

BACHELORARBEIT



Stabilisierung gekoppelter Oszillatoren  
durch verzögerte  
Rückkopplungskontrolle



Matthias Bosewitz

Freie Universität Berlin  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
14195 Berlin

28. August 2013  
(aktualisierte Fassung)

*Erstgutachter und Betreuer:*  
Herr Prof. Dr. Bernold Fiedler

*Zweitgutachter:*  
Herr PD Dr. Martin Väh

## **Abstract**

Wir betrachten in dieser Arbeit zwei gekoppelte Oszillatoren in Hopf-Normalform. Diese werden mit einer verzögerten Rückkopplungskontrolle versehen, die eine Stabilisierung abzweigender periodischer Orbits zulässt. Die Region von geeigneten Stabilisierungsparametern wird explizit gegeben und die Verzögerungszeit kann – sofern sie unterhalb einer kopplungsabhängigen Schranke bleibt – beliebig gewählt werden. Für den nicht-linearen Term der Hopf-Normalform ist nur nötig, dass Real- und Imaginärteil nicht verschwinden.

## Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>2</b>
<b>I. Einleitung</b>	<b>3</b>
1. Einleitung	3
2. Überblick	4
2.1. Bereits vorhandene Ansätze . . . . .	4
2.2. Vorgehen in dieser Arbeit . . . . .	4
<b>II. Grundlagen</b>	<b>6</b>
3. Hopf-Verzweigung	6
3.1. Hopf-Normalform . . . . .	6
3.2. Hopf-Satz . . . . .	8
4. Retardierte Differentialgleichungen	9
4.1. Charakteristische Gleichungen . . . . .	10
<b>III. Modell</b>	<b>12</b>
5. Oszillatoren in Hopf-Normalform	12
6. Modell zweier gekoppelter Oszillatoren	13
<b>IV. Stabilisierung</b>	<b>16</b>
7. Stabilisierungsansatz	16
8. Stabilisierungssätze	18
9. Beweis der Stabilisierungssätze	21
9.1. Charakteristische Gleichungen . . . . .	21
9.2. Stabilitätskurven . . . . .	22
9.3. Stabilisierungsregion für das Gleichgewicht . . . . .	25
9.4. Stabilisierungsregion für die periodischen Orbits . . . . .	27

9.5. Stabilisierung der periodischen Orbits . . . . .	29
<b>V. Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>35</b>
<b>10. Zusammenfassung</b>	<b>35</b>
<b>11. Vergleich mit bisherigem Ansatz</b>	<b>35</b>
<b>12. Einfache Verallgemeinerung</b>	<b>36</b>
<b>13. Alle möglichen Kontrollen</b>	<b>38</b>
<b>Literatur</b>	<b>41</b>

## Abbildungsverzeichnis

1. Gekoppelte Federpendel . . . . .	4
2. Phasenportraits der Hopf-Normalform . . . . .	7
3. Verzweigungsdiagramm zweier gekoppelter Oszillatoren . . . . .	15
4. Stabilisierungsregionen . . . . .	19
5. Parameterabhängigkeit der In-Phase-Stabilisierungsregion . . . . .	25
6. Stabilisierungskurve für das Gleichgewicht . . . . .	27
7. Lage der Hopf- und Pyragaskurven im subkritischen Fall . . . . .	32
8. Lage der Hopf- und Pyragaskurven im superkritischen Fall . . . . .	33

---

# Teil I.

## Einleitung

### 1. Einleitung

Reale Systeme, deren Dynamik sich mit Hilfe von Oszillatoren auffassen lässt, sind in der Wissenschaft disziplinenübergreifend ein häufiges Phänomen. Von Reaktoren im Maschinenbau [7] über Atomgitter in der Physik [10] bis hin zur Ausbreitung von Krankheitserregern in der Medizin [15] lassen sich etliche Vorgänge als Oszillatoren betrachten. In vielen Fällen interagieren dabei mehrere Oszillatoren, was zu ungewolltem Verhalten führen kann. Für die Kontrolle der Dynamik sind dann passende Stabilisierungsansätze nötig. Eine Kontrolle würde häufig jedoch nur verzögert wirken. Dies kann unterschiedliche Gründe haben.

Zum einen entsteht in vielen Fällen eine natürliche Verzögerung, die bei der Simulation mitberücksichtigt werden sollte. Bei im Körper stattfindenden Regelvorgängen müsste etwa ein Enzym – das eine steuernde Wirkung ausüben soll – erst über die Blutbahnen verteilt werden [15].

