circ f^m \circ f \\ &= r \circ f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ s &= f \circ h^{-1} \\ &= h^{-1} \circ g \\ &= s \circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \circ s &= g^m \circ h \circ h^{-1} \\ &= g^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s \circ r &= h^{-1} \circ h \circ f^m \\ &= f^m \end{aligned}$$

und daher sind f und g shiftäquivalent mit Zeitverschiebung m für alle $m \in \mathbb{N}$.
$\square$

Im Rest dieses Abschnitts wird bewiesen, daß man aus zwei Filtrationspaaren zwei induzierte Abbildungen bekommt, die shiftäquivalent sind.

Theorem 3.4.3 *Seien (N, L) und (N', L') Filtrationspaare für eine isolierte, invariante Menge S. Dann sind die induzierten Abbildungen $f_{(N,L)}$ und $f_{(N',L')}$ (auf den entsprechenden Quotientenräumen definiert) shiftäquivalent.*

Da der Beweis sehr technisch ist, wollen wir mit folgender Graphik seine Struktur erläutern. Wir gehen von zwei verschiedenen Filtrationspaaren (N, L) und (N', L') aus. Dann werden aus diesen andere Filtrationspaare konstruiert, deren Namen in der Graphik eingetragen ist. Die Pfeilen der Graphik stellen Shiftäquivalenzen zwischen den dazugehörigen induzierten Abbildungen dar. Über jedem

Pfeil steht, mit welchem Lemma die Shiftäquivalenz bewiesen wird.

$$\begin{tikzcd}
(N,L) \arrow[ddr, leftrightarrow, "\text{Lemma 3.4.4}"'] & & (B,B_0) \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{Lemma 3.4.4}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{Lemma 3.4.4}"] & & (N',L') \arrow[ddl, leftrightarrow, "\text{Lemma 3.4.4}"] \\
& (B\cup K,K) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Lemma 3.4.5}"] & & (B\cup K',K') \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Lemma 3.4.5}"'] & \\
& (N,K) & & (N',K') &
\end{tikzcd}$$

Diese Graphik ist symmetrisch. Die Argumente, die man verwendet, um die Shiftäquivalenz zwischen $f_{(B,B_0)}$ und $f_{(N,L)}$ zu beweisen, sind genau die gleichen wie für die Shiftäquivalenz zwischen $f_{(B,B_0)}$ und $f_{(N',L')}$. Deswegen wird nur "eine Seite" beweisen, da die andere dazu analog ist. Als erstes beweisen wir die nötigen Lemmata. Im Vergleich zu [Fr&Ri] haben diese Lemmata weniger Voraussetzungen: bei beiden wurde $f(L) \subseteq int(L)$ gefordert. Dies schien uns nicht nur überflüssig, sondern die Filtrationspaare, die im Beweis von Satz 3.4.3 auftauchen, erfüllen diese strenge Voraussetzung nicht.

Lemma 3.4.4 *Seien (N, L') und $(N \cup L, L)$ Filtrationspaare für eine isolierte, invariante Menge S (siehe Abb. 3.8). Außerdem gelte $L' \subseteq L$.*
Dann sind die induzierten Abbildungen $f_{(N,L')}$ und $f_{(N\cup L,L)}$ (auf den entsprechenden Quotientenräumen definiert) shiftäquivalent.

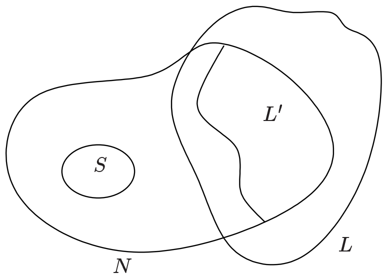

Abbildung 3.8: Zwei Filtrationspaare, die die Voraussetzungen von Lemma 3.4.4 erfüllen.

Beweis. Sei $Q := N \cup L$. Wir bezeichnen mit $*_1$ den universellen Punkt zur Konstruktion des punktierten Raumes N/L' und mit $*_2$ den universellen Punkt zur Konstruktion des punktierten Raumes Q/L. Seien $p_1 : N \to N/L'$, $p_2 : Q \to Q/L$ die Quotientabbildungen.
Dann definieren wir $r : N/L' \to Q/L$ durch

- $r(p_1(*_1)) = p_2(*_2)$,
- $r(p_1(x)) = p_2(x)$ falls $x \notin L' \cup \{*_1\}$.

Die Abbildung r ist stetig: außerhalb von $p_1(*_1)$ ist sie durch die Identifizierung von $N/L \setminus p_1(*_1)$ eine Hintereinanderausführung von stetigen Abbildungen, also stetig. An der Stelle $p_1(*_1)$ ist sie auch stetig, da eine Folge $(p_1(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in N/L' konvergiert genau dann gegen $p_1(*_1)$, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sich auf L' häuft. Da gilt $L' \subseteq L$, konvergiert $r((p_1(x_n))) = (p_2(x_n))$ gegen $p_2(*_2)$.
Es gilt offensichtlich $f_{(Q,L)} \circ r = r \circ f_{(N,L')}$.
Wir werden als nächstes zeigen, daß es eine obere Schranke für die Zeit k gibt, die die Vorwärtstrajektorie eines Punktes aus $N \cap L$ braucht, um in L' zu kommen. Sei $x \in N \cap L$. Wenn die Vorwärtstrajektorie von x immer in N bleiben würde, würde sie sich nach dem Lemma 1.2.11 auf $S \subseteq int(N)$ häufen. Dies kann aber nicht sein, da $(N \cup L, L)$ ein Filtrationspaar ist: diese Trajektorie kann nicht in $N \setminus L$ zurückkommen, ohne $N \cup L \supseteq N$ zu verlassen. Es gibt also ein $q(x) \in \mathbb{N}$, so daß $f^{q(x)}(x) \notin N$. Es gibt eine Umgebung U_x von x, so daß $f^{q(x)}(y) \notin N$ für alle $y \in U_x$, weil $f^{q(x)}$ stetig und N^c offen ist. Wir haben also eine offene Überdeckung

$$N \cap L \subseteq \bigcup_{x \in N \cap L} U_x.$$

Davon gibt es eine endliche Teilüberdeckung, da $N \cap L$ kompakt ist:

$$N \cap L \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i}.$$

Sei $k := \max\{q(x_i), i = 1, \ldots, r\}$. Da L die Exitmenge von N enthält, gibt es zu jedem $x \in N \cap L$ ein $k(x) \leqslant k$, so daß $f^{k(x)}(x) \in L'$.
Wir definieren $s : Q/L \to N/L'$ wie folgt:

- $s(p_2(*_2)) = p_1(*_1)$,
- $s(p_2(x)) = f^k_{(N,L')}(p_1(x))$ falls $x \notin L$.

Es ist offensichtlich, daß $f_{(N,L')} \circ s = s \circ f_{(Q,L)}$ gilt und daß s auf $Q/L \setminus \{p_2(*_2)\}$ stetig ist. Für die Stetigkeit an der Stelle $p_2(*_2)$ machen wir folgende Überlegung: Sei $(p_2(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $p_2(*_2)$ konvergierende Folge, das heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ häuft sich gegen L, oBdA konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selber gegen $x \in L$. Es gibt nach Konstruktion von k ein $q(x) \leqslant k$, so daß $f^{q(x)}(x) \notin N$ gilt. Da f stetig und N^c offen ist, gilt auch $f^{q(x)}(x_n) \notin N$ so bald n groß genug ist. Es gibt demnach zu jedem genügend großem n ein $\kappa(n) \leqslant q(x) \leqslant k$, so daß $f^{\kappa(n)}(x_n) \in L'$. Es gilt also $f^{k(x_n)}_{(N,L')}(p_2(x_n)) = p_1(*)$, sobald n groß genug ist. Dies beweist die Stetigkeit von s an der Stelle $p_2(*)$.
Nun zur Zeitverschiebung: es ist noch zu zeigen, daß gilt $r \circ s = f^m_{(N,L')}$ und $s \circ r = f^m_{(N,L)}$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Für alle $p_1(x) \in N/L'$ gilt:

$$\begin{aligned} s \circ r(p_1(x)) &= \begin{cases} p_1(*) & \text{falls } p_2(x) = p_2(*) \\ s(p_2(x)) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_1(*) & \text{falls } x \in L \text{ oder } x \in L' \\ f^k_{(N,L')}(p_1(x)) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= f^k_{(N,L')}(p_1(x)) \end{aligned}$$

Die letzte Gleuchung gilt, da $L' \subseteq L$ und alle Trajektorie durch Punkte aus $N \cap L$ spätestens beim Zeitpunkt k in L' kommen.
Für alle $p_2(x) \in N/L$ gilt:

$$\begin{aligned} r \circ s(p_2(x)) &= \begin{cases} p_2(*_2) & \text{falls } p_2(x) = p_2(*_2) \\ r(f^k_{(N,L')}(p_1(x))) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_2(*_2) & \text{falls } p_2(x) = p_2(*_2) \text{ oder } \exists q \in \{0, \dots, k\} : f^q(x) \in L' \\ p_2(f^k(x)) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_2(*_2) & \text{falls } \begin{cases} x \in L, \\ \exists q \in \{0, \dots, k\} : f^q(x) \in L' \text{ oder} \\ f^k(x) \in L. \end{cases} \\ p_2(f^k(x)) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Für alle $x \in N$ gilt $r \circ s(p_2(x)) = p_2(*_2)$ genau dann, wenn

$$\begin{cases} x \in L, \\ \exists q \in \{0, \dots, k\} : f^q(x) \in L' \text{ oder} \\ f^k(x) \in L. \end{cases}$$

und $f^k_{(N,L)}(p_2(x)) = p_2(*_2)$ genau dann, wenn es ein $l \in \{0, \dots, k\}$ mit $f^l(x) \in L$ gibt. Die Gleichung $r \circ s = f^k_{(N,L)}$ ist durch folgende Äquivalenz gezeigt:

$$\begin{cases} x \in L, \\ \exists q \in \{0, \dots, k\} : f^q(x) \in L' \text{ oder} \\ f^k(x) \in L. \end{cases} \Leftrightarrow \exists l \in \{0, \dots, k\} : f^l(x) \in L$$

Die Implikation "$\Rightarrow$" ist trivial, da $L' \subseteq L$.
Für die Implikation "$\Leftarrow$": Wenn $l = 0$ oder $l = k$ ist es klar. Sonst gibt es ein $l \in \{1, \dots, k-1\}$, so daß $f^l(x)$ in L liegt. Da $(N \cup L, L)$ ein Filtrationspaar ist, kann die Vorwärtstrajektorie durch $f^l(x)$ nicht in die Menge $N \setminus L$ zurückkehren, ohne $N \cup L$ vorher zu verlassen. Anders ausgedrückt gilt $f^p(x) \in L$ oder

$f^p(x) \notin N \cup L$ für alle $p \geqslant l$. Insbesondere für $p = k$: es gilt $f^k(x) \in L$ oder $f^k(x) \notin N$. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten muß es ein $l' \leqslant k$ geben, so daß $f^{l'}(x) \in L'$, da L' die Exitmenge von N enthält.
Wir haben insgesamt bewiesen, daß unter unseren Vorausetzungen $f_{(N,L)}$ und $f_{(N,L')}$ shiftäquivalent sind. $\square$

Lemma 3.4.5 *Seien (N, L) und (N', L) Filtrationspaare für eine isolierte, invariante Menge S, wobei $N \setminus L \subseteq N' \setminus L$ gelte (siehe Abb. 3.9).*
Dann sind die induzierten Abbildungen $f_{(N',L)}$ und $f_{(N,L)}$ (auf den entsprechenden Quotientenräumen definiert) shiftäquivalent.

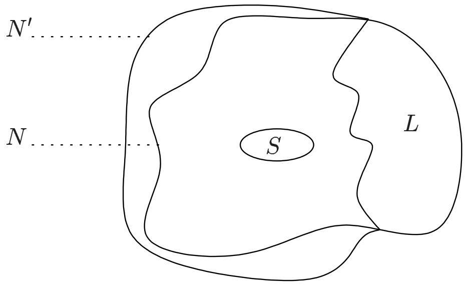

Abbildung 3.9: Zwei Filtrationspaare, die die Voraussetzungen von Lemma 3.4.5 erfüllen.

Beweis. Seien $*_1$ und $*_2$ die universellen Punkte zur Konstruktion der punktierten Räume N/L und N'/L, $p_1 : N \to N/L$ und $p_2 : N' \to N'/L$ die Quotientenabbildungen. Wir identifizieren $N/L \setminus \{p_1(*_1)\}$ mit $N \setminus L$ und $N'/L \setminus \{p_2(*_2)\}$ mit $N' \setminus L$.
Die folgende Abbildung $r : N/L \to N'/L$ ist stetig (nach einem ähnlichen Argument wie vorhin) und erfüllt $f_{(N',L)} \circ r = r \circ f_{(N,L)}$:

- $r(p_1(*_1)) = p_2(*_2)$,
- $r(p_1(x)) = p_2(x)$ für $x \notin L$.

Behauptung: Für jedes $x \in N'$ gibt es ein $k(x) \in \mathbb{N}$, so daß $f^{k(x)}(x) \in N$. Die Menge $N' \setminus N$ besteht aus Punkten, deren Vorwärtstrajektorie N' verlassen wird, und aus Punkten, deren Vorwärtstrajektorie in N' bleiben wird:

- Die ersten müssen durch die Exitmenge $N'^{-} \subseteq L \subseteq N$ durch.
- Die anderen häufen sich auf $S \subseteq int(N)$ nach Lemma 1.2.11.

Im ersten Fall: sei $x \in N'$, so daß es ein $q(x) \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^{q(x)}(x) \notin N'$. Die Abbildung f ist stetig und N'^c offen, so daß es zu jedem solchen x eine Umgebung U_x gibt mit $f^{q(x)}(y) \notin N'$ für alle $y \in U_x$. Da L die Exitmenge von N' enthält, gibt es zu jedem $y \in U_x$ ein $q < q(x)$, so daß $f^q(y) \in L \subseteq N$ gilt.
Im zweiten Fall: alle Häufungspunkte einer Trajektorie, die in N' bleibt, liegen nach Lemma 1.2.11 in $S \subseteq int(N)$, also findet man zu jedem $x \in N'$ mit der Eigenschaft, daß $f^q(x) \in N'$ für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt, ein $q'(x)$, so daß $f^{q'(x)}(x) \in int(N)$. Wieder wegen der Stetigkeit von f und der Offenheit von $int(N)$ gibt es zu jedem solchen x eine Umgebung U'_x, so daß $f^{q'(x)}(y) \in int(N)$ für alle $y \in U'_x$ gilt.
Nun haben wir eine offene Überdeckung von N' konstruiert:

$$N' \subseteq \Big(\bigcup_{x \in N' \text{ 1. Fall}} U_x \Big) \cup \Big(\bigcup_{x \in N' \text{ 2. Fall}} U'_x \Big).$$

Davon gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$N' \subseteq \Big(\bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i} \Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{r'} U'_{\xi_j} \Big),$$

wobei die x_i, $i = 1, \ldots, r$, sich im ersten Fall und die ξ_j, $j = 1, \ldots, r'$, sich im zweiten Fall befinden.
Nun definieren wir $n := \max\{q(x_1), \ldots, q(x_r), q'(\xi_1), \ldots, q'(\xi_{r'})\}$. Nach der vorigen Betrachtungen wissen wir, daß es zu jedem $x \in N'$ einen Zeitpunkt kleiner als n gibt, bei dem sich die Vorwärtstrajektorie sich in N befindet. Sei $k(x) := \min\{k \leqslant n : f^k(x) \in N\}$ für jedes $x \in N'$ definiert. Nun haben wir alle nötige Zutaten, um $s : N'/L \to N/L$ zu definieren. Für alle $x \in N'$:

$$s(p_2(x)) = \begin{cases} p_1(*) & \text{falls } p_2(x) = p_2(*) \\ f_{(N,L)}^{n-k(x)}(p_1(f^{k(x)}(x))) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir überprüfen als erstes die Stetigkeit von s. Sei $x \in N'$.
Erster Fall: $f^{k(x)}(x) \in N^-$. Daraus folgt $s(p_2(x)) = p_2(*)$, weil $N^- \subseteq L$. Da L nach Voraussetzung eine Umgebung von N^- in N ist, gilt in einer Umgebung V_x von x, $f^{k(x)}(y) \in L$ oder $f^{k(x)}(y) \notin N$ für alle $y \in V_x$. Auf jeden Fall gilt $s(p_2(y)) = p_2(*)$ für alle $y \in V_x$. Also ist s stetig an der Stelle $p_2(x)$.
Zweiter Fall: $f^{k(x)}(x) \in N \setminus N^-$. Daraus folgt $f^{k(x)+1}(x) \in int(N)$. Aus der Stetigkeit von f folgt die Existenz einer Umgebung V'_x von x mit $f^{k(x)+1}(y) \in int(N)$ für alle $y \in V'_x$. Insbesondere $k(y) \leqslant k(x) + 1$ für alle $y \in V'_x$. Wenn $k(x) = 0$, ist offensichtlich $k(y) = 0$ oder $k(y) = 1$. Sonst ist $k(x) \geqslant 1$ und nach Definition von $k(x)$ gilt $f^p(x) \notin N$ für alle $p \in \{0, \ldots, k(x) - 1\}$. Wenn man die Umgebung V'_x genügend klein wählt, gilt auch $f^p(y) \notin N$ für alle $p \in \{0, \ldots, k(x) - 1\}$ und alle $y \in V'_x$. Die Vorwärtstrajektorie durch y kommt

nicht vor der Zeit $k(x)$ in N, und $k(y)$ ist der erste Zeitpunkt, bei dem sich die Vorwärtstrajektorie durch y in N befindet, also gilt die Ungleichung $k(y) \geqslant k(x)$. Insgesamt gilt

$$k(y) = k(x) \text{ oder } k(y) = k(x) + 1 \text{ für alle } y \in V'_x.$$

Wir sind in dem Fall, bei dem $f^{k(x)}(x) \in N \setminus N^-$ gilt. Deswegen gilt $s(p_2(x)) = f_{(N,L)}^{n-k(x)}(p_1(f^{k(x)}(x))) = f_{(N,L)}^{n-(k(x)+1)}(p_1(f^{k(x)+1}(x)))$, da $f^{k(x)+1}(x)$ in $int(N)$ liegt. Es gilt für alle $y \in V'_x$

$$\begin{aligned} s(p_2(y)) &= f_{(N,L)}^{n-k(y)}(p_1(f^{k(y)}(y))) \\ &= \begin{cases} f_{(N,L)}^{n-k(x)}(p_1(f^{k(x)}(y))) \text{ oder} \\ f_{(N,L)}^{n-(k(x)+1)}(p_1(f^{k(x)+1}(y))). \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildungen $f_{(N,L)}$, p_1, f ist s stetig. Schließlich gilt noch für alle $x \in N'$ folgendes:

$$\begin{aligned} r \circ s(p_2(x)) &= \begin{cases} p_2(*_2) & \text{für } p_2(x) = p_2(*_2) \\ r(f_{(N,L)}^{n-k(x)}(p_1(f^{k(x)}(x)))) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_2(*_2) & \text{falls } \begin{cases} x \in L \text{ oder} \\ \exists l \in \{k(x), \ldots, n\} : f^l(x) \in L \end{cases} \\ r(p_1(f^n(x))) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_2(*_2) & \text{falls } \begin{cases} x \in L \text{ oder} \\ \exists l \in \{k(x), \ldots, n\} : f^l(x) \in L \end{cases} \\ p_2(f^n(x)) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß $r \circ s = f_{(N',L)}^n$. Dazu müssen wir folgende Äquivalenz zeigen:

$$\begin{cases} x \in L \text{ oder} \\ \exists l \in \{k(x), \ldots, n\} : f^l(x) \in L \end{cases} \Leftrightarrow \exists l \in \{0, \ldots, n\} : f^l(x) \in L$$

Die Implikation "$\Rightarrow$" ist klar. Die Implikation "$\Leftarrow$" auch: da $L \subset N$ ist $k(x) \leqslant l$. Also insgesamt $r \circ s = f_{(N',L)}^n$.
Die Gleichung $s \circ r = f_{(N,L)}^n$ ist offensichtlich, da

$$k(x) = \min\{k \in \mathbb{N} : f^k(x) \in N\} = 0$$

für alle $x \in N$. $\square$

Beweis. von Theorem 3.4.3.
Ein Filtrationspaar (B, B_0) wird mit Hilfe von ε–Ketten konstruiert:
Nach dem Lemma 3.1.8 existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$C_\varepsilon(N \setminus L, S) = C_\varepsilon(N, S) \subseteq int(N \setminus L) \cap int(N' \setminus L').$$