Zum anderen kann eine Verzögerungszeit auch ganz gezielt eingesetzt werden. So werden etwa beim ICE neben der passiven Federung auch *aktive* Stoßdämpfer mit Verzögerung eingesetzt, um die Schwingungen, die bei hohen Geschwindigkeiten entstehen, zu dämpfen [12].

Wir wollen uns dabei in dieser Arbeit mit dem einfachsten Fall eines Systems gekoppelter Oszillatoren – zwei gekoppelten Oszillatoren – befassen. Dafür ist die Dämpfung des ICE ein gutes Beispiel. Auf dem Schienenprofil liegen die Laufflächen der Räder schräg auf und können sich während der Fahrt auf- und abwärts bewegen. Sie stellen also für jede Achse einen Oszillator dar. Über das Drehgestell sind je zwei Oszillatoren gekoppelt. Die einzelnen Drehgestelle sind ebenfalls gefedert, sodass man in erster Näherung von einem Zwei-Oszillator-System ausgehen kann. Bei den während der Entwicklung vorgenommenen Simulationen wurde aber wohl der gesamte Wagen mit beiden Drehgestellen als gekoppeltes System betrachtet. Da die Auflagefläche der Räder (um die Reibung möglichst gering zu halten) relativ klein ist, sind der Auslenkung der Achsen enge Grenzen gesetzt. Eine Stabilisierung der auftretenden periodischen Schwingungen ist daher wünschenswert, um gefahrlos mit hohen Geschwindigkeiten fahren zu können.

Das klassische Beispiel zweier gekoppelter Oszillatoren ist aber das zweier Federpendel in der folgenden Form:

## 2. Überblick

---

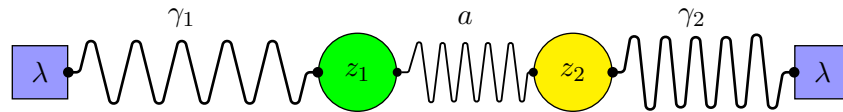


Abbildung 1: Zwei gekoppelte identische Federpendel  $z_1$  und  $z_2$ . Die Kopplung erfolgt über eine dritte Feder  $a$  zwischen den beiden Pendeln. Dargestellt ist eine Situation mit nach rechts ausgelenktem Pendel  $z_1$ .

Solch ein Pendelsystem wird, falls wir die Reibung vernachlässigen, im Allgemeinen chaotisches Verhalten zeigen. Auch wenn wir die Pendel mit gleicher Auslenkung starten, sorgen kleinste Unterschiede bei den beiden Federn  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  nach einiger Zeit für eine unterschiedliche Phase bis hin zur gegenphasigen Schwingung [10].

Wir wollen in dieser Arbeit eine Stabilisierung durch eine verzögerte Rückkopplung besprechen, die dafür sorgt, dass zwei Oszillatoren *stabil* gegenphasig schwingen.

## 2. Überblick

### 2.1. Bereits vorhandene Ansätze

Als Grundlage für den in dieser Arbeit verwendeten Stabilisierungsansatz diente hauptsächlich ein Paper von Fiedler et al. [5]. Zu einem System zweier gekoppelter Oszillatoren in Hopf-Normalform – wie hier in Abschnitt 6 eingeführt – wird dort ein verzögerter Stabilisierungsterm mit einem freien Parameter  $b \in \mathbb{C}$  hinzugefügt. Dieser ist so gewählt, dass für periodische, gegenphasige Schwingungen die Kontrolle verschwindet. Die Form der Kontrolle legt zudem die Verzögerungszeit  $\tau$  als ungeradzahliges Vielfaches der halben Periode (des zu stabilisierenden Orbits) fest.

Über eine Koordinatentransformation werden dynamisch invariante Unterräume gefunden. In den neuen Koordinaten entkoppelt zudem das linearisierte System, was eine analytische Betrachtung der  $b$ -abhängigen Stabilität möglich macht. Über charakteristische Gleichungen wird eine Stabilitätsanalyse durchgeführt. Mit deren Hilfe werden (unter Einschränkungen)  $b$  gefunden, die eine Stabilisierung zulassen. Dabei wird vom Austausch der Stabilität zwischen Gleichgewicht und periodischem Orbit bei der Hopfverzweigung Gebrauch gemacht.

### 2.2. Vorgehen in dieser Arbeit

In den Abschnitten 3 und 4 dieser Arbeit werden zunächst einige Grundlagen, die zum Verständnis nötig sind, eingeführt. Das Modell zweier gekoppelter Oszillatoren das wir

verwenden, wird dann in Abschnitt 5 kurz motiviert und daraufhin (in Abschnitt 6) formalisiert.

In Bezug auf das Modellsystem ist die Herangehensweise in dieser Arbeit zunächst einmal analog zu oben genanntem Paper. Dieselben dynamisch invarianten Unterräume  $Z_{\pm}$  werden vorgestellt und viele Beweisschritte verlaufen nach dem gleichen Schema.

Es wird jedoch ein erweiterter Stabilisierungsansatz mit zwei Kontrollparametern  $b_{\pm}$  gewählt, der in den transformierten  $z_{\pm}$ -Koordinaten ebenfalls entkoppelt. Zusätzlich werden wir einen Parameter  $\theta$  einführen, der uns eine freie Wahl der Verzögerungszeit  $\tau$  ermöglicht. Auch diese Kontrolle ist nichtinvasiv – verschwindet also auf dem zu stabilisierenden Orbit. Daraufhin werden die Stabilisierungssätze und einige daraus folgende Korollare formuliert.

Für den Beweis dieser Sätze stellen wir auch hier charakteristische Gleichungen  $0 = \chi_{\pm}(\eta)$  auf. In diesen wird nur  $b_{+}$  bzw.  $b_{-}$  auftauchen. Für die Stabilität ist relevant, ob Eigenwerte links oder rechts der imaginären Achse liegen. Am Verzweigungspunkt können wir die imaginäre Achse in der  $(\operatorname{Re} b_{\pm}, \operatorname{Im} b_{\pm})$ -Ebene als je eine orientierte Kurve darstellen. Dadurch kann eine explizite Darstellung für die „Stabilisierungsregionen“  $\Lambda_{\pm}$  gegeben werden. Diese Regionen verraten uns, für welche  $b_{+}$  und  $b_{-}$  die Gleichgewichte  $z_{\pm} \equiv 0$  stabil sind.

Wir wollen den abzweigenden periodischen Orbit im Unterraum  $Z_{-}$  stabilisieren, also nutzen wir die Hopfverzweigung, um die Stabilität an diesen abzugeben. Dazu müssen wir unseren Parameter  $b_{-}$  so wählen, dass abzweigende Orbits in der charakteristischen Gleichung  $0 = \chi_{-}(\eta)$  nicht zu Eigenwerten mit positivem Realteil führen. Die Region  $\Lambda_{-}$  enthält solche Parameter und die Stabilisierungssätze sind bewiesen.

Schlussendlich folgt noch eine Diskussion. Zuerst werden die Ergebnisse dieser Arbeit mit oben genanntem Paper verglichen. Anschließend werden mögliche Erweiterungen vorgeschlagen.

## Teil II.

# Grundlagen

### 3. Hopf-Verzweigung

Ein integraler Bestandteil dieser Arbeit sind Hopfverzweigungen. Davon ausgehend, dass grundlegende Kenntnisse in gewöhnlichen Differentialgleichungen vorhanden sind, soll diese daher kurz eingeführt werden. Wir beschränken uns dabei weitgehend auf die Darstellung in Hopf-Normalform. Diese zunächst sehr speziell wirkende Differentialgleichung beschreibt das lokale Verhalten bei einem Gleichgewicht in einer breiten Klasse von dynamischen Systemen mit Parameter [8]. Die Normalformtheorie, die eine Transformation in diese Form erlaubt ist aber nicht Teil der Ausführungen.

#### 3.1. Hopf-Normalform

Alle Differentialgleichungen für die wir die Hopfverzweigung benötigen werden in dieser Arbeit in *Hopf-Normalform* vorliegen. Diese lässt sich wie folgt notieren:

$$\dot{z} = f(z) = (\lambda + i + \gamma|z|^2) z \quad (3.1)$$

Die Größe  $z$  ist komplex, repräsentiert aber meist zwei reelle Dimensionen des Original-Systems. Die komplexe Schreibweise ist für unsere Betrachtungen vorteilhaft.

Der Parameter  $\gamma \in \mathbb{C}$  wird im weiteren Verlauf stets als fest angesehen. Der reelle Parameter  $\lambda$  hingegen ist ein Verzweigungsparameter. Wird er variiert, ändert sich die Dynamik des Systems. Für welche Werte es zu fundamentalen Änderungen kommt, wollen wir uns im Folgenden genauer ansehen.