Nach Satz 3.1.5 und seinem Beweis wissen wir, daß die Menge

$$B := cl(C_\varepsilon(N \setminus L, S))$$

ein isolierender Block für S ist. Wenn B_0 eine genügend kleine Umgebung von B^- ist, dann ist (B, B_0) ein Filtrationspaar für S. Wir müssen einige Vorbereitungen treffen, damit wir B_0 geschickt wählen können. Dann werden zeigen, daß $f_{(B,B_0)}$ und $f_{(N,L)}$ shiftäquivalent sind. Genauso würde man zeigen, daß $f_{(B,B_0)}$ und $f_{(N',L')}$ shiftäquivalent sind.
Wir wollen als erstes rechtfertigen, daß die Vorwärtstrajektorie eines Punktes aus B^- die Menge N verlassen muß:
Nach Lemma 3.1.7 gilt $int(B) = C_\varepsilon(N \setminus L, S)$ und ein Punkt x liegt in B^- genau dann, wenn es keine ε–Kette in $N \setminus L$ durch $f(x)$ von S zu S gibt. Die Anahme, daß die Vorwärtstrajektorie durch x die Menge N nicht verläßt führt zu einem Widerspruch. Diesen werden wir so herleiten, daß wir doch eine ε–Kette in $N \setminus L$ durch $f(x)$ von S zu S konstruieren. Dabei verwenden wir die gleiche Beweisidee, wie im Beweis vom Satz 3.1.5.
Sei $x \in B^-$. Angenommen $f^k(x) \in N$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 1.2.11 liegt die ω–Limesmenge von x in $S \subseteq int(B)$. Man kann also ein $q \in \mathbb{N}$ finden. so daß $f^q(x)$ in $int(B) = C_\varepsilon(N \setminus L, S)$ liegt. Durch dieses $f^q(x)$ geht eine ε–Kette $(\chi_n)_{-p \leqslant n \leqslant p}$ in $N \setminus L$ von S zu S.
Da $x \in B^- \subseteq B$ liegt, gibt es in jeder seiner Umgebungen Punkte aus $int(B) = C_\varepsilon(N \setminus L, S)$. Die gleichmässige Stetigkeit von f auf dem Kompaktum N liefert zu unserem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß gilt: $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$, sobald $a, b \in N$ und $d(a, b) < \delta$. Wir finden also ein $\xi_0 \in int(B)$, so daß $d(x, \xi_0) < \max\{\delta, \varepsilon\}$. Durch ξ_0 läuft eine ε–Kette $(\xi_n)_{-m \leqslant n \leqslant m}$ in $N \setminus L$ von S zu S.
Die Vorwärtstrajektorie durch x kann L im Zeitraum $\{0, \ldots q\}$ nicht betreten: wäre es der Fall, könnte $f^q(x)$ nicht in $int(B) \subseteq N \setminus L$ sein, ohne daß die Vorwärtstrajektorie vorher N verläßt – (N, L) ist ein Filtrationspaar – und das ist nach Vorausetzung ausgeschlossen .
Nun können wir eine ε–Kette durch $f(x)$ in $N \setminus L$ von S zu S konstruieren:

- Wir folgen der ε–Kette $\{\xi_n\}_{-p \leqslant n \leqslant p}$ von $\xi_{-p} \in S$ bis ξ_0.
- Dann springen wir zu $f(x), f^2(x), \ldots, f^q(x)$.
- Weiter folgen wir der ε–Kette $\{\chi_n\}_{-m \leqslant n \leqslant m}$ von $\chi_0 = f^q(x)$ bis $\chi_m \in S$.
- Nun müssen wir noch am Anfang oder am Ende verlängern, je nachdem ob p oder m größer ist. Dies ist aber kein Problem, da $\xi_{-p} \in S$, $\chi_m \in S$ und S invariant unter F ist: man kann durch die Trajektorie verlängern.

Dies liefert wirklich eine ε–Kette: Bei dem Sprung von ξ_0 zu $f(x)$ haben wir wegen der Wahl von ξ_0 die Ungleichung $d(f(\xi_0), f(x)) < \varepsilon$ und sonst sind die entsprechenden Ungleichungen trivialerweise erfüllt.
Die Existenz dieser ε–Kette durch $f(x)$ in $N \setminus L$ von S zu S widerspricht $x \in B^-$.
Es gibt also ein $k(x) \in \mathbb{N}$, so daß $f^{k(x)}(x) \notin N$. Da N^c offen ist, gilt auch in einer offenen Umgebung U_x von x: $f^{k(x)}(y) \notin N$ für alle $y \in U_x$. Die Menge B^- ist kompakt und von $\bigcup_{x \in B^-} U_x$ überdeckt, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung und wir finden ein $k \in \mathbb{N}$, so daß es für alle $x \in B^-$ ein $k(x) \leqslant k$ gibt, mit $f^{k(x)}(x) \in N^-$. Es gilt

$$B^- \subseteq \bigcup_{q=0}^{k} f^{-q}(N^-).$$

Die Menge L ist eine Umgebung von N^-, also ist es möglich B_0, eine kompakte Umgebung von B^- in N, so klein zu wählen, daß auch die Inklusion

$$B_0 \subseteq \bigcup_{q=0}^{k} f^{-q}(L)$$

gilt. Die Vorwärtstrajektorien von Punkten aus B_0 kommen spätestens zum Zeitpunkt k in L.
Wir definieren nun

$$K := \bigcup_{q=0}^{k} f^{-q}(L) \cap N.$$

Da $B_0 \subseteq N$, gilt $B_0 \subseteq K$.
Wir zeigen, daß (N, K) und $(B \cup K, K)$ weitere Filtrationspaare für S bilden,

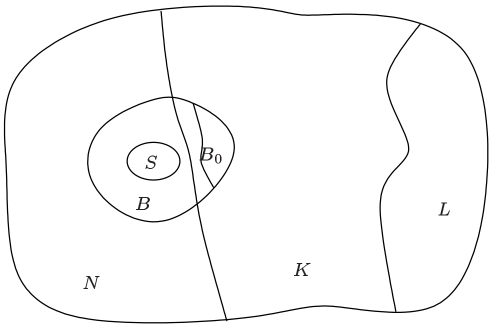

Abbildung 3.10: Die verschiedene Filtrationspaare für S.

und werden später auf sie die Lemmata 3.4.4 und 3.4.5 anwenden.
Wir fangen mit (N, K) an: N und K sind beide Abschluß ihrer Inneren und kompakt, N nach Voraussetzung und K weil L kompakt und f, f^{-1} stetig sind.

Die Menge $cl(N \setminus K)$ isoliert S: Nach Lemma 1.2.9 reicht es, zu zeigen, daß $S \subset int(cl(N \setminus K))$, da die kompakte Menge $cl(N \setminus K)$ in der isolierenden Umgebung $cl(N \setminus L)$ von S enthalten ist. Außerdem gilt $S \cap K = \emptyset$: wenn x in K liegt, gibt es ein $k(x)$, so daß $f^{k(x)}(x) \in L$ gilt, also $x \notin Inv(cl(N \setminus L) = S$. Es gilt also $S \subset int(N \setminus K)$, und damit ist nach Lemma 1.2.9 $cl(N \setminus K)$ eine isolierende Umgebung für S.
K ist eine kompakte Umgebung von N^- in N, da $L \subseteq K$ und L nach Voraussetzung eine Umgebung von N^- in N ist.
Nun zeigen wir $f(K) \cap cl(N \setminus K) = \emptyset$. Nach Definition von K, gilt $f(K) = \bigcup_{q=0}^{k-1} f^{-q}(L) \cap f(N)$. Anders ausgedrückt liegt x genau dann in $f(K)$, wenn $x \in f(N)$ und es gibt ein $q \in \{0, \dots k-1\}$ mit $f^q(x) \in L$. Wir nehmen an, daß $f(K) \cap cl(N \setminus K)$ nicht leer ist. Sei x in $f(K) \cap cl(N \setminus K)$ und $q \in \{0, \dots k-1\}$ mit $f^q(x) \in L$. Nach Vorausetzung ist (N, L) ein Filtrationspaar, also gilt $f(L) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$. Es gilt $f^{q+1}(x) \in f(L)$, also $f^{q+1}(x) \notin cl(N \setminus L)$. Nach Stetigkeit von f wird eine Umgebung von x außerhalb von $cl(N \setminus L)$ abgebildet. Diese Umgebung enthält aber Element aus $N \setminus K$, da wir $x \in cl(N \setminus K)$ gewählt hatten. Es gibt also ein Element y aus $N \setminus K$ und ein $q + 1 \in \{0, \dots k\}$ mit $f^{q+1}(y) \notin cl(N \setminus L)$. Insbesondere existiert ein l, $0 \leqslant l \leqslant q + 1 \leqslant k$, so daß $f^l(y) \in L$. Dies widerspricht aber $y \in N \setminus K$. Also $f(K) \cap cl(N \setminus K) = \emptyset$.
Das Paar (N, K) besitzt also die drei Eigenschaften, die aus ihm ein Filtrationspaar machen.
Nun zu $(B \cup K, K)$: $B \cup K$ und K sind beide Abschluß ihrer Inneren und kompakt, weil B und L kompakt und f, f^{-1} stetig sind.
Nach Lemma 1.2.9 reicht für die erste Bedingung eines Filtrationspaares, zu zeigen, daß $S \subset int((B \cup K) \setminus K) = int(cl(B \setminus K))$, da die kompakte Menge $cl(B \setminus K)$ in der isolierenden Umgebung $cl(N \setminus L)$ enthalten ist. Wir haben B so konstruiert, daß $S \subseteq int(B)$. Außerdem gilt $S \cap K = \emptyset$ – das haben wir gerade für das Filtrationspaar (N, K) bewiesen. Daraus folgt die Behauptung $S \subset int(cl(B \setminus K))$, und schließlich ist $cl(B \setminus K)$ eine isolierende Umgebung für S.
Die zweite Bedingung, die ein Filtrationspaar erfüllen muß, ist die "Exit–set" Eigenschaft: K muß eine kompakte Umgebung von $(B \cup K)^-$ in $B \cup K$ sein. Dazu überlegen wir zuerst, was $(B \cup K)^-$ ist:

$$\begin{aligned} x \in (B \cup K)^- \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \notin int(B \cup K) \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) \notin int(B) \cup int(K) \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) \notin int(B) \text{ und } f(x) \notin int(K) \\ &\Rightarrow \quad x \in B^- \end{aligned}$$

Da B_0 eine Umgebung von B^- in N ist und $B_0 \subseteq K$ gilt, ist K eine kompakte Umgebung von $(B \cup K)^-$ in $B \cup K$.
Als nächstes muß man die Vorwärtsinvarianz von K zeigen, das heißt

$f(K) \cap cl(B \setminus K) = \emptyset$. Es gilt folgendes:

$$\begin{array}{rc} & B \subseteq N \\ \Rightarrow & B \cap K^c \subseteq N \cap K^c \\ \Rightarrow & cl(B \setminus K) \subseteq cl(N \setminus K) \\ \Rightarrow & f(K) \cap cl(B \setminus K) \subseteq f(K) \cap cl(N \setminus K) \end{array}$$

Wir hatten schon vorhin $f(K) \cap cl(N \setminus K) = \emptyset$ gezeigt, also gilt auch $f(K) \cap cl(B \setminus K) = \emptyset$.
Wir haben also nachgewiesen, daß $(B \cup K, K)$ ein Filtrationspaar für S ist.
Nun wollen wir Lemma 3.4.4 auf den Filtrationspaaren (B, B_0) und $(B \cup K, K)$ anwenden. Dafür muß die Voraussetzung $B_0 \subseteq K$ erfüllt sein. Diese Tatsache hatten wir gleich nach der Konstruktion von K schon gemerkt. Es gilt also, daß $f_{(B,B_0)}$ und $f_{(B \cup K,K)}$ shiftäquivalent sind.
Als nächstes wird Lemma 3.4.5 auf die Filtrationspaare $(B \cup K, K)$ und (N, K) angewendet. Die Vorausetzung $B \setminus K \subseteq N \setminus K$ ist erfüllt, also sind $f_{(B \cup K,K)}$ und $f_{(N,K)}$ shiftäquivalent.
Nun der letzte Schritt: Die Inklusion $L \subseteq K$ gilt nach Konstrukion von K. Außerdem gilt $K \subseteq N$, also auch $N \cup K = N$. Damit sind nach Lemma 3.4.4 die Abbildungen $f_{(N,K)}$ und $f_{(N,L)}$ shiftäquivalent.
Insgesamt sind $f_{(B,B_0)}$ und $f_{(N,L)}$ shiftäquivalent. Ganz analog zeigt man die Shiftäquivalenz von $f_{(B,B_0)}$ und $f_{(N',L')}$. Daraus folgt, daß $f_{(N,L)}$ und $f_{(N',L')}$ shiftäquivalent sind. □

3.5 Der diskrete Index

Wir haben im vorherigen Abschnitt gesehen, daß die Shiftäquivalenzklasse der induzierten Abbildung nicht von der Wahl des Filtrationspaares abhängt. Wenn wir jetzt den Conley–Index als diese Shiftäquivalenzklasse definieren würden, hätten wir eine zu restriktive Definition. Um ein Analogon zum kontinuierlichen Conley–Index zu erreichen, muß man auch noch die ganze Homotopieklasse dieser Abbildung betrachten.

Definition 3.5.1 *Seien X und Y punktierte Räume, $[f] : X \to X$ und $[g] : Y \to Y$ Homotopieklassen basispunkterhaltender Abbildungen.*
Diese heißen shiftäquivalent, wenn es Homotopieklassen $[r] : X \to Y$ und $[s] : Y \to X$ gibt mit $[g \circ r] = [r \circ f]$, $[s \circ g] = [f \circ s]$, $[r \circ s] = [g^m]$ und $[s \circ r] = [f^m]$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.5.2 *Seien die basispunkterhaltenden Abbildungen $f : X \to X$ und $g : Y \to Y$ shiftäquivalent sind, dann sind auch ihre Homotopieklassen $[f]$ und $[g]$ shiftäquivalent.*

BEWEIS. Es existiert $r : X \to Y$ und $s : Y \to X$ wie in Definition 3.4.1. Seien nun $\tilde{f} \in [f]$ und $\tilde{g} \in [g]$. Wir bezeichnen mit $\sim$ die Homotopie zwischen Abbildungen. Es folgt aus $f \sim \tilde{f}$ wegen Lemma 2.3.6 $r \circ f \sim r \circ \tilde{f}$. Mit dem gleichen Argument gilt $r \circ f \sim r \circ \tilde{f} \sim r_1 \circ \tilde{f}$ und $g \circ r \sim \tilde{g} \circ r \sim \tilde{g} \circ r_2$ für alle $r_1, r_2 \in [r]$. Da aber $r \circ f = g \circ r$, gilt $r_1 \circ \tilde{f} \sim \tilde{g} \circ r_2$ für alle $\tilde{f} \in [f]$, $\tilde{g} \in [g]$, $r_1, r_2 \in [r]$, das heißt $[g \circ r] = [r \circ f]$. Die andere Gleichungen beweist man genauso und erhält, daß $[f]$ und $[g]$ shiftäquivalent sind. □

Definition 3.5.3 *Sei $S \subseteq X$ eine isolierte, invariante Menge , und (N, L) ein Filtrationspaar für S. Wir definieren $h_{(N,L)}(S)$ als die Homotopieklasse der basispunkterhaltenden Abbildung $f_{(N,L)} : N/L \to N/L$.*
Dann ist der Conley–Index von S, $h(S)$ die Shiftäquivalenzklasse von $h_{(N,L)}(S)$.

Der Satz 3.4.3 und die Bemerkung 3.5.2 garantieren, daß der Conley–Index wohl definiert ist und nicht von der Wahl des Filtrationspaar abhängt.
Auf dem Conley–Index kann man verschiedene Funktoren anwenden, um andere Invarianten einer isolierten, invarianten Menge zu bekommen. Das wird oft bei Beispielen gemacht, da die hier gegebene Definition recht abstrakt ist und nur eine Äquivalenzklasse von Abbildungen liefert, die etwas unhandlich ist. Dazu werden der Homologie–Conley–Index oder Kohomologie–Conley–Index eingeführt. In den Beispielen dazu werden Homologie–Conley–Indizes ausrechnen, das Folgen von Matrizen.

Beispiel 3.5.4 *Wir rechnen jetzt den Homologie–Conley–Index für unser Beispiel 3.1.3. Die Abbildung 3.7 veranschaulicht die induzierte Abbildung $f_{(N,L)}$ auf dem Quotientenraum $N/L = \Sigma^1 \vee \Sigma^1$. Wir wenden auf die Abbildung $f_{(N,L)} : N/L \to N/L$ den Homologiefunktor mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ an. Die Homologiegruppen sind in diesem Fall $\mathbb{Q}$–Vektorräume. Aus der algebraischen Topologie wissen wir, daß*

$$H_i(N/L) = \begin{cases} \mathbb{Q}^2 & \textit{für } i = 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Trivialerweise ist für $i \geqslant 2$ die Homologiegruppe $H_i(N/L) = 0$ und für $i = 1$ ist $\{[\alpha], [\beta]\}$ eine Basis von $H_1(N/L)$, wobei $\alpha : [0, 1] \to N/L$ einen geschlossenen Weg um die eine Σ^1 bezeichnet, $\beta : [0, 1] \to N/L$ einen geschlossenen Weg um die andere und $[.]$ Homologieklassen bezeichnen. Nun kommen wir zu der in Homologie induzierten Abbildung $f_{(N,L)\,*} : H_*(N/l) \to H_*(N/L)$. Diese hängt wegen der Homotopieinvarianz des Homologiefunktors nicht vom Repräsentanten der Homotopieklasse von $f_{(N,L)}$ ab. Es gilt für die in erster Homologie induzierte Abbildung

$$f_{(N,L)_1}([\alpha]) = [f_{(N,L)} \circ \alpha] = [\beta],$$

$$f_{(N,L)_1}([\beta]) = [f_{(N,L)} \circ \beta] = [\alpha].$$

Die Matrix von $f_{(N,L)_1}$ in der Basis $\{[\alpha],[\beta]\}$ ist also $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Der homologische Conley–Index von $\{-1,1\}$ ist also die in Homologie induzierte $f_{(N,L)_*}$, wobei $f_{(N,L)_i} = 0$ für $i \neq 1$ und $f_{(N,L)_1}$ wie oben.

Jetzt wollen wir ein paar wichtige Eigenschaften des diskretem Conley–Indizes zitieren. Die beiden folgenden Resultate sind aus [Fr&Ri]. Das erste der beiden wird in der Literatur auch "Kontinuationsprinzip" genannt.

Satz 3.5.5 *Sei $f : X \times [0,1] \to X$ eine stetige Homotopie, $f_\lambda := f(.,\lambda)$ und N eine isolierende Umgebung bezüglich f_0 für $S_0 = Inv(N, f_0)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß N eine isolierende Umgebung für alle f_λ, $\lambda < \varepsilon$, ist. Außerdem $h(S_0, f_0) = h(S_\lambda, f_\lambda)$, wobei $S_\lambda = Inv(N, f_\lambda)$ und $\lambda < \varepsilon$.*

Satz 3.5.6 *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $f : M \to M$ eine stetige Abbildung. Für jede isolierte, invariante Menge S mit isolierender Umgebung N gibt es eine Umgebung $U(f)$ in der C_0–Topologie mit der Eigenschaft, daß N für alle $g \in U(f)$ eine isolierende Umgebung bezüglich g ist. Außerdem gilt $h(S,f) = h(S',g)$, wobei $S' = Inv(N, g)$.*

Dieser letzter Satz ist sehr wichtig, da er besagt, daß der Conley–Index sich unter kleinen Störungen des diskreten dynamischen Systems nicht ändert.