Kartesische Koordinaten sind für die Betrachtung der Dynamik dieser Gleichung ungeeignet, daher führen wir die Polarkoordinaten

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad (3.2)$$

ein. Transformieren wir (3.1), so ergibt sich das System

$$\dot{r} = (\lambda + \operatorname{Re} \gamma \cdot r^2) r \quad (3.3a)$$

$$\dot{\varphi} = \operatorname{Im} \gamma \cdot r^2. \quad (3.3b)$$



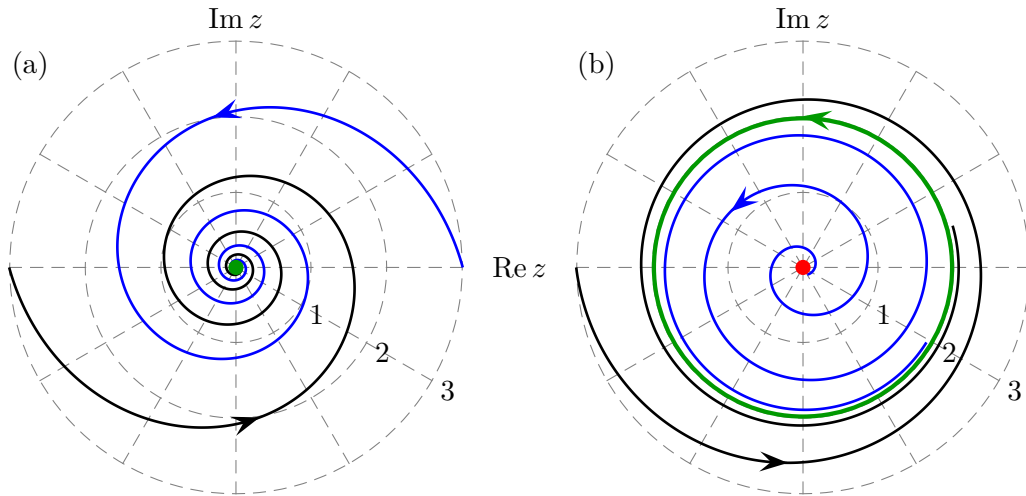


Abbildung 2: Je ein Phasenportrait der superkritischen Hopf-Normalform vor und nach der Verzweigung. Der Wert des Verzweigungsparameters ist  $\lambda = -0.1$  (a) bzw.  $\lambda = 0.4$  (b). Für beide wurde  $\gamma = -0.1 + i$  gewählt. Der stabile periodische Orbit und das stabile Gleichgewicht sind grün, das instabile Gleichgewicht rot dargestellt.

In der winkelunabhängigen Gleichung (3.3a) erkennen wir mit  $r = 0$  und  $r^2 = -\lambda / \operatorname{Re} \gamma$  zwei Ruhelagen.\*

Bei  $r = 0$  handelt es sich um das (einzige) Gleichgewicht  $z \equiv 0$ , das unabhängig von  $\lambda$  existiert. Die zweite Nullstelle entspricht hingegen einem periodischen Orbit, denn die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  ist für festes  $r$  konstant.† Der Orbit hat dann die explizite Form

$$r(t) = \sqrt{-\lambda / \operatorname{Re} \gamma} =: r_+(\lambda) \quad (3.4a)$$

$$\varphi(t) = \left(1 + r_+^2(\lambda) \operatorname{Im} \gamma\right) \cdot t \quad (3.4b)$$

und damit minimale Periode

$$p = \frac{2\pi}{1 + r_+^2(\lambda) \operatorname{Im} \gamma}. \quad (3.5)$$

Ein periodischer Orbit tritt jedoch nur für  $\lambda / \operatorname{Re} \gamma < 0$  auf. Ab sofort (und für den Rest dieser Arbeit) verlangen wir

$$\operatorname{Re} \gamma \neq 0, \quad (3.6)$$

\*Den Fall  $\operatorname{Re} \gamma = 0$  schließen wir auch hier schon aus.

†Hier müssen wir  $\lambda$  so einschränken, dass  $\lambda \cdot \operatorname{Im} \gamma / \operatorname{Re} \gamma < 1$  gilt, damit (3.3b) nicht verschwindet.

### 3. Hopf-Verzweigung

---

da ansonsten, weder für positive noch für negative  $\lambda$  periodische Orbits auftreten. Der Fall  $\operatorname{Re} \gamma = 0$  heißt daher *degeneriert*.

Lösungen von (3.4a) entstehen ab  $\lambda = 0$  und werden dann größer. Daher sagen wir, dass der periodische Orbit vom Gleichgewicht *abzweigt*.