3.6 Trivial oder nicht trivial ?

Beispiel 3.6.1 *Der triviale Index:*
Wie wir schon in Kapitel 1 beobachtet haben, ist die leere Menge immer isoliert invariant. Sie liefert einen in diesem Sinne trivialen Conley–Index. Wir wollen nun überlegen, wie der diskrete Conley–Index der leeren Menge aussieht. Diesen nennen wir wiederum den trivialen Conley–Index. Dafür müssen wir bestimmen, welche Abbildungen in der Shiftäquivalenzklasse der induzierten Abbildungen im Fall einer leeren isolierten, invarianten Menge liegen.
Wie im kontinuierlichen Fall ist $(\emptyset,\emptyset)$ ein Filtrationspaar für $\emptyset$. Die induzierte Abbildung auf dem Quotientenraum ist

$$\begin{aligned} f_{(\emptyset,\emptyset)} : \quad \{o(*)\} &\longrightarrow \{o(*)\} \\ o(*) &\longmapsto o(*) \end{aligned}$$

wobei o die Quotientenabbildung ist.
Diese Abbildung ist alleine in ihrer Homotopieklasse, da man keine andere basispunkterhaltende Abbildung $\{o(*)\} \to \{o(*)\}$ finden kann.

Sei jetzt (A,b) ein punktierter Raum mit Basipunkt b, $[g] : (A,b) \to (A,b)$ eine zu $[f_{(\emptyset,\emptyset)}]$ shiftäquivalente Homotopieklasse von Abbildungen, und

$$[r] : (A,b) \to \{o(*)\}$$

$$[s] : \{o(*)\} \to (A,b)$$

Homotopieklassen von Abbildungen, die eine Shiftäquivalenz zwischen $[f_{(\emptyset,\emptyset)}]$ und $[g] : (A,b) \to (A,b)$ liefern. Da $[s]$ basispunkterhaltend ist, ist sie eindeutig bestimmt: es muss $s(o(*)) = b$ für jeden Repräsentanten s gelten. Für die Abbildung $[r]$ hat man auch keine Wahl, da der Bildraum nur aus dem Basispunkt besteht: für alle $a \in A$ und $r \in [r]$ muss $r(a) = o(*)$ gelten. Die Abbildungen r und s sind also auch alleine in ihrer Homotopieklasse. Es gilt auch automatisch für jeden Repräsentanten g aus $[g]$:

$$f_{(\emptyset,\emptyset)} \circ r(a) = r \circ g(a) = o(*) \text{ für alle } a \in A,$$

$$g \circ s(o(*)) = s \circ f_{(\emptyset,\emptyset)}(o(*)) = b \text{ und}$$

$$r \circ s = f = f^m \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Dann ist es notwendig, daß für ein $m \in \mathbb{N}$, alle $a \in A$ und alle $g \in [g]$, $g^m(a) = s(r(a)) = s(o(*)) = b$ gilt. Man sieht, daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist. Die Shiftäquivalenzklasse besteht also aus Homotopieklassen $[g] : (A,b) \to (A,b)$, für die es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $g^m(A) = \{b\}$ für alle $g \in [g]$. Dadurch haben wir also den trivialen Conley–Index vollständig beschrieben.
Nun wollen wir überlegen, wie der homologische triviale Conley–Index aussieht, weil er in konkreten Beispielen oft vorkommt. Wir wenden also auf $[g] : (A,b) \to (A,b)$ mit $g^m(A) = \{b\}$ den Homologiefunktor mit rationalen Koeffizienten an, und erhalten lineare Abbildungen $g_n : H_n(A,b) \to H_n(A,b)$ in Homologie induziert, für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wir erinnern uns noch einmal an die Funktoreigenschaft: für $g : (A,b) \to (B,c)$ und $h : (B,c) \to (C,d)$ gilt in Homologie $(h \circ g)_n = h_n \circ g_n$. Also gilt auch $(g^m)_n = (g_n)^m$. Da $g^m(x) = b$ für alle $x \in A$, ist $Im(g_n^m) \subseteq H_n(b)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Also $g_n^m = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ (mit anderen Worten sind die g_n's nilpotent der Ordnung höchstens m), das heißt $g_*^m = 0$. Der homologischer Conley–Index einer invariante, isolierte Menge g_* ist trivial, falls es ein m gibt mit $g_*^m = 0$.

Als Folgerung erhalten wir:

Satz 3.6.2 *Wenn der Conley–Index einer isolierten, invarianten Menge S nicht trivial ist, dann ist S nicht leer.*

Beispiel 3.6.3 *Der Conley–Index von $\{-1,1\}$ im Beispiel 3.1.3 ist nicht trivial, da er nicht nilpotent ist (siehe 3.5.4): die geraden Potenzen der lineare Abbildung $f_{(N,L)_1}$ sind die Identität.*

Beispiel 3.6.4 *Zwei Hufeisen:*
Wir wollen die Conley–Indizes vom klassichen Hufeisen und vom sogenannten G–Hufeisen berechnen. Wir betrachten einerseits die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Einheitsquadrat auf ein Hufeisen abbildet, wie in der Abbildung 3.11 beschrieben ist, andererseits die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Einheitsquadrat auf eine G–förmige Region abbildet, wie in der Abbildung 3.12 beschrieben ist.
Für beide Abbildungen sieht das Exit–Set gleich aus. Die Abbildung 3.13 zeigt ein

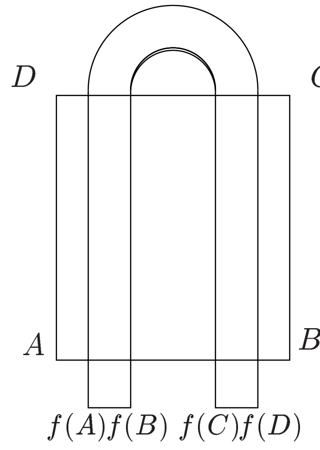

Abbildung 3.11: Die Hufeisenabbildung

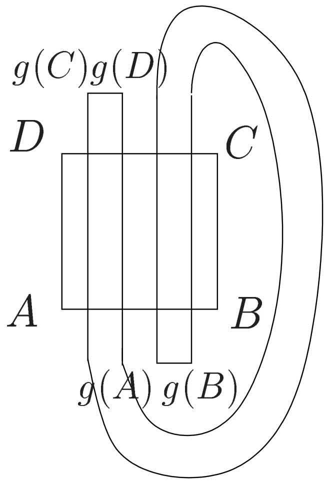

Abbildung 3.12: Die G–Hufeisenabbildung

Paar kompakter Mengen (N, L), wobei N das Einheitsquadrat und L die schraffierte Region ist, was sowohl bei dem klassichen Hufeisen als auch für das G–Hufeisen ein Filtrationspaar ist.

Wir bilden dann den Quotienten $N \cup \{*\}/L \cup \{*\}$, *punktierten Raum mit Ba-*

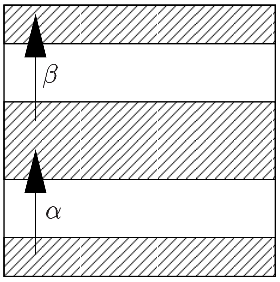

Abbildung 3.13: (N, L) ist ein Filtrationspaar für $Inv(N, f)$ und für $Inv(N, g)$.

sispunkt $o(*)$, *wobei* o *die Quotientenabbildung ist. Dieser Raum wird mit* N/L *abgekürzt. Aus der algebraische Topologie wissen wir, daß*

$$H_i(N/L) = \begin{cases} \mathbb{Q}^2 & \textit{für } i = 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Dies kann man daran erkennen, daß N/L *zu der Einpunktvereinigung* $\Sigma^1 \vee \Sigma^1$ *(zwei punktierte 1–Sphäre an ihrem Basispunkt "verklebt") homotopieäquivalent ist. Die Abbildungen* $\alpha, \beta : [0, 1] \to N/L$, *die in Abb. 3.13 gezeichnet sind, liefern eine Basis* $\{[\alpha], [\beta]\}$ *für* $H_1(N/L)$.
Nun wollen wir uns die von f *und* g *induzierten Abbildungen auf* N/L *in Homologie anschauen. Für* $i \neq 1$ *sind trivialerweise* $f_{(N,L)_i}$ *und* $g_{(N,L)_i}$ *die Nullabbildung. Für* $i = 1$*: da*

$$g_{(N,L)_1}([\alpha]) = [g_{(N,L)} \circ \alpha] = [\alpha] + [\beta]$$

und

$$g_{(N,L)_1}([\beta]) = [g_{(N,L)} \circ \beta] = [\alpha] + [\beta]$$

wird $g_{(N,L)_1}$ *bezüglich unserer Basis von folgender Matrix dargestellt:*

$$Mat(g_{(N,L)_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Der homologischer Conley–Index ist nicht trivial, da

$$Mat(g_{(N,L)_1})^m = \begin{pmatrix} 2^{m-1} & 2^{m-1} \\ 2^{m-1} & 2^{m-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. *Die isolierte, invariante Menge* $Inv(N, g)$ *ist also nicht leer.*
Bei der klassischen Hufeisenabbildung: da

$$f_{(N,L)_1}([\alpha]) = [f_{(N,L)} \circ \alpha] = [\alpha] + [\beta]$$

und

$$f_{(N,L)_1}([\beta]) = [f_{(N,L)} \circ \beta] = -[\alpha] - [\beta]$$

gilt, ist $f_{(N,L)_1}$ *bezüglich unsere Basis von folgender Matrix dargestellt:*

$$Mat(f_{(N,L)_1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der homologischer Conley–Index bei der klassischen Hufeisenabbildung ist also trivial, da $Mat(f_{(N,L)_1})^2 = 0$.
Offensichtlich haben diese zwei Abbildungen die gleiche isolierte, invariante Menge in N *(auch wenn sie von einer anderen Dynamik regiert sind). Man sieht also in diesem Beispiel, daß durch die Berechnung vom Conley–Index Information verloren geht. Hier passiert es insbesondere in dem Schritt, bei dem man den Homologiefunktor anwendet. Das ist der Preis, den man dafür bezahlen muß, daß man ein konkrete Vorstellung vom Conley–Index hat. Wenn man sich an die Definition 3.5.3 hält, erhält man etwas recht unhandliches, was man schwer mit anderen Indizes vergleichen kann.*

Kapitel 4

Stroboskopabbildungen

Sei (X, d) ein metrischer, lokal kompakter Raum. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns damit, die Conley–Indizes von Flüssen $\phi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ und von ihren assoziierten dynamischen Stroboskopabbildungen $f^T := \phi(., T)$, T aus $\mathbb{R}_+^*$, zu vergleichen. Um Mißverständnisse zu vermeiden, benützen wir folgende Notation: sei N eine kompakte Teilmenge von X. Wir bezeichnen die maximale invariante Menge bezüglich ϕ, die in N enthalten ist, mit $Inv(N, \phi)$. Analog dazu sei $Inv(N, f^T)$ die maximale invariante Menge bezüglich f^T, die in N enthalten ist.

4.1 Gemeinsame isolierte, invariante Menge

Ein Vergleich kann natürlich nur da stattfinden, wo diese beiden Systeme eine gemeinsame isolierte invariante Menge besitzen. Der folgende Satz besagt, daß diese für beide Systeme übereinstimmen.

Satz 4.1.1 *Sei $S \subseteq X$ kompakt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *S ist bezüglich ϕ eine isolierte, invariante Menge .*
2. *Für alle $T \in \mathbb{R}_+^*$ ist S bezüglich f^T eine isolierte, invariante Menge .*
3. *Für ein $T \in \mathbb{R}_+^*$ ist S bezüglich f^T eine isolierte, invariante Menge*

Um diesen Satz zu beweisen, benötigt man folgenden Lemmata:

Lemma 4.1.2 *Sei S eine isolierte invariante Menge bezüglich des Flusses ϕ ist und N eine isolierende Umgebung von S bezüglich ϕ. Weiter sei $T \in \mathbb{R}_+^*$ und $z : N \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ definiert durch:*

$$z(x) := sup\{s \in \mathbb{R}_+ : \phi(x, [0, s]) \subseteq N\}$$

Dann existiert eine kompakte Umgebung N' von S, mit $N' \subseteq N$ und $z(x) \geqslant T$ für alle $x \in N'$.

Beweis. Wir führen diesen Beweis indirekt. Angenommen, es gäbe keine solche Umgebung von S. Dann gibt es in jedem $\frac{1}{n}$–Schlauch um S ein Element x mit $z(x) < T$. Sei $K_N := N \cap \{x \in X : d(x,S) \leqslant \frac{1}{n}\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Diese K_N sind Umgebungen und liefern nach Annahme eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit:

- $x_n \in N$ und
- $t_n := z(x_n) \in [0, T[$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da N kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergierende Teilfolge – oBdA konvergiert die Folge selbst. Ihr Limes x muß in S liegen, da der Abstand zwischen x_n und S (kompakt) gegen Null geht. Wir konstruieren jetzt einen Widerspruch dazu.
Die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat ebenfalls konvergierende Teilfolgen: sei $(t_{n_k}) \to \tau \leqslant T$ eine davon. Nach Definition von z gibt es zu jedem n_k ein $\delta_{n_k} \in]0, \frac{1}{n_k}]$ mit $\phi(x_{n_k}, t_{n_k} + \delta_{n_k}) \in N^c$. Da ϕ stetig ist, konvergiert $\phi(x_{n_k}, t_{n_k} + \delta_{n_k})$ gegen $\phi(x,\tau) \in cl(N^c) = (int(N))^c$. Andererseits war x aus S, also sollte auch $\phi(x,\tau)$ in S sein. Da $S \subseteq int(N)$, erhalten wir einen Widerspruch. □

Lemma 4.1.3 *Sei S eine isolierte, invariante Menge bezüglich f^T für ein gegebenes $T > 0$ ist und N eine isolierende Umgebung für S bezüglich f^T. Da $S \subseteq int(N)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\phi(S, [0,\varepsilon]) \subseteq int(N)$.*

Beweis. Angennomen, das wäre nicht der Fall. Dann gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein x aus S und ein $\delta \in]0,\varepsilon]$, so daß $\phi(x,\delta) \notin int(N)$. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und erhalten entsprechende x_n und δ_n, so daß $\phi(x_n, \delta_n) \notin int(N)$.
Die Folge (x_n) liegt im Kompaktum S, also hat sie eine konvergierende Teilfolge $x_{n_k} \to x \in S$. Es gilt $\delta_{n_k} \to 0$, also erhalten wir $\phi(x_{n_k}, \delta_{n_k}) \to \phi(x, 0) = x \in S$.
Andererseits hatten wir $\phi(x_n, \delta_n) \in (int(N))^c$. Da $(int(N))^c$ abgeschlossen ist, ist auch $x \notin int(N)$. Das ist ein Widerspruch zu $S \subseteq int(N)$. □

Beweis.vom Satz 4.1.1
(1) $\Rightarrow$ (2):
Sei S eine isolierte invariante Menge bezüglich des Flusses ϕ ist und N eine isolierende Umgebung von S bezüglich ϕ, das heißt $S = Inv(N,\phi) \subseteq int(N)$. Sei außerdem $T > 0$ fixiert. Wir zeigen nun, daß S auch bezüglich f^T isoliert invariant ist. Das Lemma 4.1.2 liefert uns eine Menge N', so daß $N' \subseteq N$, $S \subseteq int(N')$, und $z(x) \geqslant T$ für alle x aus N'. Wir werden zeigen, daß das Kompaktum N' die Menge S bezüglich f^T isoliert.
Die Fluß–Trajektorie durch jedes $x \in N'$ braucht also mindestens die Zeit T bevor sie N verläßt. Wir zeigen jetzt, daß $Inv(N', f^T) \subseteq S = Inv(N,\phi)$ gilt.
Sei $x \in Inv(N', f^T)$ und $s \in \mathbb{R}$. Weil $\mathbb{R}$ euklidisch ist, gibt es eindeutig bestimmte

Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{R}$ mit:

$$s = qT + r,$$

$$0 \leqslant r < T.$$

Es gilt $\phi(x,s) = \phi(x, qT + r) = \phi(\phi(x, qT), r)$, weil ϕ ein Fluß ist. Da $x \in Inv(N', f^T)$, ist $\phi(x, qT) \in N'$. Nach Wahl von N' ist $z(\phi(x, qT)) \geqslant T$. Die Trajektorie durch diesen Punkt verläßt N also nicht vor der Zeit T. Da $r < T$, ist $\phi(\phi(x, qT), r) \in N$, das heißt $\phi(x, s) \in N$.
Für alle $x \in Inv(N', f^T)$ und alle $s \in \mathbb{R}$, ist $\phi(x,s) \in N$, also gilt $Inv(N', f^T) \subseteq S = Inv(N, \phi)$.
Die umgekehrte Inklusion ist eine Folge von Lemma 1.2.9. Es besagt, daß N' eine isolierende Umgebung von S bezüglich des Flusses ϕ sein muß. Für alle $x \in S$ gilt dann $\phi(x, \mathbb{Z}T) \subseteq \phi(x, \mathbb{R}) \subseteq N'$. Wir erhalten also $Inv(N, \phi) = S = Inv(N', \phi) \subseteq Inv(N', f^T)$. Damit sind diese beide Mengen gleich. Außerdem $S \subseteq int(N')$, also ist S eine isolierte, invariante Menge bezüglich des assoziierten Systemes f^T, und das für beliebiges $T > 0$.
(2) $\Rightarrow$ (3) ist offensichtlich!
(3) $\Rightarrow$ (1):
Wir nehmen jetzt an, daß S eine isolierte, invariante Menge bezüglich f^T für ein gegebenes $T > 0$ ist. Sei N eine isolierende Umgebung: $S = Inv(N, f^T) \subseteq int(N)$. Zuerst zeigen wir die Invarianz von S unter ϕ. Sei $x \in S$. Wir definieren

$$t_0 := sup\{s \in [0,T] : \forall i \in \mathbb{Z}, \phi(x, [iT, iT + s]) \subseteq S\}.$$

Dieses t_0 existiert, da die Menge $\{s \in [0,T] : \forall i \in \mathbb{Z}, \phi(x, [iT, iT+s]) \subseteq S\}$ nicht leer ist (sie enthält zum Beispiel die 0), und von T nach oben beschränkt ist. Wir hätten gern $t_0 = T$, da wegen der Stetigkeit von ϕ folgen würde, daß für alle $i \in \mathbb{Z}$, $\phi(x, [iT, (i+1)T]) \subseteq S$ gilt. Anders gesagt $\phi(x, \mathbb{R}) \subseteq S$, also S invariant unter ϕ, und damit $S \subseteq Inv(N, \phi)$.
Angenommen t_0 würde mit T nicht übereinstimmen. Dann wäre $t_0 < T$. Wegen der Stetigkeit von ϕ und der Kompaktheit von S, muß $\phi(x, iT + t_0) \in S$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gelten. Jetzt brauchen wir Lemma 4.1.3: es liefert ein $\varepsilon > 0$, so daß $\phi(S, [0, \varepsilon]) \subseteq int(N)$.
Wir wollen jetzt die Maximalität von t_0 zum Widerspruch führen. $\phi(x, iT + t_0)$ ist in S, also gilt $\phi(\phi(x, iT+t_0), [0, \varepsilon]) \subseteq int(N)$, und zwar für alle $i \in \mathbb{Z}$. Wegen der Fluß–Eigenschaften gilt dann für alle $i \in \mathbb{Z}$, $\phi(x, [iT, iT + t_0 + \varepsilon]) \subseteq int(N) \subseteq N$. Weiter liegt sogar jedes Element aus $\phi(x, [iT, iT + t_0 + \varepsilon])$ in S: Sei $i \in \mathbb{Z}$ und s aus $[iT, iT + t_0 + \varepsilon]$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$, $\phi(\phi(x,s), kT) = \phi(x, kT + s) \in \phi(x, [(i+k)T, (i+k)T + t_0 + \varepsilon]) \subseteq N$. Also liegt $\phi(x,s)$ in $Inv(N, f^T) = S$. Damit gilt: für alle $i \in \mathbb{Z}$, $\phi(x, [iT, iT + t_0 + \varepsilon]) \subseteq S$. Es ist ein Widerspruch zur Definition von t_0, da $t_0 + \varepsilon > t_0$. Die Annahme $t_0 \neq T$ war falsch. Es gilt also schließlich $S \subseteq Inv(N, \phi)$.
Die umgekehrte Inklusion ist trivial: für alle $x \in Inv(N, \phi)$ ist

$\phi(x, \mathbb{Z}T) \subseteq \phi(x, \mathbb{R}) \subseteq N$, also $Inv(N, \phi) \subseteq Inv(N, f^T) = S$.
Insgesamt haben wir also gezeigt, daß S und $Inv(N, \phi)$ übereinstimmen. Die Bedingung $S \subseteq int(N)$ war Voraussetzung. S ist also bezüglich ϕ eine isolierte, invariante Menge . □

Bemerkung 4.1.4 *1. Wir können also ab jetzt von isolierten, invarianten Mengen sprechen, ohne zu sagen, ob wir isolierte, invariante Mengen bezüglich des Flusses oder bezüglich eines seiner assoziierten, diskreten, dynamischen Systeme meinen, da sie übereinstimmen.*

2. Es wurde im Beweis von (3) ⇒ (1) auch folgendes gezeigt:
Falls S eine isolierte, invariante Menge ist, und N eine isolierende Umgebung für S bezüglich f^T, dann ist auch N eine isolierende Umgebung von S bezüglich ϕ. Dies ist sehr wichtig, da es die Existenz von gemeinsamen isolierenden Umgebungen gewährleistet. Daher gilt der folgende Satz:

Satz 4.1.5 *Sei $T \in \mathbb{R}_+^*$ und S eine isolierte, invariante Menge . Dann gibt es eine kompakte Umgebung U von S, die S sowohl bezüglich ϕ als auch bezüglich f^T isoliert.*

Beispiel 4.1.6 *Wir betrachten einen Fluß mit einem isolierten, P–periodischen Orbit. Für Stroboskopabbildungen f^T hat man, wenn T und die Periode P nicht inkomensurabel sind, endliche Teilmengen des periodischen Orbits als invariante Mengen (siehe dazu Abb. 4.1). Diese sind aber nicht isoliert: egal wie klein man*

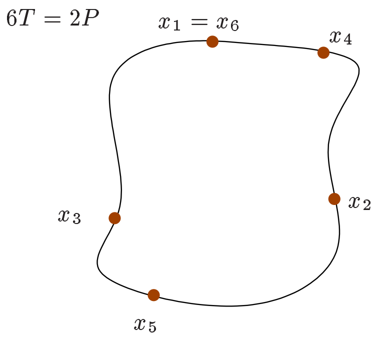

Abbildung 4.1: periodischer Orbit der Periode P, und Orbit einer Stroboskopabbildung

die kompakte Umgebung des Orbit bezüglich f^T (siehe $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ in der Abbildung 4.1) wählt, die maximale invariante Menge dieser Umgebung ist immer größer. Der Fluß sorgt für die Kontinuität der isolierten, invarianten Mengen seiner Stroboskopabbildungen.

4.2 Konstruktion eines gemeinsamen Index–Paares

In diesem Abschnitt fixieren wir $T > 0$, und schreiben dann einfach f für die dazugehörige Stroboskopabbildung $f^T = \phi(.,T)$

Satz 4.2.1 *Sei S eine isolierte, invariante Menge . Dann existieren kompakte $N, L \subseteq X$, so daß (N, L) für S bezüglich ϕ ein Index–Paar und bezüglich f ein Filtrationspaar ist.*

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir folgende Lemmata:

Lemma 4.2.2 *Es existiert eine offene Umgebung V von S, so daß $cl(V)$ eine isolierende Umgebung von S ist, und zwei Funktionen $\varphi, \gamma : V \to [0, +\infty[$, so daß*

1. *φ entlang der Trajektorien monoton fallend ist, das heißt:*
$$\forall x \in V,\ \forall t > 0,\ \phi(x,t) \in V \Longrightarrow \varphi(\phi(x,t)) \leqslant \varphi(x),$$
2. *γ entlang der Trajektorien monoton steigend, das heißt:*
$$\forall x \in V,\ \forall t > 0,\ \phi(x,t) \in V \Longrightarrow \gamma(\phi(x,t)) \geqslant \gamma(x) \text{ und}$$
3. $S = \gamma^{-1}(0) \cap \varphi^{-1}(0)$

Den vollständigen Beweis des Lemma 4.2.2 wollen wir hier hier nicht durchführen, da es zum Standard der Conley–Index–Theorie für Flüsse gehört. Siehe dazu [Ryb]. Wir betrachten diese Abbildungen etwas näher, da wir einige Eigenschaften brauchen werden.
Sei M eine isolierende Umgebung und $S = Inv(M)$. Die Abbildungen φ und γ sind folgendermaßen definiert:

$$\varphi(x) = sup\big\{\alpha(t)F(\phi(x,t)) : 0 \leqslant t \leqslant s^+(x) \text{ falls } s^+(x) < \infty,\ 0 \leqslant t < \infty \text{ sonst}\big\}$$
$$\gamma(x) = \inf\Big\{\frac{G(\phi(x,t))}{1+t} : 0 \leqslant t \leqslant t^+(x)\ \Big\},$$

wobei

$$\alpha : [0,\infty[\longrightarrow [1,2[\text{ monoton wachsender Diffeomorphismus},$$
$$F(x) = \min\big\{1, d(x, A^-(M))\big\}$$
$$A^-(M) = \{x \in X : \phi(x,]0, -\infty[) \subseteq M\}$$
$$s^+(x) = \sup\big\{t \geqslant 0 : \phi(x,[0,t]) \subseteq M\big\} \leqslant \infty,$$
$$G(x) = \frac{d(x,S)}{d(x,S) + d(x,M^c)}$$
$$t^+(x) = sup\big\{t \geqslant 0 : \phi(x,[0,t]) \subseteq int(M)\big\} \leqslant \infty$$

Es wird in [Ryb] bewiesen, daß man eine offene Umgebung V von S finden kann, in der φ und γ stetig sind. Weiter haben die Funktionen φ und γ folgendes Verhalten:

1. Falls $\gamma(x) = 0$, dann $\gamma(\phi(x, s)) = 0$ für alle $s > 0$, für die $\phi(x, s) \in V$. Zu solchen x gehören Trajektorien, die sich gegen der isolierte, invariante Menge S häufen.

2. Falls $\gamma(x) \neq 0$, dann $\liminf\limits_{s \searrow 0} \frac{1}{s}(\gamma(\phi(x, s) - \gamma(x)) > 0$. Dies heißt, daß γ entlang Trajektorien, die M vorwärts verlassen, strikt fällt.

3. Falls $\varphi(x) = 0$, dann $\varphi(\phi(x, s)) = 0$ für alle $s > 0$, für die $\phi(x, s) \in V$. Zu solchen x gehören Trajektorien, die M vorwärts verlassen werden.

4. Falls $\varphi(x) \neq 0$, dann $\liminf\limits_{s \searrow 0} \frac{1}{s}(\varphi(\phi(x, s) - \varphi(x))) > 0$. Dies heißt, daß φ entlang Trajektorien, die vorwärts in M bleiben (aber nicht in S liegen), strikt fällt.

Wir wollen diese Aussagen zumindestens bei γ rechtfertigen:
Zu 1): Sei $x \in M$ mit einer Vorwärtstrajektorie, die in M bleibt. Dann ist $t^+(x) = +\infty$ und nach Lemma 1.2.11 $\omega(x) \subseteq S$. Daraus folgt, daß $d(\phi(x, t), S)$ gegen 0 geht, wenn t gegen $+\infty$ geht. Natürlich geht dann $G(\phi(x, t))$ auch gegen 0, weil $d(\phi(x, t), M^c)$ beschränkt bleibt. Also gilt $\frac{G(\phi(x,t))}{1+t} \to 0$, für $t \to +\infty$. Damit $\gamma(x) = \inf\left\{\frac{G(\phi(x,t))}{1+t} : 0 \leqslant t \leqslant +\infty\right\} = 0$. Und weil $\omega(\phi(x, s)) = \omega(x)$ für alle $s > 0$, gilt auch $\gamma(\phi(x, s)) = 0$ für alle $s > 0$.
Andererseits, sei $x \in M$ mit $\gamma(x) = 0$. Falls $t^+(x) < +\infty$, dann muß es eine Folge (t_n) geben, mit $0 \leqslant t_n \leqslant t^+(x)$ und $G(\phi(x, t_n)) \to 0$. Aber (t_n) hat konvergierende Teilfolgen: Sei $(t_{n_k}) \to c$. Wir haben dann $G(\phi(x, c)) = 0$, also $d(\phi(x, c), S) = 0$. Mit $\phi(x, c)$ liegt auch x in S. Aber $x \in S$ führt zu $t^+(x) = +\infty$! Damit muß die Vorwärtstrajektorie durch x in M bleiben, und nach Lemma 1.2.11 $\omega(x) \subseteq S$. Wegen der vorherige Überlegung gilt $\gamma(\phi(x, s)) = 0$ für alle $s > 0$.

Bemerkung 4.2.3 *Falls γ auf V konstant gleich 0 ist, dann ist S ein Attraktor, das heißt, jede Trajektorie, die in V kommt, häuft sich auf S.*

Zu 2): Sei nun $x \in int(M)$ mit $\gamma(x) \neq 0$. Dann gilt $t^+(x) < \infty$. Sei $s > 0$ und klein genug, so daß $t^+(\phi(x, s)) = t^+(x) - s$. Es existiert wegen der Stetigkeit der betrachteten Abbildungen ein $t_1 \in [s, t^+(x)]$, so daß $\gamma(\phi(x, s)) = \frac{G(\phi(x,t_1))}{1+t_1-s}$ Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}(\gamma(\phi(x,s)-\gamma(x)) &= \frac{1}{s}\Big(\frac{G(\phi(x,t_1))}{1+t_1-s}-\gamma(x)\Big) \\
&\geqslant \frac{1}{s}\Big(\frac{1}{1+t_1-s}-\frac{1}{1+t_1}\Big)G(\phi(x,t_1)) \\
&\geqslant \frac{G(\phi(x,t_1))}{(1+t_1)^2} \\
&\geqslant \frac{1}{1+t_1}\gamma(x) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung (2).
Sei

$$H(\varepsilon) := \{x \in V : \varphi(x) \leqslant \varepsilon, \gamma(x) \leqslant \varepsilon\}$$
$$G(\varepsilon) := \{x \in V : \varphi(x) < \varepsilon, \gamma(x) < \varepsilon\}.$$

Lemma 4.2.4 *Zu jeder offenen Umgebung U von S gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $H(\varepsilon) \subseteq U$.*

Beweis. Den Beweis führen wir indirekt. Angenommen, es gibt eine offene Menge U, so daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $x \in H(\varepsilon)$ existiert, das nicht in U liegt. Durch die Wahl von $\varepsilon := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ erzeugen wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\varphi(x_n) \leqslant \frac{1}{n}$,
- $\gamma(x_n) \leqslant \frac{1}{n}$ und
- $x_n \in U^c$.

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat konvergierende Teilfolgen im Kompaktum $cl(V)$. Wir betrachten eine davon: $x_{n_k} \longrightarrow x \in cl(V)$. Wegen der Stetigkeit von φ und γ gilt $\varphi(x) = \gamma(x) = 0$. Deshalb gehört x zu S.
Andererseits ist U offen, also U^c abgeschlossen. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist x_{n_k} in U^c, also auch $x \notin U$.
$x \in S$, $x \notin U$, $S \subseteq U$ ergibt einen Widerspruch.

□

Beweis. vom Satz 4.2.1
V ist offen, also ist ihr Urbild durch die stetige Abbildung $\phi(.,sT)$, die wir mit U_s bezeichnen für jedes $s \in [0,1]$, offen. Damit ist die Menge $\bigcup_{s\in[0,1]} U_s$ offen. Da V und $G(\varepsilon)$ offen und f stetig ist, wissen wir aus dem Lemma 4.2.4, daß es $\varepsilon, \delta > 0$ gibt mit:

- $H(\varepsilon) \subseteq \bigcup_{s\in[0,1]} U_s$
- $H(\delta) \subseteq f^{-1}(G(\varepsilon))$

Wir Behaupten, daß $\delta < \varepsilon$ gilt. Erst im Fall γ konstant gleich 0, ist $f(H(\delta)) \subseteq G(\varepsilon)$ erfüllt sobald $\delta \leqslant \varepsilon$; man kann insbesondere $\delta < \varepsilon$ wählen. Sonst: $\max_{x\in H(\delta)} \{\gamma(x)\} > 0$. Um die Behauptung zu beweisen, interessieren wir uns näher für $\max_{x\in H(\delta)} \{\gamma(x)\}$. Da $H(\delta)$ abgeschlossen und Teilmenge des Kompatums $cl(V)$, handelt es sich um eine kompakte Menge. Damit wird das Maximum der stetigen Funktion γ auf $H(\delta)$ angenommen. Sei $x_0 \in H(\delta)$ mit $\gamma(x_0) = \max_{x\in H(\delta)} \{\gamma(x)\} > 0$. Angenommen $\gamma(x_0) < \delta$, dann gilt aber $\gamma(\phi(x_0, s)) \geqslant \gamma(x_0)$ und $\varphi(\phi(x_0, s)) \leqslant \varphi(x_0) \leqslant \delta$ für alle $s > 0$. Die Trajektorie durch x_0 kann $H(\delta)$ nur dadurch verlassen, daß $\gamma(\phi(x_0, s)) > \delta$ wird. Aber $\gamma \circ \phi(x_0, .)$ ist stetig: nach dem Zwischenwertsatz, kann dies nur geschehen, wenn $\gamma(\phi(x_0, s_0)) = \delta > \gamma(x_0)$ für ein $s > 0$. Es steht im Widerspruch zur Definition von x_0. Es gilt also $\gamma(x_0) = \max_{x\in H(\delta)} \gamma(x) = \delta$. Außerdem bedeutet $H(\delta) \subseteq f^{-1}(G(\epsilon))$, daß aus $\begin{cases} \varphi(x) \leqslant \delta \\ \gamma(x) \leqslant \delta \end{cases}$ folgt $\begin{cases} \varphi(f(x)) < \varepsilon \\ \gamma(f(x)) < \varepsilon \end{cases}$.
Also gilt $0 < \gamma(x_0) = \delta < \gamma(f(x_0)) < \varepsilon$.
Wir definieren

$$N := \{x \in V : \varphi(x) \leqslant \delta \text{ und } \gamma(x) \leqslant \varepsilon\},$$
$$L := \{x \in N : \gamma(x) \geqslant \delta\}$$

und wollen jetzt überprüfen, daß (N, L) die Definition eines Index–Paares und die eines Filtrationspaares erfüllt.
Als erstes zeigen wir, daß $cl(N \setminus L)$ eine isolierende Umgebung für S ist. Wir machen das "parallel" für den diskreten und den kontinuierlichen Fall.
Nach Definition von N und L ist

$$cl(N \setminus L) = \{x \in V : \varphi(x) \leqslant \delta, \gamma(x) \leqslant \varepsilon, \gamma(x) \leqslant \delta\}.$$

Also ist $S = \varphi^{-1}(0) \cap \gamma^{-1}(0)$ im Inneren von $cl(N \setminus L)$. Außerdem ist $cl(N \setminus L)$ abgeschlossen und in $cl(V)$ enthalten. Da $cl(V)$ eine isolierende Umgebung für S war, isoliert $cl(N \setminus L)$ nach dem Lemma 1.2.9 auch S. Die zweite Bedingung, die man überprüfen muß, ist für den Fall eines Flußes folgende:
Für alle $x \in L$ und alle $t > 0$, $\phi(x, [0, t]) \subseteq N \Longrightarrow \phi(x, [0, t]) \subseteq L$.
Sei dazu $x \in L$ und $t > 0$. Da φ entlang der Trajektorien fällt, ist für alle $\tau \in [0, t]$, falls $\phi(x, \tau) \in V$, $\varphi(\phi(x, \tau)) \leqslant \varphi(x) \leqslant \delta$. Ferner steigt γ entlang der Trajektorien. Da schon $\gamma(x) \geqslant \delta$, gilt für alle $\tau \in [0, t]$, $\gamma(\phi(x, \tau)) \geqslant \gamma(x) \geqslant \delta$. Falls auch noch $\phi(x, [0, t]) \in N$ gilt, erhalten wir für alle $\tau \in [0, t]$, $\gamma(\phi(x, \tau)) \leqslant \varepsilon$. Damit ist

$\phi(x,[0,t]) \in L$.
Für ein Filtrationspaar im diskreten Fall besagt die zweite Bedingung, daß L eine kompakte Umgebung der Exitmenge N^- sein soll. Die Exitmenge in unserem Fall sieht folgendermaßen aus:

$$N^- = \{x \in N : f(x) \notin int(N)\} = \{x \in N : \varphi(f(x)) \geqslant \delta \text{ oder } \gamma(f(x)) \geqslant \varepsilon\}.$$

Wenn ein Punkt x die Bedingung $\varphi(f(x)) \geqslant \delta$ erfüllt, dann gilt $\varphi(x) \neq 0$ und deswegen $\varphi(x) > \varphi(f(x)) \geqslant \delta$. Daraus folgt $x \notin N$ und damit $x \notin N^-$. Für ein Element x mit $\gamma(f(x)) \geqslant \varepsilon$ gilt wegen $f(H(\delta)) \subseteq G(\varepsilon)$, daß x nicht in $H(\delta)$ liegen kann. Also muß $\varphi(x) > \delta$ oder $\gamma(x) > \delta$ gelten. Das erste würde zu $x \notin N$ führen, was ausgeschlossen ist für $x \in N^-$. Schließlich gilt also $\gamma(x) > \delta$ für alle $x \in N^-$. Da $L = \{x \in N : \gamma(x) \geqslant \delta\}$, ist L eine Umgebung für N^- in N. Im Fall eines Flusses gibt es noch folgende dritte Bedingung zu überprüfen:
für alle $x \in N$ und $t_1 > 0$ mit $\phi(x,t_1) \notin N$ existiert ein $t_0 \in [0,t_1]$, so daß $\phi(x,[0,t_0]) \subseteq N$ und $\phi(x,t_0) \in L$. Sei also $x \in N$ und t_1 so, daß $\phi(x,t_1)$ nicht in N liegt. Es gilt also

$$\begin{cases} \varphi(x) \leqslant \delta \\ \text{und} \\ \gamma(x) \leqslant \varepsilon \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \varphi(\phi(x,t_1)) > \delta \\ \text{oder} \\ \gamma(\phi(x,t_1)) > \varepsilon. \end{cases}$$

Der Fall, bei dem $\varphi(\phi(x,t_1)) > \delta$ ist ausgeschlossen, da $\varphi(x) \leqslant \delta$ und φ fällt entlang der Trajektorien. Es gilt also $\gamma(x) \leqslant \varepsilon$ und $\gamma(\phi(x,t_1)) > \varepsilon$. Entweder gilt schon $\gamma(x) \geqslant \delta$ - dann kann man $t_0 = 0$ wählen – oder $\gamma(x) < \delta$. In diesem Fall, wendet man den Zwischenwertsatz für die stetige Funktion $\gamma(\phi(x,.))$ an, und bekommt ein $t_0 \in [0,t_1]$, so daß $\gamma(\phi(x,t_0)) = \delta$. Es gilt wegen der Monotonie von φ und γ $\varphi(\phi(x,t)) \leqslant \delta$ und $\gamma(\phi(x,t)) \leqslant \delta < \varepsilon$ für alle $t \in [0,t_0]$. Damit gilt $\phi(x,[0,t_0]) \subseteq N$ und $\phi(x,t_0) \in L$.
Für den diskreten Fall lautet die letzte Bedingung, die eine Filtrationspaar erfüllen muß, $f(L) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$. Es gilt $N \setminus L = \{x \in V : \varphi(x) \leqslant \delta, \gamma(x) \leqslant \varepsilon, \gamma(x) < \delta\}$. Da $\delta < \varepsilon$ gilt, ist $cl(N \setminus L) = \{x \in V : \varphi(x) \leqslant \delta, \gamma(x) \leqslant \delta\} = H(\delta)$. Sei nun $f(x) \in f(L)$. Da $x \in L$, gilt $\gamma(x) \geqslant \delta > 0$. Wegen der Monotonie von γ gilt $\gamma(f(x)) > \gamma(x) \geqslant \delta$, also $f(x) \notin cl(N \setminus L)$. □

4.3 Resultat

Theorem 4.3.1 *Sei $\phi : X \times \mathbb{R} \to X$ ein Fluß auf dem metrischen, lokal kompakten Raum X und $f : X \to X$ die Abbildung $f = \phi(.,T)$. Sei (N,L) ein zu ϕ und f gemeinsam gehörendes Index- bzw. Filtrationspaar.*
Dann ist N/L ein Repräsentant des Conley–Indizes für den Fluß ϕ und der

Conley–Index für die Abbildung f ist die Shiftäquivalenzklasse von $[id_{N/L}]$, der Homotopieklasse von $id_{N/L}$.

Dieses Theorem besagt insbesondere, daß der Conley–Index einer Stroboskopabbildung die Shiftäquivalenzklasse der Identität auf dem Conley–Index des Flusses ist. Diese Indizes sind in diesem Sinne "gleich", da sie sich nur durch eine Standardkonstruktion unterscheiden, die an ihrem Inhalt an Information nichts ändert. Man sieht dies am besten im folgenden Korollar:

Korollar 4.3.2 *Sei f eine Stroboskopabbildung und S eine isolierte, invariante Menge unter f. Dann ist der Homologie–Conley–Index von S gleich $Id_{H_i(N/L)}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, wobei $H_i(N/L)$ der i–te Homologiegruppe von N/L ist.*

Beweis. von Theorem 4.3.1.
Wir wissen, daß der Conley–Index nicht von der Wahl des Index– bzw. Filtrationspaares abhängt. Sei also oBdA (N, L) das Indexpaar für ϕ und Filtrationspaar für f, die im Satz 4.2.1 konstruiert wurde. Sei $o : N \to N/L$ die Quotientenabbildung und $h : N/L \times [0, 1] \to N/L$ die Abbildung die durch:

$$h(o(x), s) = \begin{cases} o(\phi(sT, x)) & \text{, falls } o(x) \neq o(*) \\ o(*) & \text{, sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Wir werden zeigen, daß h eine Homotopie zwischen $f_{(N,L)}$ und $Id_{N/L}$ liefert.
Als erstes zeigen wir, daß h wohldefiniert ist:
Wenn $o(x) \neq o(*)$, dann gehört x zu $N \setminus L$. Daraus folgt daß $f(x)$ in N liegt, weil (N, L) ein Filtrationspaar ist. Außerdem muß $\phi(x, sT)$ auch in N sein für alle $s \in [0, 1]$. Wäre das nicht der Fall, gäbe es ein $s \in [0, 1]$ mit $\phi(x, sT) \notin N$. Das bedeutet, daß entweder $\varphi(\phi(x, sT)) > \delta$ oder $\gamma(\phi(x, sT)) > \delta$ ist. Der erste Fall kann nicht auftreten: φ fällt entlang der Trajektorien, also folgt aus $\varphi(x) \leqslant \delta$, daß auch $\varphi(\phi(x, sT))$ kleiner als δ ist. Im zweiten Fall garantiert uns die Wahl von ε, daß die Trajektorie von x in der Zeit $[0, T]$ die Menge V nicht verläßt. $\gamma(\phi(x, sT))$ ist also für jedes $s \in [0, 1]$ definiert. Wir hätten dann $\gamma(f(x)) = \gamma(\phi(x, T)) \geqslant \gamma(\phi(x, sT)) > \delta$, was $f(x) \in N$ widerspricht. Also $\phi(x, sT) \in N$ für alle $s \in [0, 1]$ und $o(\phi(sT, x))$ macht Sinn für $o(x) \neq o(*)$.
Als nächstes wollen wir die Stetigkeit dieser Abbildung überprüfen: Außerhalb von $o(*)$ ist die Stetigkeit klar, weil es sich um die Hintereinanderausführung von den stetigen Abbildungen $\phi(sT, .)$ und o handelt. Im Fall, wo $\gamma \equiv 0$ ist, passiert folgendes: L ist leer und $o(*)$ isoliert in N/L, damit ist h an dieser Stelle stetig. Sei nun $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $s \in [0, 1]$ konvergiert, und $(o(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $o(*)$ konvergierende Folge. Wir betrachten den Fall, bei dem $o(x_n) \neq o(*)$ (das heißt $x_n \in N \setminus L$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zerfällt in konvergierende Teilfolgen, die gegen Element auas L konvergieren. Wir

nehmen also oBdA $x_n \to x \in L$ an. Wie wir schon gesehen haben, folgt aus $x_n \in N \setminus L$, $\phi(x_n, \tau T) \in N$ für alle $\tau \in [0,1]$. Außerdem gilt $\gamma(x_n) < \delta$, weil $x_n \in N \setminus L$, und $\gamma(x) \geqslant \delta$, weil $x \in L$. Es muß also $\gamma(x) = \delta$ gelten . Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\gamma(\phi(x_n, s_n T)) > \gamma(x_n) \to \delta$. Da $\gamma(\phi(x_n, s_n T))$ gegen $\gamma(\phi(x, sT))$ geht, ist $\gamma(\phi(x, sT)) \geqslant \delta$ und damit gehört $\phi(x, sT)$ zu L. Schließlich gilt also $o(\phi(x_n, s_n T)) \to o(*)$, was die Stetigkeit von h beweist.
Nun gilt $h(o(x), 0) = o(x)$ und $h(o(x), 1) = f_{(N,L)}(o(x))$ für alle $o(x) \in N/L$. $\square$

4.4 Ein Beispiel

Beispiel 4.4.1 *Eine Abbildung, die keine Stroboskopabbildung ist:*
Wir betrachten das diskrete, dynamische System auf $\mathbb{R}^n$*,das von* $f : x \mapsto -2x$ *erzeugt wird. Dieses System besitzt eine einzige isolierte, invariante Menge, und zwar die Menge* $S := \{0\}$*. Jeder andere Punkt folgt einer Trajektorie die unbeschränkt ist. Deswegen verlassen diese Trajektorien jedes Kompaktum. Für die Dimension* $d = 1$ *bildet das Intervall* $N := [-1, 1]$ *eine isolierende Umgebung für* S *:*

- *Der Ursprung ist ein Fixpunkt für dieses System, und liegt im Inneren von* N*, also* $int(N) \supset S \subseteq Inv(N)$*.*
- *Die Trajektorie durch einen Punkt* $x \neq 0$ *ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *wobei* $x_n = (-2)^n x$*. Für* n *genügend groß ist* $\|x_n\| = 2^n \|x\| > 1$*, also alle* $x \neq 0$ *gehören nicht zu* $Inv(N)$*. Daraus folgt, daß* $Inv(N) = S$*.*

Als Filtrationspaar können wir das Paar $(N \cup L, L)$ *wählen, wobei* $L = \left[-\frac{5}{2}, -1\right] \cup \left[1, \frac{5}{2}\right]$*:*

- *Die Exit–Menge von* $N \cup L$ *ist* $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right]$*. Die Menge* L *ist also tatsächlich eine Umgebung dieser Exit–Menge in* $N \cup L$*.*
- *Es gilt* $f(L) = [-5, -2] \cup [2, 5]$*, also sind* $f(L)$ *und* N *disjunkt.*

In der Abbildung 4.2 wird die induzierte Abbildung auf dem Quotientenraum dargestellt, die zu diesem Filtrationspaar gehört. Sei $o : N \to N/L$ *die Quotientenabbildung. Wir zeigen noch, daß diese Abbildung homotop zu der Spiegelung von* Σ^1 *an der Achse ist, die durch den Fixpunkt* $o(0)$ *und den Basispunkt* $o(*)$ *läuft. Diese Spiegelung nennen wir* $s : \Sigma^1 \to \Sigma^1$*. Dafür betrachten wir folgende Abbildung* h*:*

$$\begin{aligned} [0,1] \times N \cup L/L &\longrightarrow N \cup L/L \\ (t, o(x)) &\longmapsto \begin{cases} o(-(t+1)x) \; \textit{falls} \; x \notin L \cup \{*\} \\ o(*) \; \textit{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

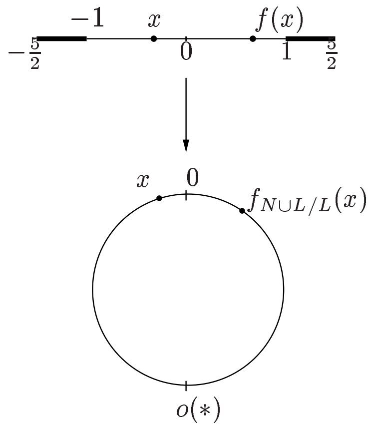

Abbildung 4.2: Das Filtrationspaar $(N \cup L, L)$ und die induzierte Abbildung auf dem Quotientenraum $N \cup L/L$.

Diese Abbildung ist stetig und liefert eine Homotopie zwischen $f_{(N\cup L,L)}$ und s. Außerdem gehört die Identität nicht zu der Homotopieklasse von $f_{(N\cup L,L)}$ und s. Das haben wir schon in dem Beispiel 2.3.8 bewiesen. Damit wissen wir, daß diese Abbildung nicht aus einem Fluß stammt. Es gibt aber trotzdem Fälle, wo man eine n–te Wurzel ziehen kann, denn für n ungerade ist $\phi^n = f$, wobei $\phi : x \mapsto -\sqrt[n]{2}x$.

Kapitel 5

Das n–te Wurzelproblem

In diesem Kapitel wollen wir die diskrete Conley–Index–Theorie auf das n–te Wurzelproblem anwenden. Sei $f : X \to X$ eine Selbstabbilung eines metrischen, lokal kompakten Raumes und sei $F := f^n$ die n–te Potenz von f. Wir wollen aus der Dynamik von F Informationen über die Dynamik von f gewinnen. Wir werden in diesem Kapitel zeigen, daß der Conley–Index dafür ein gutes Werkzeug ist. In Fällen, in denen man die Conley–Indizes vergleichen kann, besteht eine deutliche Beziehung zwischen dem Conley–Index von F und dem von f. Um dies zu sehen, müssen wir erst verstehen, wie die isolierten invarianten Mengen bezüglich dieser beiden Abbildungen zusammenhängen. Das werden wir in den nächsten zwei Abschnitte sehen.
Dabei beschränken wir uns auf den Fall, bei dem F ein Homöomorphismus ist. Es treten sonst Probleme wegen der Nichteindeutigkeit der Vorgeschichte auf. In diesem Fall muß f auch bijektiv sein. Durch jeden Punkt $x \in X$ läuft dann eine eindeutige volle Trajektorie und zwar:

- $(f^k(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ ist die volle Trajektorie durch x unter f
- $(F^k(x))_{k\in\mathbb{Z}} = (f^{nk}(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ ist die volle Trajektorie durch x unter F.

In diesem Kapitel wird es immer wieder nötig sein, zu sagen, unter welcher Abbildung (f oder F) man das System betrachtet. Deswegen schreiben wir für $g := f$ oder F:

- $Inv(N, g)$ die maximale g–invariante Menge, die in N liegt,
- $h(S, g)$ der Conley–Index von S unter der Abbildung g,
- $C_{\varepsilon,g}(.,.)$ die Menge aller ε–Ketten unter g, die in den angegebenen Mengen verlaufen. Dabei ist der springende Punkt, daß die Ungleichung $d(g(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$ gelten soll (siehe Definition 3.1.6).
- N^{-g} die Exitmenge von N unter g, das heißt $\{x \in N : g(x) \notin int(N)\}$.

Wenn induzierte Abbildungen auf Quotientenräumen auftauchen, meint man , zum Beispiel, mit $f^n_{(N,L)}$ eignentlich $(f_{(N,L)})^n$.

5.1 Isolierte, invariante Mengen: von f zu F

Satz 5.1.1 *Sei $S \subseteq X$ eine kompakte Menge. Falls S bezüglich f isoliert, invariant ist, dann ist S auch bezüglich F isoliert, invariant.*

Beweis. Angenommen, die Menge S ist bezüglich f isoliert, invariant. Dann besitzt sie eine kompakte isolierende Umgebung N und es gilt $S = Inv(N, f)$. Wir führen den Beweis indirekt: falls S keine isolierte invariante Menge bezüglich F wäre, dann wären insbesondere die ε–Schläuche um S herum keine isolierenden Umgebungen für S bezüglich F.
Wir definieren für alle $\varepsilon > 0$ die Menge

$$B_\varepsilon(S) := \{x \in N, d(x, S) \leqslant \varepsilon\}.$$

Die Menge S ist Teilmenge von $int(B_\varepsilon(S))$ und aus ihrer Invarianz unter f folgt, daß sie auch unter F invariant ist: Wenn für alle $k \in \mathbb{Z}$, $f^k(x)$ in S liegt, dann gilt insbesondere $f^{nk}(x) \in S$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt also auf jeden Fall $S \subseteq Inv(B_\varepsilon(S), F)$.
Falls $B_\varepsilon(S)$ keine isolierende Umgebung für S ist, gibt es ein $x(\varepsilon) \in Inv(B_\varepsilon(S), F)$, was nicht in $S = Inv(N, f)$ liegt. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $x(\varepsilon)$ mit:

1. für alle $k \in \mathbb{Z}$, $F^k(x(\varepsilon)) = f^{nk}(x(\varepsilon)) \in B_\varepsilon(S)$
2. es gibt ein $k(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, so daß $f^{k(\varepsilon)}(x(\varepsilon)) \notin N$.

Die euklidische Division von $k(\varepsilon)$ durch n ergibt ein eindeutiges Paar $(q, r(\varepsilon)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $k(\varepsilon) = nq + r(\varepsilon)$ und $0 \leqslant r(\varepsilon) < n$. Wir nennen $y(\varepsilon)$ den Punkt $F^q(x(\varepsilon)) = f^{nq}(x(\varepsilon))$. Wegen 1. liegt $y(\varepsilon)$ in $B_\varepsilon(S)$. Außerdem liegt $f^{r(\varepsilon)}(y(\varepsilon)) = f^{k(\varepsilon)}(x(\varepsilon))$ außerhalb von N.
Jetzt lassen wir ε gegen 0 gehen. Da für jedes $\varepsilon > 0$ der Punkt $y(\varepsilon)$ im ε–Schlauch um S liegt, häuft sich $y(\varepsilon)$ bei S, wenn ε gegen 0 geht.
Bei den $r(\varepsilon)$ handelt es sich um natürliche Zahlen zwischen 0 und n. Wenn ε gegen 0 strebt, hat $r(\varepsilon)$ also nicht nur Häufungspunkte, sondern zu jedem Häufungspunkt r gibt es eine Folge $(\varepsilon_p)_{p\in\mathbb{N}}$, so daß $(r(\varepsilon_p))_{p\in\mathbb{N}}$ konstant wird, wenn p groß genug ist.
Wir wählen nun eine Nullfolge (ε_p), so daß $(y(\varepsilon_p))_{p\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $s \in S$ konvergiert und die Folge $(r(\varepsilon_p))$ konstant gleich $r \in \{0, \cdots, n-1\}$ wird, wenn p groß genug ist.
Da s in S liegt und S unter f invariant ist, liegt auch $f^r(s)$ in S. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\Big(f^{r(\varepsilon_p)}(y(\varepsilon_p)), S\Big) &\leqslant d\Big(f^{r(\varepsilon_p)}(y(\varepsilon_p)), f^r(s)\Big) \\ &\leqslant d\Big(f^{r(\varepsilon_p)}(y(\varepsilon_p)), f^r(y(\varepsilon_p))\Big) + d\Big(f^r(y(\varepsilon_p)), f^r(s)\Big) \end{aligned}$$

Der Term $d\Big(f^{r(\varepsilon_p)}(y(\varepsilon_p)), f^r(y(\varepsilon_p))\Big)$ wird Null, wenn p hinreichend groß ist, da in diesem Fall $r(\varepsilon_p) = r$ ist. Der Term $d\Big(f^r(y(\varepsilon_p)), f^r(s)\Big)$ geht gegen Null für $p \to \infty$ wegen der Stetigkeit von f^r.
Das liefert aber einen Widerspruch, da alle $f^{r(\varepsilon_p)}(y(\varepsilon_p))$ außerhalb von N liegen und S im Inneren von N: Der Abstand $d\Big(f^{r(\varepsilon_p)}(y(\varepsilon_p)), S\Big)$ kann deswegen nicht kleiner werden als $d(\partial N, S) > 0$.
Insgesamt haben wir bewiesen, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, für das der ε–Schlauch um S (geschnitten mit N) eine isolierende Umgebung für S bezüglich F ist. $\square$

Dieser Satz besagt insbesondere, daß F und f gemeinsame isolierte, invariante Mengen haben. Diese gemeinsamen isolierten, invarianten Mengen sind die, bei denen man hinterher die Conley–Indizes bezüglich F und f vergleichen kann und sind deswegen sehr wichtig.

5.2 Isolierte, invariante Mengen: von F zu f

Wenn F und f keine aus einem Fluß stammenden Stroboskopabbildungen sind, kann man nicht mehr erwarten, daß ihre isolierten, invarianten Menge übereinstimmen. In der Tat, wie man in dem folgenden elementaren Beispiel sieht, besitzt F isolierte, invariante Mengen, die für f keine sind.

Beispiel 5.2.1 *Wir betrachten eine Abbildung $f : X \to X$, die einen P–periodischen Orbit besitzt, $P \in \mathbb{N}, P \geqslant 1$. Dieser periodische Orbit ist bekanntlich invariant. Wir nehmen zusätzlich an, daß dieser sogar isoliert invariant ist. Sei $F := f^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Die Abbildung F besitzt dann $ggT(n,P)$ viele periodische Orbits der Länge $\frac{P}{ggT(n,P)} =: k$. Falls $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ein peridodischer Orbit unter F ist, dann ist auch $\{f(x_1), \ldots, f(x_k)\}$ einer. Siehe dazu Abb. 5.1. Außerdem setzt sich der ursprüngliche Orbit unter f aus den Orbits unter F zusammen: $\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} f(\{x_1, \ldots, x_k\})$ ist der Orbit unter f.*

Dieses Beispiel mag sehr einfach sein, es liefert aber genau das Bild, das man sich unter diesem Phänomen vorstellen sollte: Wenn man eine isolierte, invariante Menge unter F hat, und sie unter f iteriert, bekommt man die Bestandteile einer isolierten, invarianten Menge unter f. Wir werden dies in diesem Abschnitt in Satz 5.2.5 genauer formulieren. Um diesen Satz beweisen zu können, müssen wir noch etwas Vorarbeit leisten. Die folgenden drei Lemmata sind der Schlüssel zum Beweis.

Lemma 5.2.2 *Sei S eine isolierte, invariante Menge unter F und N eine isolierende Umgebung für S bezüglich F. Dann ist auch $f(S)$ isoliert invariant bezüglich F und $f(N)$ ist eine isolierende Umgebung für $f(S)$ bezüglich F.*

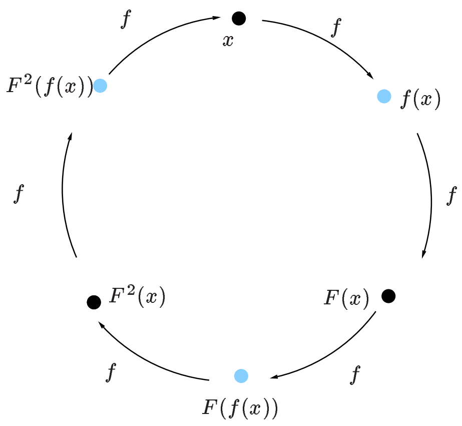

Abbildung 5.1: $P = 6$, $n = 2$.

BEWEIS. Unsere Voraussetzung lautet:

$$S = Inv(N, F) \subseteq int(N).$$

Wir wollen zeigen, daß

$$f(S) = Inv(f(N), F) \subseteq int(f(N)).$$

Als Bild eines Kompaktums unter einer stetigen Abbildung ist $f(N)$ kompakt. Wir fangen mit $f(S) \subseteq int(f(N))$ an: Aus $S \subseteq N$ folgt offensichtlich $f(S) \subseteq f(N)$. Wir müssen also nur noch verifizieren, daß $f(S)$ den Rand von $f(N)$ nicht schneidet.

$$\begin{aligned} f(S) \cap \partial f(N) &= f(S) \cap \Big[f(N) \setminus int\big(f(N)\big) \Big] \\ &= f(S) \cap f(N) \cap \Big[int\big(f(N)\big) \Big]^c \end{aligned}$$

Wenn diese Menge nicht–leer wäre, dann wäre wegen der Surjektivität von f ihr Urbild auch nicht–leer:

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(f(S) \cap \partial f(N)\Big) &= f^{-1}\Big(f(S) \cap \Big[f(N) \setminus int\big(f(N)\big)\Big]\Big) \\ &= f^{-1}\Big(f(S)\Big) \cap f^{-1}\Big(f(N)\Big) \cap f^{-1}\Big(\Big[int\big(f(N)\big)\Big]^c\Big) \\ &= \underbrace{S \cap N}_{f \text{ injektiv}} \cap \Big(f^{-1}\Big(\Big[int\big(f(N)\big)\Big]\Big)\Big)^c \\ &= S \cap N \cap \underbrace{\Big[int\big(f^{-1}(f(N))\big)\Big]^c}_{f \text{ Homöo.}} \\ &= S \cap \underbrace{N \cap [int(N)]^c}_{=\partial N} \\ &= S \cap \partial N \end{aligned}$$

Das steht im Widerspruch zu der Annahme, daß N eine isolierende Umgebung für S ist. Es gilt also $f(S) \cap \partial f(N) = \emptyset$ und damit $f(S) \subseteq int(f(N))$.
Nun kommen wir zur zweiten Behauptung $f(S) = Inv(f(N), F)$. Die Menge $f(S)$ ist eine Teilmenge von $Inv(f(N), F)$: jeder Punkt $y \in f(S)$ hat ein Urbild $x \in S$. Die Trajektorie $(F^k(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ bleibt in S, also gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$, $F^k(y) = F^k(f(x)) = f(F^k(x)) \in f(S)$. Die F–Trajektorie durch y bleibt also in $f(S)$. Die Menge $f(S)$ ist invariantunter F und liegt in $f(N)$, also gilt $f(S) \subseteq Inv(f(N), F)$.
Bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß $Inv(f(N), F) \subseteq f(S)$. Wieder verwenden wir die Kommutativität von f und $f^n = F$. Sei $y \in Inv(f(N), F)$. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gehört $F^k(y)$ zu $f(N)$, also liegt $f^{-1}(F^k(y)) = F^k(f^{-1}(y))$ in N und damit $f^{-1}(y)$ in $Inv(N, F) = S$. Deswegen gilt $y \in f(S)$. Insgesamt gilt $Inv(f(N), F) = f(S)$.
$\square$

Lemma 5.2.3 *Seien S_1 und S_2 isolierte, invariante Mengen eines diskreten, dynamischen Systemes g. Dann ist $S_1 \cup S_2$ auch eine isolierte invariante Menge.*

Beweis. Sei N_1 eine isolierende Umgebung für S_1 und N_2 eine für S_2. Dann gilt $S_1 = Inv(N_1) \subseteq int(N_1)$ und $S_2 = Inv(N_2) \subseteq int(N_2)$.
Wir behaupten, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß der ε–Schlauch um $S_1 \cup S_2$ eine isolierende Umgebung für $S_1 \cup S_2$ bildet. Wie vorhin definieren wir die kompakten Mengen

$$B_\varepsilon(S_i) := \{x \in N_i, d(x, S_i) \leqslant \varepsilon\} \ , \ i \in \{1, 2\},$$

$$B_\varepsilon(S_1 \cup S_2) := \{x \in N_1 \cup N_2, d(x, S_1 \cup S_2) \leqslant \varepsilon\} = B_\varepsilon(S_1) \cup B_\varepsilon(S_2).$$

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt offensichtlich:

$$S_1 \cup S_2 \subseteq int(B_\varepsilon(S_1 \cup S_2)),$$

außerdem ist $S_1 \cup S_2$ invariant, also gilt $S_1 \cup S_2 \subseteq Inv(B_\varepsilon(S_1 \cup S_2))$.
Angenommen, keine der Mengen $B_\varepsilon(S_1 \cup S_2)$ wäre eine isolierende Umgebung für $S_1 \cup S_2$, dann wäre $S_1 \cup S_2 \not\supseteq Inv(B_\varepsilon(S_1 \cup S_2))$, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x(\varepsilon)$ so daß folgendes gilt:

- Es existiert eine volle Trajektorie $(x(\varepsilon)_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ durch $x(\varepsilon)$, die für alle $k \in \mathbb{Z}$ in $B_\varepsilon(S_1 \cup S_2)$ liegt.
- Für jede volle Trajektorie durch $x(\varepsilon)$ gibt es ein $k_1(\varepsilon)$, so daß diese sich zum Zeitpunkt $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ außerhalb von N_1 befindet (sonst wäre ja $x(\varepsilon)$ in S_1).
- Für jede volle Trajektorie durch $x(\varepsilon)$ gibt es ein $k_2(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, so daß diese sich zum Zeitpunkt $k_2(\varepsilon)$ außerhalb von N_2 befindet (sonst wäre ja $x(\varepsilon)$ in S_2).

Es gibt also einen Zeitpunkt $k'(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, bei dem die Trajektorie $(x(\varepsilon)_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sich in $B_\varepsilon(S_1)$ befindet und im nächsten Schritt die kompakte Umgebung N_1 verläßt, oder einen Zeitpunkt $k''(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, bei dem die Trajektorie $(x(\varepsilon)_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sich in $B_\varepsilon(S_2)$ befindet und im nächsten Schritt die kompakte Umgebung N_2 verläßt (oder anders: $k'(\varepsilon)$ ist ein Zeitpunkt, bei dem diese Trajektorie von $B_\varepsilon(S_1)$ zu $B_\varepsilon(S_2) \setminus N_1$ springt; $k''(\varepsilon)$ ist ein Zeitpunkt, bei dem diese Trajektorie von $B_\varepsilon(S_2)$ zu $B_\varepsilon(S_1) \setminus N_2$ springt). Für jede Nullfolge $(\varepsilon_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tritt der eine oder der andere Fall unendlich oft auf. OBdA gibt es eine Teilfolge $(\varepsilon_{p_m})_{m\in\mathbb{N}}$, für die gilt:

1. $x(\varepsilon_{p_m})_{k'(\varepsilon_{p_m})} \in B_\varepsilon(S_1)$
2. $x(\varepsilon_{p_m})_{k'(\varepsilon_{p_m})+1} = g(x(\varepsilon_{p_m})_{k'(\varepsilon_{p_m})}) \notin N_1$
3. Die Folge $(x(\varepsilon_{p_m})_{k'(\varepsilon_{p_m})})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Punkt $s \in S_1$ (wegen der Kompaktheit von N_1 und $d(x(\varepsilon_{p_m}), S_1 \cup S_2) \leqslant \varepsilon_{p_m}$).

Der Punkt s liegt in $S_1 = Inv(N_1, g)$, also gilt $g(s) \in S_1$ ebenfalls.
Sei $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge mit $y_m = x(\varepsilon_{p_m})_{k'(\varepsilon_{p_m})}$, die gegen s konvergiert. Wegen 2. gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, $g(y_m) \notin N_1$. Da g stetig ist, geht $(g(y_m))_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $g(s)$ wenn m gegen unendlich geht, und $g(s) \in cl(N_1^c) = N_1^c \cup \partial N_1$. Also auf jeden Fall $g(s) \notin S_1 \subseteq int(N_1)$, was im Widerspruch zu der vorherigen Schlußfolgerung steht.
Es gibt also tatsächlich ein $\varepsilon > 0$, so daß $B_\varepsilon(S_1 \cup S_2)$ eine isolierende Umgebung für $S_1 \cup S_2$ bildet. $\square$

Lemma 5.2.4 *Sei S eine invariante Menge unter $F = f^n$ und l, $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

$$l \equiv m \pmod n \Rightarrow f^l(S) = f^m(S)$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine kompakte Menge N, so daß $S = Inv(N, F) \subseteq int(N)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$, so daß $l - m = kn$. Sei $x \in f^l(S)$und $y = f^{-l}(x) \in S$. Wegen der Invarianz von S bezüglich F, gilt $F^k(y) \in S$. Daraus folgt :

$$\begin{aligned} f^m\big(F^k(y)\big) &= f^{l-kn}\big(F^k(y)\big) \\ &= f^{l-kn}\big(f^{nk}(y)\big) \\ &= f^l(y) \\ &= x \end{aligned}$$

Damit gilt $x \in f^m(S)$ und schließlich $f^l(S) \subseteq f^m(S)$. Aus Symmetriegründen gilt auch die Gleichheit. $\square$

Dank der Lemmata 5.2.2, 5.2.3 und 5.2.4 können wir jetzt den folgenden Satz formulieren und beweisen:

Satz 5.2.5 *Sei S eine isolierte, invariante Menge bezüglich $F = f^n$. Dann ist $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S)$ eine isolierte invariante Menge bezüglich f.*

Bemerkung 5.2.6 *Kennt man alle isolierten, invarianten Mengen unter F, hat man nach diesem Satz theoretisch Zugang zu allen isolierten, invariante Mengen unter f. Betrachtet man nämlich eine isolierte, invariante Menge unter F, kann man folgendes sagen:*

- *entweder war diese Menge schon unter f isoliert, invariant,*
- *oder diese Menge vereinigt mit bestimmten anderen unter F isolierten, invarianten Mengen ergibt eine unter f isolierte, invariante Menge.*
  Gäbe es eine isolierte, invariante Menge unter f, die in dieser Vereinigung echt enthalten wäre, würde sie nach Satz 5.1.1 als isolierte, invariante Menge unter F vorkommen.

So lassen wir keine unter f isolierte, invariante Menge aus.

Bemerkung 5.2.7 *Nun noch ein paar Worte zum Beweis. Dank des Lemmas 5.2.4 kommen in der endlichen Vereinigung $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S)$ bereits alle Iterationen der Menge S unter f vor. Wir wissen nach Lemma 5.2.2, daß jede Menge $f^l(S)$ unter F isoliert, invariant ist, und nach Lemma 5.2.3, daß diese endliche Vereinigung isolierter, invarianter Mengen wieder isoliert, invariant ist. Lassen wir eine dieser $f^l(S)$ aus, kommt aber nicht unbedingt eine isolierte, invariante Menge bezüglich f dabei heraus.*

Beweis. von Satz 5.2.5
Sei N eine isolierende Umgebung für S bezüglich der Abbildung F. Das heißt, N ist kompakt und es gilt $S = Inv(N, F) \subseteq int(N)$. Nach Lemma 5.2.2 ist $f^l(S)$ eine isolierte, invariante Menge mit isolierender Umgebung $f^l(N)$ für jedes $l \in \{0, \ldots, n-1\}$. Wie vorhin benützen wir folgende Notation, für den ε–Schlauch um $f^l(S)$ geschnitten $f^l(N)$:

$$B_\varepsilon(f^l(S)) := \{x \in f^l(N), d(x, f^l(S)) \leqslant \varepsilon\} \text{ , wobei } l \in \{0, \cdots, n-1\}$$

Wir behaupten jetzt, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, für das $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S))$ eine isolierende Umgebung für $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S)$ bezüglich f bildet.
Dafür wird erstmal das Lemma 5.2.2 auf $S, f(S), \ldots$ angewendet: Die Mengen $f^l(S)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$ sind alle isoliert, invariant bezüglich F mit isolierender Umgebung $f^l(N)$.
Mit Hilfe des Lemmas 5.2.3 und seines Beweises gilt dann weiter, daß

$\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S)$ eine isolierte, invariante Menge unter F ist, und für ein $\varepsilon > 0$, $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S))$ eine isolierende Umgebung bezüglich F bildet. Wir wissen also nun, daß für ein $\varepsilon > 0$

$$int\Big(\bigcup_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S))\Big) \supset \bigcup_{l=0}^{n-1} f^l(S) = Inv\Big(\bigcup_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S)), F\Big),$$

gilt und wollen zeigen, daß

$$\bigcup_{l=0}^{n-1} f^l(S) = Inv\Big(\bigcup_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S)), f\Big)$$

gilt.

Die Inklusion $Inv\Big(\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S)), f\Big) \subseteq Inv\Big(\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S)), F\Big)$ zeigt man folgendermaßen: sei $x \in Inv\Big(\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S)), f\Big)$. Das heißt, daß die Trajektorie $(f^k(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ durch x unter f in der Menge $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S))$ liegt. Dann gilt auch $(f^{nk}(x))_{k\in\mathbb{Z}} = (F^k(x))_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S))$. Anders ausgedrückt liegt die volle F–Trajektorie durch x in der Menge $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S))$ und damit in ihrer maximalen F–invarianten Menge $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S)$. Deswegen gilt

$$Inv\Big(\bigcup_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S)), f\Big) \subseteq \bigcup_{l=0}^{n-1} f^l(S).$$

Kommen wir nun zur Inklusion $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S) \subseteq Inv\Big(\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S)), f\Big)$. Sei dazu $x \in \bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S)$. Wegen der F–Invarianz dieser Menge ist für alle $k \in \mathbb{Z}$, $F^k(x) = f^{nk}(x)$ in $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S)$. Sei m beliebig aus $\mathbb{Z}$. Unser Ziel ist zu zeigen, daß $f^m(x)$ in $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S))$ liegt. Durch Division von m durch n erhalten wir ein eindeutiges Paar $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, so daß $m = qn + r$ und $0 \leqslant r < n$. Es gibt ein $l \in \{0, \cdots, n-1\}$, so daß $f^{nq}(x)$ in $f^l(S)$ liegt. Damit liegt $f^m(x) = f^r(f^{qn}(x))$ in $f^{r+l}(S)$. Da S unter F invariant ist, können wir das Lemma 5.2.4 anwenden

und erhalten, daß $f^m(x)$ ein Element aus $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S)$ ist. Damit gilt automatisch $f^m(x) \in \bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S))$. Die volle f–Trajektorie durch x liegt also in $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S))$, und damit liegt x in $Inv(\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S)), f)$.
Wir haben insgesamt bewiesen, daß $\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S) = Inv\Big(\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} B_\varepsilon(f^l(S)), f\Big)$. □

5.3 Vergleich von $h(S,F)$ und $h(S,f)$

Wir wissen nun, daß unsere zwei diskreten, dynamischen Systeme f und $F = f^n$ gemeinsame isolierte, invariante Mengen haben. Es besteht zwischen dem Conley–Index von S bezüglich F und dem bezüglich f folgender Zusammenhang:

Theorem 5.3.1 *Sei X ein metrischer, lokal kompakter Raum und $f : X \to X$ ein Homöomorphismus auf X und $F = f^n$. Sei S eine Menge, die sowohl unter f als auch unter F isoliert, invariant ist. Dann ist $h(S,F)$, der Conley–Index von S bezüglich F, gleich der n–ten Potenz von $h(S,f)$, dem Conley–Index von S bezüglich f. Oder kurz:*

$$h(S,f^n) = (h(S,f))^n$$

Beweis. Um dies zu beweisen, werden wir für jedes System ein Filtrationspaar geschickt wählen – (N,L) bezüglich f und (N',L') bezüglich F – und zeigen dann, daß $f^n_{(N,L)}$ und $F_{(N',L')}$ shift–äquivalent sind. Zusammen mit der Bemerkung 3.5.2 beweist dies unser Theorem.
Der Beweis besteht aus den folgenden Schritten:

1. Konstruktion von (N,L) und N'
2. Wie lange dauert die "Reise" von N'^{-F} zu N^{-f}?
3. Konstruktion von L'
4. Definition von $s : N'/L' \to N/L$
5. $f^n_{(N,L)} \circ s = s \circ F_{(N',L')} : N'/L' \to N/L$
6. Punkte, die N nie verlassen
7. Punkte, die lange in N bleiben
8. Die anderen Punkte

9. Definition von $r : N/L \to N'/L'$
10. $r \circ f^n_{(N,L)} = F_{(N',L')} \circ r : N/L \to N'/L'$
11. Die Zeitverschiebung

1. Konstruktion von (N, L) und N'
Sei M eine isolierende Umgebung für S bezüglich F. Dann gibt es nach Lemma 3.1.8 und Satz 3.2.7 ein Filtrationspaar (N, L) für S bezüglich f mit $N \subseteq M$. Die Menge $cl(N \setminus L)$ enthält dann S in ihrem Inneren und ist kompakt. Nach Lemma 1.2.9 ist dann $cl(N \setminus L)$ eine isolierende Umgebung für S bezüglich F. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, daß $N' := cl(C_{\varepsilon,F}(cl(N \setminus L), S))$ (wobei man mit dem Index F "ε–Kette bezüglich F" meint; diese Menge wird in 3.1.6 definiert.) folgende Bedingung erfüllt:

$$N' \cap F^{-1}(N') \subseteq \bigcap_{k=1}^{n-1} f^{-k}(N)$$

Diese Bedingung garantiert: wenn x und $F(x)$ in N' liegen, verlässt die f–Trajektorie durch x inzwischen N nicht. Für ein solches x und alle $p \in \{0, ..., n\}$ gilt dann $f^p(x) \in N$. Diese Wahl von ε ist möglich wegen der Kompaktheit von N, der Stetigkeit von f und des Lemma 3.1.8.

2. Wie lange dauert die "Reise" von N'^{-F} zu N^{-f}?
Bevor wir im Schritt 3 das Filtrationspaar (N', L') zu Ende konstruieren, müssen wir uns versichern, daß die "Reise" von N'^{-F} zu N^{-f} nicht beliebig lang dauern kann. Dazu beweisen wir, daß jede Vorwärtstrajektorie durch einen Punkt aus N'^{-F} in der Menge N^{-f} hereinläuft und daß es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß alle solche Trajektorien vor dem Zeitpunkt k die Menge N^{-f}erreicht haben.
Sei $x \in N'^{-F}$. Angenommen $f^k(x) \in N$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$. Diese Annahme werden wir zu einem Widerspruch führen. Nach Lemma 1.2.11 liegt dann die ω–Limesmemge $\omega_f(x)$ von x bezüglich f in S. Also gilt auch

$$\omega_F(x) \subseteq \omega_f(x) \subseteq S \subseteq int(N').$$

Deswegen finden wir ein $p \in \mathbb{N}$ mit $F^p(x) \in int(N')$.
Wir hatten $x \in N'^{-F}$ gewählt, das heißt $F(x) \notin int(N')$. Wir zeigen jetzt, daß unsere Annahme zu einem Widerspruch zu $F(x) \notin int(N')$ führt. Dabei wiederholen wir die gleiche Konstruktion wie im Beweis vom Satz 3.4.3. Eine passende Abbildung dazu wäre 3.3, wenn man einige Punkte richtig umnennt.
Nach Lemma 3.1.7 gilt $int(N') = C_{\varepsilon,F}(cl(N \setminus L), S)$. Die Stetigkeit von F liefert ein $\delta > 0$, so daß für alle $y \in X$ folgt $d(F(x), F(y)) < \varepsilon$ aus $d(x, y) < \delta$. Da x in N' liegt, gibt es in jeder Umgebung von x Elemente aus $C_{\varepsilon,F}(cl(N \setminus L), S)$. Wir wählen ξ_0 aus $C_{\varepsilon,F}(cl(N \setminus L), S)$ mit $d(x, \xi_0) < \min\{\delta, \varepsilon\}$ und $\{\xi_i\}_{-p \leqslant i \leqslant p}$ eine ε–Kette durch x_{i_0} in $cl(N \setminus L)$ von S zu S.

Außerdem hatten wir $F^p(x) \in int(N') = C_{\varepsilon,F}(cl(N \setminus L), S)$, also gibt es eine ε–Kette $\{\chi_i\}_{-m\leqslant i\leqslant m}$ durch $F^p(x)$ in $cl(N \setminus L)$ von S zu S.
Nach der Annahme, daß $f^k(x) \in N$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, sind insbesondere $F(x), F^2(x), \cdots, F^{p-1}(x)$ in N enthalten. Daher kann keines dieser $F^i(x)$ in L sein, sonst wäre der Rest der f–Trajektorie in L wegen der dritten Filtrationspaareigenschaft und $F^p(x)$ könnte dann unmöglich in $int(N') \subseteq cl(N \setminus L)$ sein. Es gilt also $F(x), F^2(x), \cdots, F^{p-1}(x) \in cl(N \setminus L)$.
Nun konstruieren wir eine ε–Kette durch $F(x)$ in $cl(N \setminus L)$ von S zu S:

- Wir folgen die ε–Kette $\{\xi_i\}_{-p\leqslant i\leqslant p}$ von $\xi_{-p} \in S$ bis ξ_0.
- Dann springen wir zu $F(x), F^2(x), \cdots, F^p(x)$.
- Weiter folgen wir die ε–Kette $\{\chi_i\}_{-m\leqslant i\leqslant m}$ von $\chi_0 = F^p(x)$ bis $\chi_m \in S$.
- Nun müssen wir noch am Anfang oder am Ende verlängern, je nachdem ob p oder m größer ist. Es ist aber kein Problem da $\xi_{-p} \in S$, $\chi_m \in S$ und S invariant unter F ist.

Dies liefert wirklich eine ε–Kette: Bei dem Sprung von ξ_0 zu $F(x)$ haben wir wegen der Wahl von ξ_0 die Ungleichung $d(F(\xi_0), F(x)) < \varepsilon$ und sonst sind die Ungleichungen einer ε–Kette trivialerweise erfüllt.
Die Existenz dieser ε–Kette durch $F(x)$ in $cl(N \setminus L)$ von S zu S widerspricht $F(x) \notin int(N')$. Dies beweist, daß zu jedem $x \in N'^{-F}$ ein $p(x) \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^{p(x)}(x) \notin N$ und zwar $p(x) \geqslant 1$, da $x \in N'^{-F} \subseteq N' \subseteq N$.
Da N^c offen ist, gilt in einer offenen Umgebung U_x von $x \in N'^{-F}$, daß $f^{p(x)}(y)$ nicht in N liegt für alle $y \in U_x$. Für ein $l \leqslant p(x) - 1$ ist $f^l(y)$ in N^{-f}, da die Trajektorie durch y die Menge N durch ihre Exitmenge N^{-f} veläßt. Die Menge N'^{-F} ist aber kompakt: aus der Überdeckung

$$\bigcup_{x\in N'^{-F}} U_x \supseteq N'^{-F}$$

gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$N'^{-F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i}.$$

Es liefert ein $k \in \mathbb{N}$, $k := \max\{p(x_i) - 1 : i = 1, \ldots, r\}$, so daß zu jedem $x \in N'^{-F}$ es ein $k(x) \in \{0, \ldots, k\}$ mit $f^{k(x)}(x) \in N^{-f}$ gibt. Anders ausgedrückt gilt die Inklusion

$$N'^{-F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} f^{-i}(N^{-f}).$$

Aus technischen Gründen wollen wir für k ein Vielfaches von n haben: oBdA $k = np$, sonst wählt man k eben größer und die obere Inklusion bleibt richtig.
Die Reise von N'^{-F} zu N^{-f} dauert höchsten bis zum Zeitpunkt k.

3. Konstruktion von L'

Nun müssen wir noch eine genügend kleine kompakte Umgebung L' von N'^{-F}, der Exitmenge von N' bezüglich F, aussuchen, damit (N', L') ein Filtrationspaar für S bezüglich F wird (siehe Satz 3.2.7).
Die Menge L ist eine Umgebung von N^{-f} in N, also kann man für L' eine so kleine Umgebung von N'^{-F} wählen, daß gilt

$$L' \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} f^{-i}(L).$$

Dazu benützen wir das Argument, daß f im Kompaktum N gleichmässig stetig ist. Insgesamt haben wir also, daß es für alle $x \in L'$ ein $k(x) \in \{0, \ldots, k\}$ gibt mit $f^{k(x)}(x) \in L$.

4. Definition von $s : N'/L' \to N/L$

Seien $p_1 : N \to N/L$ und $p_2 : N' \to N'/L'$ die Quotientenabbildungen. Nun definieren wir die Abbildung $s : N'/L' \to N/L$ durch:

$$s(p_2(x)) = f^k_{(N,L)}(p_1(x))$$

Als erstes beweisen wir, daß diese Abbildung basispunkterhaltend ist: sei $x \in L'$, das heißt $p_2(x) = p_2(*)$ und sei $k(x) \leqslant k$ das Minimum von $\{p \in \mathbb{N} : f^p(x) \in L$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
f^{k(x)-1}_{(N,L)}(p_1(x)) &= \quad p_1(f^{k(x)-1}(x)) \neq p_1(*) && \text{da } f^{k(x)-1}(x) \in N \setminus L \\
f^{k(x)}_{(N,L)}(p_1(x)) &= \quad p_1(f^{k(x)}(x) = p_1(*) && \text{da } f^{k(x)}(x) \in L \\
f^{k}_{(N,L)}(p_1(x)) &= \quad p_1(*) && \text{da } k \geqslant k(x)
\end{aligned}$$

Wir bemerken auch, daß $s(p_2(x))$ nicht vom Repräsentant x abhängt: Nur für $x \in L'$ enthält $p_2(x)$ mehr als ein Element, und $f^k_{(N,L)}(p_1(\xi)) = p_1(*)$ für alle $\xi \in p_2(x)$. Die Abbildung s ist also wohldefiniert.
Als zweites beweisen wir, daß diese Abbildung stetig ist:

- Auf $(N'/L') \setminus \{p_2(*)\}$: diese Menge kann man mit $N' \setminus L' \subseteq N \setminus L$ identifizieren. Die Stetigkeit folgt dann aus der Stetigkeit von p_1 und $f_{(N,L)}$.
- An der Stelle $p_2(*)$: wir haben k so gewählt, daß die Stetigkeit gewährleistet ist. Sei nämlich $(p_2(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus$(N'/L') \setminus \{p_2(*)\}$, die gegen $p_2(*)$ konvergiert. Es bedeutet, daß sich die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N' \setminus L'$ gegen L' häuft. Für jede konvergierende Teilfolge $x_{n_k} \to x \in L'$ gibt es ein $k(x) \leqslant k$ mit $f^{k(x)}(x_{n_k}) \to f^{k(x)}(x) \in L$. Nach Definition von $f_{(N,L)}$, gilt $f^k_{(N,L)}(p_1(x_{n_k})) \to p_1(*)$.

5. $f^n_{(N,L)} \circ s = s \circ F_{(N',L')} : N'/L' \to N/L$
Nun wollen wir überprüfen, ob die Gleichung $f^n_{(N,L)} \circ s = s \circ F_{(N',L')}$ erfüllt ist. Dafür erst eine Bemerkung Üuber die Bedingung $N' \cap F^{-1}(N') \subseteq \bigcap_{k=1}^{n-1} f^{-k}(N)$, die wir an N' gestellt hatten: Sei $x \in N'$ mit $p_2(x) \neq p_2(*)$, das heißt $x \in L'$. Dann gilt $x \in N'$ und $F(x) \in N'$, da (N', L') ein Filtrationspaar bezüglich F ist. Nach der oberen Bedingung gilt $\{x, f(x), \ldots, f^n(x)\} \subseteq N$. Keines der $f^i(x)$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, kann in L nach der dritten Eigentschaft eines Filtrationspaar sein: Sonst könnte $f^n(x)$ nicht in $N' \subseteq cl(N \setminus L)$ zurückgekehrt sein, ohne davor N verlassen zu haben. Daraus folgt $f^i_{(N,L)}(p_1(x)) \neq p_1(*)$ für alle $x \in N'$ mit $p_2(x) \neq p_2(*)$ und alle $i \in \{0, \ldots, n\}$. Insbesondere gilt, nach Definition von $f_{(N,L)}$: $f^n_{(N,L)}(p_1(x)) = p_1(f^n(x))$ für alle $x \in N'$ mit $p_2(x) \neq p_2(*)$. Deswegen gilt folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
f^n_{(N,L)} \circ s(p_1(x) &= f^n_{(N,L)} \circ f^k_{(N,L)}(p_1(x) \\
&= f^k_{(N,L)} \circ f^n_{(N,L)}(p_1(x) \\
&= \begin{cases} p_1(*) & \text{,falls } p_2(x) = p_2(*) \\ f^k_{(N,L)}(p_1(f^n(x)) & \text{,sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
s \circ F_{(N',L')}(p_2(x)) &= \begin{cases} s(p_2(*)) & \text{,falls } p_2(x) = p_2(*) \\ s(F_{(N',L')}(p_2(x)) = s(p_2(f^n(x))) & \text{,sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} p_1(*) & \text{,falls } p_2(x) = p_2(*) \\ f^k_{(N,L)}(p_1(f^n(x))) & \text{,sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Also stimmen tatsächlich $f^n_{(N,L)} \circ s$ und $s \circ F_{(N',L')}$ überrein. Damit ist der Schritt 5 zu Ende.

Nun wollen wir eine geeignete Abbildung $r : N/L \to N'/L'$ konstruieren. Dafür machen wir erst folgende Überlegungen:
Die Menge N besteht aus Punkten x, die eine dieser zwei Eigenschaften haben:

1. Die f–Vorwärtstrajektorie durch x bleibt in N.
   Daraus folgt nach Lemma 1.2.11 $\omega_f(x) \subseteq S \subseteq int(N')$, also existiert es ein $p(x) \in \mathbb{N}$, so daß $f^p(x) \in int(N')$ für alle $p \geqslant p(x)$. Oder

2. Die f–Vorwärtstrajektorie durch x verlässt N.

Ein Punkt kann nicht gleichzeitig die Eigenschaften 1 und 2 haben!
6.Punkte, die N nie verlassen
Wir definieren für jedes $x \in N$ mit der Eigenschaft 1

$$k(x) = \min\big\{p(x) \in \mathbb{N} : f^p(x) \in int(N') \text{ für alle } p \geqslant p(x)\big\}.$$

Wir werden indirekt Zeigen, daß $\{k(x) : x \in N_1\}$ beschränkt ist. Das heißt folgendes: Die Punkte, die N nie verlassen, haben nicht beliebig viel Zeit, bevor ihre f–Vorwärtstrajektorie in $int(N')$ "gefangen" wird.Sei N_1 die Menge aller Punkten aus N mit der Eigenschaft 1. Die Annahme

$$\sup\left\{k(x) : x \in N_1\right\} = +\infty$$

führt zu einem Widerspruch: es gäbe dann eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in N_1 und $k(x_n) \geqslant n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt $f^p(x_n) \notin int(N')$ für alle $p \leqslant n$. Da N kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergierende Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to x$. Weiter konvergiert die Folge $(f^p(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f^p(x)$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Da $f^p(x_{n_k}) \notin int(N')$ für alle $p \leqslant n_k$, gilt $f^p(x) \notin int(N')$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Die f–Vorwärtstrajektorie durch einen solchen Punkt x kann nach Lemma 1.2.11 nicht in N bleiben, da sie sich sonst gegen $S \subseteq int(N')$ häufen müsste. Es gibt also ein $l \in \mathbb{N}$ mit $f^l(x) \notin N$. Für k groß genug ist aber x_{n_k} so nah an x, daß auch $f^l(x_{n_k}) \notin N$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Eigenschaft 1. Es gilt also $\sup\left\{k(x) : x \in N_1\right\} < +\infty$. Wir definieren K_1 als das kleinste Vielfache von n, das größer als $\sup\left\{k(x) : x \in N_1\right\}$ ist.

Wir behaupten, daß N_1 abgeschlossen ist: sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergierende Folge, mit $x_n \in N_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gäbe es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $f^p(x) \notin N$, würde auch $f^p(x_n) \notin N$ für n groß genug gelten. Das widerspricht aber $x_n \in N_1$.

7. Punkte, die lange in N bleiben

Die Abbildung f^{K_1} ist stetig, also ist die Menge $f^{-K_1}(int(N')) \cap N$ offen in N und bildet eine in N offene Umgebung der abgeschlossenen Menge N_1: für alle $x \in N_1$ gibt es ein $k(x) \leqslant K_1$ mit $f^k(x) \in int(N')$ für alle $k \geqslant k(x)$, also insbesondere für $k = K_1$. Daher existiert ein $\delta' > 0$, so daß der offene δ'–Schlauch um N_1, $\left\{x \in N : d(x, N_1) < \delta'\right\}$, in $f^{-K_1}(int(N')) \cap N$ enthalten ist. Diese Inklusion stimmt auch für jeden δ–Schlauch um N_1 mit $\delta \leqslant \delta'$.

Es gilt $d(N_1, L) > 0$, da die Mengen L und N_1 disjunkt sind (sieh zum Beispiel die Eingenschaft 3 der Definition eines Filtrationspaares und Lemma 1.2.11) und als abgeschlossene Teilmengen eines Kompaktums kompakt.

Wegen der gleichmässigen Stetigkeit von f auf dem Kompaktum N gibt es zu jedem $l \in \{0, \ldots, K_1 + k\}$ ein $\delta_l > 0$, so daß für alle $x, y \in N$ folgt $d(f^l(x), f^l(y)) < \frac{1}{2}d(N_1, L)$ aus $d(x, y) < \delta_l$.

Wir definieren nun

$$\delta := \min\{\delta', \delta_0, \ldots, \delta_{K_1}\}$$

und

$$N_2 := \left\{x \in N : d(x, N_1) < \delta\right\} \subseteq f^{-K_1}(int(N')) \cap N$$

Diese Wahl von δ garantiert uns folgende Eigenschaft: Wenn x in N_2 liegt, findet man für alle $l \in \{0, \ldots, K_1 + k\}$ ein $\xi \in N_1$ mit $d(x, \xi) < \delta_l$. Dann ist nach Definition von N_1 $f^l(\xi)$ wieder in N_1 und $d(f^l(x), f^l(\xi)) < \frac{1}{2}d(N_1, L)$. Nun ist

$$d(N_1, L) \leqslant d(f^l(\xi), L) \leqslant \underbrace{d(f^l(\xi), f^l(x))}_{< \frac{1}{2}d(N_1,L)} + d(f^l(x), L).$$

Daraus folgt $d(f^l(x),L) \geqslant \frac{1}{2}d(N_1,L) > 0$, also gilt $f^l(x) \notin L$ für alle $l \in \{0,\dots,K_1+k\}$. Die Menge L enthält aber die Exitmenge von N: die f–Trajektorie durch x kann daher die Menge N zwischen die Zeitpunkte 0 und K_1+k nicht verlassen. Insgesamt gilt also für alle $x \in N_2$

- $f^{K_1}(x) \in int(N')$ und
- $f^l(x) \in N \setminus L$ für alle $l \in \{0,\dots,K_1+k\}$.

8. Die anderen Punkte
Nun ist $N \setminus N_2$ abgeschlossen und daher kompakt. Alle Punkte aus $N \setminus N_2$ haben die Eigenschaft 2, das heißt ihre f–Vorwärtstrajektorien verlassen N: für alle $x \in N \setminus N_2$ gibt es ein $p(x) \in \mathbb{N}$ mit $f^{p(x)}(x) \notin N$. Wir zeigen in diesem Schritt, daß es nicht beliebig lange dauert, bevor diese Trajektorien durch den Exit–set L aus der Menge N herausgehen. Dafür benützen wir ein Kompaktheitsargument.
Sei nun $x \in N$ mit der Eigenschaft 2 und $p(x) \in \mathbb{N}$ mit $f^{p(x)}(x) \notin N$. Die Menge L enthält die Exitmenge N^{-f} von N, also muß es ein $0 \leqslant l < p(x)$ geben mit $f^l(x) \in L$. Wir nennen $k(x)$ das Minimum von allen solchen l.
Da N^c offen ist, gibt es zu jedem solchen x eine offene Umgebung V_x von x, so daß $f^{p(x)}(y) \notin N$ für alle $y \in V_x$. Dann gilt

$$N \setminus N_2 \subseteq \bigcup_{x \in N \setminus N_2} V_x.$$

Die Menge $N \setminus N_2$ ist kompakt, also existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$N \setminus N_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} V_{x_i},$$

wobei $x_i \in N \setminus N_2$, $i = 1\dots,r,$. Sei K_2 das kleinste Vielfache von n größer als $\max\left\{p(x_i) : i = 1,\dots,r\right\}$, und $P_2 \in \mathbb{N}$, so daß $K_2 = nP_2$. Dann gibt es zu jedem $x \in N \setminus N_2$ ein $k(x) \in \mathbb{N}$, $k(x) \leqslant K_2$, mit $f^{k(x)}(x) \in L$.
9. Definition von $r : N/L \to N'/L'$
Nun definieren wir $K := \max\{K_1, K_2\}$. Für ein $P \in \mathbb{N}$ gilt $K = nP$, da wir schon für $K_{1,2}$ Vielfache von n gewählt hatten.
Nun haben wir alle Zutaten, um $r : N/L \to N'/L'$ zu definieren : für alle $p_1(x) \in N/L$ setzen wir

$$r(p_1(x)) = \begin{cases} F^{P-P_1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1}(x))) & \text{falls } x \in N_2 \\ p_2(*) & \text{falls } x \in N \setminus N_2 \end{cases}$$

Kurz gesagt: r “wartet” darauf, daß die F–Trajektorien durch $x \in N$ in der Menge N' kommt und wendet dann $F_{(N',L')}$ an, bis insgesamt der Zeitpunkt P erreicht ist.

Wenn $x \in N_1$ liegt, gilt $r(p_1(x)) = F_{(N',L')}^{P-P_1}(p_2(F^{P_1}(x))) = p_2(F^P(x))$.
Diese Abbildung ist basispunkterhaltend: als erstes bemerken wir, daß L in $N \setminus N_2$ enthalten ist. Damit ist es klar, daß gilt $r(p_1(*)) = p_2(*)$.
Diese Abbildung ist wohldefiniert: $f^{K_1}(x) = F^{P_1}(x)$ liegt in $int(N')$ für alle $x \in N_1$, so daß $p_2(F^{P_1}(x))$ Sinn macht. Außerdem hängt $r(p_1(x))$ nicht vom Repräsentant x ab, da $p_1(x) = \{x\}$ genau dann wenn $x \notin L$ und für alle x in L ist das Bild durch r gleich $p_2(*)$.
Nun zur Stetigkeit von r. Da $N \setminus N_2$ abgeschlossen ist, reicht es folgende Überlegung: Sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in N_2, die gegen $x \in N \setminus N_2$ konvegiert – und damit auch $(p_2(x_l)) \to p_2(x)$. Wir hatten schon in Schritt 8 eine offene Überdeckung von $N \setminus N_2$ konstruiert: $N \setminus N_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^r V_{x_i}$. Also gibt es ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ mit $x \in V_{x_i}$.
Für l groß genug ist auch x_l in V_{x_i}. Nach Konstruktion gilt für ein $p(x_i) \leqslant K_2$ $f^{p(x_i)}(x_l) \notin N$. Insbesondere liegt $f^{p(x_i)}(x_l)$ nicht in N'.
Die Euklidische Division von $p(x_i)$ durch n liefert ein $q \in \mathbb{N}$ mit $qn \leqslant p(x_i) < (q+1)n$. Wegen der Bedingung $N' \cap F^{-1}(N') \subseteq \bigcap_{k=1}^{n-1} f^{-k}(N)$, die wir in Schritt 1 an N' gestellt hatten, kann nicht $F^q(x_l) \in N'$ und $F^{(q+1)}(x_l) \in N'$ gelten. Eins von beiden liegt also nicht in N' und insbesondere nicht in $int(N')$. Die F–Trajektorie muß davor in der Exitmenge $N'^{-F} \subseteq L'$ gewesen sein: es existiert ein $k(x_l) \leqslant q$ mit $F^{k(x_l)}(x_l) \in N'^{-F} \subseteq L'$. Es gilt

$$k(x_l)n \leqslant qn \leqslant p(x_i) \leqslant K_2 = nP_2,$$

also $k(x_l) \leqslant P_2$
Außerdem ist $k(x_l)$ größer gleich P_1: wenn nicht, leiten wir einen Widerspruch her. Aus $x_l \in N_2$ folgt $F^{P_1}(x_l) = f^{K_1}(x_l) \in int(N')$. Es gilt $k(x_l) + 1 \leqslant P_1$ nach Annahme und man kann durch $F^{k(x_l)+1}(x_l)$ eine ε–Kette in $cl(N \setminus L)$ von S zu S konstruieren (dieser Argument wurde vorher im Beweis schon ausgeführt, siehe Schritt 2), was $F^{k(x_l)+1}(x_l) \notin int(N')$ widerspricht.
Insgesamt gilt $P_1 \leqslant k(x_l) \leqslant P_2$ und $F^{k(x_l)}(x_l) \in L'$, also

$$r(p_1(x_l)) = F_{(N',L')}^{P-P_1}(p_2(F^{P_1}(x_l))) = p_2(*).$$

Es beweist die Stetigkeit von r.
10. $r \circ f_{(N,L)}^n = F_{(N',L')} \circ r : N/L \to N'/L'$
Die obere Gleichung wollen wir nun zeigen. Sei $p_1(x) \in N/L$.
Erst bemerken wir, daß aus $0 \neq K_1 = nP_1$ folgt $K_1 \geqslant n$.
Wir rechnen erst für den Fall $x \in N_2$:
Es gilt $f^{K_1}(x) \in int(N')$ und $f^l(x)$ in $N \setminus L$ für alle $l \leqslant n \leqslant K_1$. Deswegen gilt :

$$\begin{aligned} r \circ f_{(N,L)}^n(p_1(x)) &= r(p_1(f^n(x))) \\ &= r(p_1(F(x))) \\ &= \begin{cases} F_{(N',L')}^{P-P_1}(p_2(F^{P_1+1}(x))) & \text{, falls } F(x) \in N_2 \\ p_2(*) & \text{, falls } F(x) \in N \setminus N_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Da $x \in N_2$, gilt $F^{P_1}(x) \in int(N')$, also $p_2(F^{P_1+1}(x)) = F_{(N',L')}(F^{P_1}(x))$. Daher

$$r \circ f^n_{(N,L)}(p_1(x)) = \begin{cases} F^{P-P_1+1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1}(x))) & \text{, falls } F(x) \in N_2 \\ p_2(*) & \text{, falls } F(x) \in N \setminus N_2 \end{cases}$$

Wenn $F(x)$ in $N \setminus N_2$ liegt, gilt aber auch $F^{P-P_1+1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1}(x))) = p_2(*)$: Es existiert $k(F(x)) \leqslant K_2$ mit $f^{k(F(x))}(F(x)) = f^{k(F(x))+n}(x) \in L$. Es muß dann $K_1 \leqslant k(F(x)) + n \leqslant K_2 + n$ gelten, da $x \in N_2$. Die euklidische Division von $k(F(x)) + n$ durch n ergibt $q(x)$ mit $K_1 \leqslant q(x)n < (q(x)+1)n \leqslant K_2 + n$. Wegen der Bedingung $N' \cap F^{-1}(N') \subseteq \bigcap_{k=1}^{n-1} f^{-k}(N)$, die wir an N' gestellt hatten, muß $F^{q(x)}(x)$ oder $F^{q(x)+1}(x)$ außerhalb von $int(N')$ liegen. Außerdem folgt aus $K_i = nP_i$, $i = 1,2$, folgende Ungleichung: $P_1 \leqslant q(x) < q(x)+1 \leqslant P_2 + 1$. Da $F^{P_1}(x)$ in $int(N')$ liegt, muß es zwischen P_1 und $P_2 + 1 \leqslant P + 1$ ein l geben mit $F^l(x) \in N'^{-F} \subseteq L'$. Also wie vorhergesagt

$$F^{P-P_1+1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1}(x))) = F^{P+1-l}_{(N',L')}(\underbrace{p_2(F^l(x))}_{=p_2(*)}) = p_2(*).$$

Es gilt also $r \circ f^n_{(N,L)}(p_2(x)) = F^{P-P_1+1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1}(x)))$ für alle $x \in N_2$.
Für $x \in N_2$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} F_{(N',L')} \circ r(p_1(x)) &= F_{(N',L')}(F^{P-P_1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1}(x)))) \\ &= F^{P-P_1+1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1}(x))). \end{aligned}$$

$F_{(N',L')} \circ r(p_1(x))$ und $r \circ f^n_{(N,L)}(p_1(x))$ stimmen für $x \in N_2$ überrein.
Falls $x \in N \setminus N_2$, gilt $F_{(N',L')} \circ r(p_1(x)) = F_{(N',L')}(p_2(*)) = p_2(*)$.
Außerdem gibt es ein minimales $k(x) \leqslant K_2$, so daß $f^{k(x)}(x) \in L$:
Falls $k(x) \leqslant n$ gilt $r(\underbrace{f^n_{(N,L)}(p_1(x))}_{=p_1(*)}) = p_2(*)$.

Sonst gilt:

$$\begin{aligned} r(f^n_{(N,L)}(p_1(x))) &= r(p_1(f^n(x))) \\ &= r(p_1(F(x))) \\ &= \begin{cases} F^{P-P_1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1+1}(x))) & \text{, falls } F(x) \in N_2 \\ p_2(*) & \text{, sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Nun wenn $F(x) \in N_2$, gilt $f^l(F(x)) = f^{l+n}(x) \in N \setminus L$ für alle $l \in \{0, \ldots, K_1 + k\}$ nach unserer Wahl von N_2 – Die Menge der Punkte, die lange in N bleiben. Außerdem sind wir in dem Fall, bei dem $k(x) > n$: vor dem Zeitpunkt $n+1$ kommt die Trajektorie nicht in L, also liegt $f^l(x)$ in $N \setminus L$ für alle $l \in \{0, \ldots, K_1 + k\}$. Es gilt außerdem $k \geqslant n$. Daraus folgt $K_2 \geqslant k(x) > K_1 + k + n$. Wieder gilt nach der Bedingung $N' \cap F^{-1}(N') \subseteq \bigcap_{k=1}^{n-1} f^{-k}(N)$ für den Quotient $q(x)$ der Division $k(x) : n$ folgendes:

- $K_2 \geqslant (q(x)+1)n > k(x) \geqslant q(x)n \geqslant K_1 + n$,
  also $P_2 \geqslant q(x)+1 > q(x) \geqslant P_1 + 1$ und

- $F^{q(x)}(x)$ oder $F^{q(x)+1}(x)$ liegt außerhalb von $int(N')$.

Da $F(x)$ in N_2 liegt, liegt nach Definition von N_2 der Punkt $F^{P_1+1}(x)$ in $int(N')$, also muß es ein l mit $P_1 + 1 \leqslant l \leqslant q(x) \leqslant P_2 \leqslant P$ geben, so daß $F^l(x) \in L'$. Damit gilt $F^{P-P_1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1+1}(x))) = F^{P+1-l}_{(N',L')}(\underbrace{p_2(F^l(x))}_{=p_2(*)}) = p_2(*)$.

Insgesamt haben wir gezeigt, daß $F_{(N',L')} \circ r(p_1(x)) = p_2(*) = r \circ f^n_{(N,L)}(p_1(x))$ für alle $x \in N_2$.
Damit ist $F_{(N',L')} \circ r = r \circ f^n_{(N,L)}$ bewiesen.

11. Die Zeitverschiebung

Als letztes muß man noch beweisen, daß es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $r \circ s = F^m_{(N',L')}$ und $s \circ r = (f^n_{(N,L)})^p = f^{np}_{(N,L)}$.

$$
\begin{aligned}
r \circ s(p_2(x)) &= r \circ f^k_{(N,L)}(p_1(x)) \\
&= \begin{cases} r(p_1(*)) & \text{, falls } \exists l \leqslant k : f^l(x) \in L \\ r(p_1(f^k(x)) & \text{, sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} p_2(*) & \text{, falls } \exists l \leqslant k : f^l(x) \in L \text{ oder } f^k(x) \in N \setminus N_2 \\ F^{P-P_1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1}(f^k(x)))) & \text{, sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} p_2(*) & \text{, falls } \exists l \leqslant k : f^l(x) \in L \text{ oder } f^k(x) \in N \setminus N_2 \\ F^{P-P_1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1+p}(x))) & \text{, sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} p_2(*) & \text{, falls } \begin{cases} \exists l \leqslant k : f^l(x) \in L \text{ ,} \\ f^k(x) \in N \setminus N_2 \text{ oder} \\ \exists q \in \{0, \ldots, P - P_1\} : F^q(F^{P_1+p}(x)) \in L' \end{cases} \\ p_2(F^{P+p}(x) & \text{, sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} p_2(*) & \text{, falls } \begin{cases} \exists l \leqslant k : f^l(x) \in L \text{ ,} \\ F^p(x) \in N \setminus N_2 \text{ oder} \\ \exists q \in \{P_1 + p, \ldots, P + p\} : F^q(x) \in L' \end{cases} \\ p_2(F^{P+p}(x)) & \text{, sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Behauptung: Die Zeitverschiebung ist gleich $P + p$. Dafür ist zu zeigen

$$
r \circ s(p_2(x)) = F^{P+p}_{(N',L')}(p_2(x)) = \begin{cases} p_2(*) & \text{, falls } \exists l \in \{0, \ldots, P+p\} : F^l(x) \in L' \\ p_2(F^{P+p}(x)) & \text{, sonst} \end{cases}
$$

Oder anders ausgedrückt, für alle $x \in N'$:

$$\exists l \in \{0,\ldots,P+p\} : F^l(x) \in L' \Leftrightarrow \begin{cases} \exists l \leqslant k : f^l(x) \in L\ , \\ F^p(x) \in N \setminus N_2 \text{ oder} \\ \exists q \in \{P_1+p,\ldots,P+p\} : F^q(x) \in L'. \end{cases}$$

Wir fangen mit der Implikation "$\Leftarrow$" an:

- $\exists q \in \{P_1+p,\ldots,P+p\} : F^q(x) \in L' \Rightarrow \exists l \in \{0,\ldots,P+p\} : F^l(x) \in L'$!
- Im Fall $F^p(x) \in N \setminus N_2$: nach Konstruktion existiert ein $k(F^p(x)) \leqslant K_2$, so daß $f^{k(F^p(x))}(F^p(x))$ in L liegt. Wir verwenden ein schon bekanntes Argument: wenn $q(F^p(x))$ der Quotient der Division $\big(k(F^p(x))+nP\big) : n$ ist, dann gilt $q(F^p(x)) < q(F^p(x)) + 1 \leqslant P_2 + p \leqslant P + p$ und $F^{q(F^p(x))}(x) \notin int(N')$ oder $F^{q(F^p(x))+1}(x) \notin int(N')$. Daher gibt es ein l mit $0 \leqslant l \leqslant q(F^p(x)) \leqslant P+p$ mit $F^l(x) \in L'$.
- Im Fall $\exists l \leqslant k : f^l(x) \in L$, verwendet man wieder das gleiche Argument: wenn $q(x)$ der Quotient der Division $l : n$ ist, dann gilt $q(x) \leqslant p \leqslant P+p$ und es gibt ein $0 \leqslant m \leqslant q(x) \leqslant P+p$ mit $F^m(x) \in L'$.

Nun die Implikation "$\Rightarrow$":
Diese beweisen wir indirekt. Angenommen, die Ausage

$$\begin{cases} \exists l \leqslant k : f^l(x) \in L\ , \\ F^p(x) \in N \setminus N_2 \text{ oder} \\ \exists q \in \{P_1+p,\ldots,P+p\} : F^q(x) \in L' \end{cases}$$

ist falsch. Wir zeigen, daß es kein $l \in \{0,\ldots,P+p\}$ mit $F^l(x) \in L'$ gibt.
Sei $x \in N'$. Unsere Vorausetzungen lauten

1. $\forall l \leqslant k : f^l(x) \notin L$,
2. $F^p(x) \notin N \setminus N_2$ und
3. $\forall q \in \{P_1+p,\ldots,P+p\} : F^q(x) \notin L'$.

Wegen Vorausetzung 3 bleibt nur noch zu zeigen, daß es kein $l \in \{0,\ldots,P_1+p-1\}$ mit $F^l(x) \in L'$ geben kann. Die Aussage $F^p(x) \notin N \setminus N_2$ ist äquivalent zu $F^p(x) \notin N$ oder $F^p(x) \in N_2$. Aus $F^p(x) = f^k(x) \notin N$ folgt, daß es einen Zeitpunkt $l \leqslant k$ gibt, bei dem die f–Vorwärtstrajektorie durch x sich in der Exitmenge L befindet. Dies widerspricht aber der Voraussetzung 1. Es gilt also $F^p(x) = f^k(x) \in N_2$. Wir hatten die Menge N_2 so konstruiert, daß $f^l(f^k(x))$ in $N \setminus L$ für alle $l \in \{0,\ldots,K_1+k\}$ liegt. Die f–Vorwärtstrajektorie durch x erreicht

also die Menge L nicht zwischen den Zeitpunkten k und $K_1 + 2k$.
Insgesamt bleibt die f–Vorwärtstrajektorie durch ein $x \in N'$ mit den drei oben genannten Voraussetzungen mindestens bis zum Zeitpunkt $K_1 + 2k$ in $N \setminus L$ – bis k wegen Voraussetzung 1, bis $K_1 + 2k$ wegen Vorausetzung 2. Gäbe es ein $l \in \{0, \ldots, P_1 + p - 1\}$ mit $F^l(x) \in L'$, würde man nach Konstruktion von L' auch ein $k(F^l(x)) \leqslant k$ finden, so daß $f^{k(F^l(x))}(F^l(x))$ in L liegt. Es gilt $f^{k(F^l(x))}(F^l(x)) = f^{k(F^l(x))+nl}(x)$ und

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant k(F^l(x)) \leqslant k \\ 0 \leqslant l \leqslant P_1 + p - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant k(F^l(x)) + nl \leqslant 2k + K_1 - n.$$

Da gilt $2k + K_1 - n \leqslant K_1 + 2k$, haben wir einen Widerspruch. Also gilt $F^l(x) \notin L'$ für alle $l \in \{0, \ldots, P_1 + p - 1\}$.

Jetzt der letzte Schritt: es ist noch $s \circ r = f^{n(P+p)}_{(N,L)}$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}
s \circ r(p_1(x)) &= \begin{cases} s(p_2(*)) & \text{, falls } x \in N \setminus N_2 \\ s(F^{P-P_1}_{(N',L')}(p_2(F^{P_1}(x))) & \text{, falls } x \in N_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} p_1(*) & \text{,falls } \begin{cases} x \in N \setminus N_2 \text{ oder} \\ \exists l \in \{0, \ldots, P - P_1\} : F^l(F^{P_1}(x)) \in L' \end{cases} \\ f^k_{(N,L)}(p_1(F^P(x))) & \text{,sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} p_1(*) & \text{,falls } \begin{cases} x \in N \setminus N_2, \\ \exists l \in \{0, \ldots, P - P_1\} : F^l(F^{P_1}(x)) \in L' \text{ oder} \\ \exists l \in \{0, \ldots, k\} : f^l(F^P(x)) \in L \end{cases} \\ p_1(f^k(F^P(x))) & \text{,sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} p_1(*) & \text{,falls } \begin{cases} x \in N \setminus N_2, \\ \exists l, nl + K_1 \leqslant K : f^{nl+K_1}(x) \in L' \text{ oder} \\ \exists l \in \{K, \ldots, k + K\} : f^l(x) \in L \end{cases} \\ p_1(f^{k+K}(x)) & \text{,sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Der Ziel ist zu zeigen, daß gilt $s \circ r = f^{n(P+p)}_{(N,L)} = f^{k+K}_{(N,L)}$. Dafür beweisen wir folgende Äquivalenz für alle $x \in N$:

$$\exists l \in \{0, \ldots, k+K\} : f^l(x) \in L \Leftrightarrow \begin{cases} x \in N \setminus N_2, \\ \exists l : nl + K_1 \leqslant K \text{ und } f^{nl+K_1}(x) \in L' \text{ oder} \\ \exists l \in \{K, \ldots, k + K\} : f^l(x) \in L \end{cases}$$

Wir zeigen erst “$\Leftarrow$”:

- $\exists l \in \{K, \ldots, k + K\} : f^l(x) \in L \Rightarrow \exists l \in \{0, \ldots, k + K\} : f^l(x) \in L$!

- Wenn es ein l mit $nl + K_1 \leqslant K$ gibt, so daß $f^{nl+K_1}(x) \in L'$, dann finden wir nach Konstruktion von k ein $k(f^{nl+K_1}(x)) \leqslant k$ mit $f^{k(f^{nl+K_1}(x))}(f^{nl+K_1}(x)) \in L$. Außerdem gilt $nl + K_1 + k(f^{nl+K_1}(x)) \leqslant K + k$. Daher haben wir ein $q = nl + K_1 + k(f^{nl+K_1}(x))$ gefunden, so daß $q \in \{0, \dots, k + K\}$ und $f^q(x) \in L$.

- Wenn x in $N \setminus N_2$, dann gibt es ein $k(x) \leqslant K_2 \leqslant K + k$ mit $f^{k(x)}(x) \in L$.

Nun zu "$\Rightarrow$":
Wir nehmen nun an, daß es ein $l \in \{0, \dots, k + K\}$ mit $f^l(x) \in L$ gibt.
Wenn $l \in \{K, \dots, k + K\}$, ist es klar. Bleibt also der Fall, bei dem l in $\{0, \dots, K - 1\}$ liegt.
Falls $l \in \{0, \dots, K_1 + k - 1\}$, kann x nicht in N_2 sein: wir hatten Bedingungen an δ gestellt, damit die f–Vorwärtstrajektorien von Punkten aus N_2 nicht vor der Zeit $K_1 + k + 1$ in L kommen.
Falls $l \in \{K_1 + k, K - 1\}$, muß $K := \max\{K_1, K_2\} = K_2$ gelten. Entweder liegt x in $N \setminus N_2$ und wir sind fertig, oder $x \in N_2$ und wir verwenden noch einmal das folgende Argument:
Sei q der Quotient der Division $l : n$. Es gilt dann $P_1 \leqslant P_1 + p \leqslant q < q + 1 \leqslant P$. Der Punkt $F^{P_1}(x)$ liegt in $int(N')$, weil x in N_2 liegt. Außerdem liegt $F^q(x)$ oder $F^{q+1}(x)$ nicht in $int(N')$: es muß dann ein $m \in \{P_1, \dots, q\}$ geben, so daß $F^m(x) = f^{nm}(x) \in L'$. Wir können nun $nm = pn + K_1$ für ein $p \in \mathbb{N}$ schreiben, da gilt $K_1 = nP_1$ und $nm \geqslant K_1$. Es gilt $pn + K_1 \leqslant K$ und $f^{pn+K_1}(x) \in L'$. Damit ist die Behauptung auch in diesem letzen Fall bewiesen.
Es gilt dann $s \circ r = f^{n(P+p)}_{(N,L)}$ und der Theorem 5.3.1 ist bewiesen. □

5.4 Perpektiven

Die Sätze dieses Kapitels lassen hoffen, daß man mit Hilfe des Conley–Indizes noch mehr Informationen über eine n–te Wurzel f eines Homömorphismus F herleiten kann. Hier wollen wir ein paar Fragen zusammenstellen, die in diesem Zusammenhang von Interesse sind:
Die Bemerkung 5.2.6 besagt, daß sich die isolierte, invariante Mengen bezüglich f aus isolierten, invarianten Mengen bezüglich F zusammensetzen. Die Frage, welche man miteinander vereinigen soll, bleibt aber noch offen.
Möglicherweise gibt es einen Weg über Lemma 5.2.2, um diese Frage zu beantworten: falls es zwischen die Conley–Indizen $h(S, F)$ und $h(f(S), F)$ einen Zusammenhang gäbe, den man "leicht" überprüfen kann, hätte man eine Chance, die Iterationen $f(S), \cdots, f^n(S)$ von den "übrigen" isolierten, invarianten Mengen zu unterscheiden. Damit könnte man dann die unter f isolierte, invariante Menge

$\bigcup\limits_{l=0}^{n-1} f^l(S)$ rekonstruieren.
Außerdem interessiert uns, was man machen kann, wenn die Reaktoren nicht alle genau identisch sind. Jeder wird dann durch eine Abbildung f_i, $i = 1, \ldots, n$ modelliert. Die Sätze 3.5.5 und 3.5.6 geben eine Idee, was man für sinnvolle Bedingungen an diesen Abbildungen f_i stellen soll, um eine Antwort zu bekommen. Außerdem sollte man sich von ihren Beweisen inspirieren lassen, wenn man für eine "gemeinsame" isolierte, invariante Menge S ein Vergleich von $h(S, F)$ und den $h(S, f_i)$'s untenehemen möchte.

Literaturverzeichnis

[Conl] Conley, Charles, *Isolated Invariant set and the Morse Index*, CMBS Regional Conf. Ser. Math., Nr. 38, American Mathematical Society, Providence, 1978.

[Fr&Ri] Franks, John; Richeson, David *Shift Equivalence and the Conley Index*, Transactions of the American Mathematical Society (Vol 352 ,Nr 7, Seiten 3305-3322), 2000.

[Misch1] Mischaikow, Konstantin *Conley Index Theory and Rigorous Computations*, Skript des Workshops *Regular and Stochastic Motions in Deterministic Dynamics* in Hasselt, 2001.

[Misch2] Mischaikow, Konstantin *Conley Index Theory* in Arnold ,Jones, Mischaikow, Raugel *Dynamical Systens, Lectures given at the 2nd Session of the C.I.M.E.*, gehalten in Montecatini Terme, Italien, Springer–Verlag, Seiten 121-203.

[Mro] Mrozek, Marian *The Conley Index on Compact ANR's is of Finite Type*, Results in Mathematics 18, Seiten 306-313, 1990.

[M&R] Mrozek, Marian; Rybakowski, Krzysztof P. *Cohomogical Conley Index for Continuous Maps on Locally Compact Metric Sapces*, Fundamenta Mathematicae 145 Seiten 15-37, 1994.

[Ryb] Rybakowski , Krzysztof P.*The Homotopy Index and Partial Differential Equations*, Springer–Verlag, Seiten 18-28 1987.