Für uns wird interessant sein, welche Stabilität das Gleichgewicht und der periodische Orbit haben.

Betrachten wir zunächst den Fall  $\operatorname{Re} \gamma < 0$ . In diesem nennen wir das System (3.1b) *superkritisch*, da die Orbits hier für  $\lambda > 0$  abzweigen. Für  $\lambda < 0$  gibt es nur das Gleichgewicht  $z \equiv 0$ . Die Änderung  $\dot{r}$  ist dann für  $r > 0$  stets negativ und damit ist das Gleichgewicht stabil. Für  $\lambda > 0$  und  $r < r_+(\lambda)$  ist dies nicht mehr der Fall. Das Gleichgewicht wird instabil. Allerdings wird die Änderung  $\dot{r}$  für  $r > r_+(\lambda)$  (also jenseits des periodischen Orbits) wieder negativ. Der periodische Orbit ist damit stabil. Er hat die Stabilität vom Gleichgewicht *übernommen*. In Abbildung 2 ist dies visualisiert.

Kommen wir zum Fall  $\operatorname{Re} \gamma > 0$ . Wir nennen das System hier *subkritisch*. Das Gleichgewicht ist analog zum superkritischen Fall für  $\lambda < 0$  stabil und für  $\lambda > 0$  instabil. Für  $r < r_+(\lambda)$  ist  $\dot{r}$  weiterhin negativ und der periodische Orbit ist 1-fach instabil. Der periodische Orbit gibt hier also gewissermaßen seine Instabilität an das Gleichgewicht ab.

### 3.2. Hopf-Satz

Die Stabilitätsaussagen und die Existenz periodischer Orbits, die sich im vorherigen Abschnitt explizit ablesen ließen, gelten für eine viel größere Gruppe von Differentialgleichungen. Die zugrunde liegende Theorie der Zentrumsmanifoldigkeiten komplett zu erläutern würde hier zu weit führen. Für Genaueres konsultiere man etwa Diekmann et al. [4].

Stellen wir den Hopf-Satz im endlich-dimensionalen auf. Er gilt auch im (von uns benötigten) unendlich-dimensionalen Fall. Ohne Zentrumsmanifoldigkeiten einzuführen, ist dessen Formulierung aber wenig erhellend.

**Satz 3.1.** (Hopf-Verzweigung für gewöhnliche Differentialgleichungen)

Sei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Betrachte die parameterabhängige Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda). \quad (3.7)$$

Es seien folgende Bedingungen erfüllt:

1. Die rechte Seite ist „glatt genug“:

$$f \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ mit } k \geq 2 \quad (3.8)$$

2. Es gibt für alle Parameter ein Gleichgewicht  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$f(\mathbf{0}, \lambda) = 0 \quad (3.9)$$

3.  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{0}, \lambda_0)$  hat einfache Eigenwerte  $\pm i\omega_0$  und andere ganzzahlige Vielfache  $ni\omega_0$  mit  $n \geq 2$  sind nicht im Spektrum enthalten.

4. Sei  $\eta(\lambda)$  mit  $\eta(\lambda_0) = i\omega_0$  der Ast der entsprechenden Eigenwerte\* für  $\lambda$  nahe  $\lambda_0$ . Dann gilt Transversalität:

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d}{d\lambda} \eta(\lambda_0) \right) \neq 0 \quad (3.10)$$

Dann existiert ein abzweigender Ast von periodischen Lösungen

$$\delta \mapsto (\lambda(\delta), \mathbf{x}(\cdot, \delta), p(\delta)) \quad (3.11)$$

für  $|\delta|$  klein genug.  $\lambda(\delta)$  ist eine gerade Funktion und gibt den Parameter an, für den die periodischen Orbits  $\mathbf{x}(\cdot, \delta)$  auftreten.  $p(\delta)$  ist ebenfalls gerade und entspricht der minimalen Periode abzweigender Orbits.

Für  $\delta \rightarrow 0$  gilt zudem  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{x}(\cdot) \rightarrow \mathbf{0}$  und  $p(\delta) \rightarrow 2\pi/\omega_0$ .

Für  $f$  in Hopf-Normalform haben wir die Ergebnisse des Theorems schon im vorherigen Abschnitt gezeigt. Die Bedingung 4 aus dem Satz war dort in der Form  $\operatorname{Re} \gamma \neq 0$  gefordert. Die übrigen Bedingungen sind ebenfalls erfüllt. Abzweigende periodische Orbits sind in diesem Spezialfall – wie wir gesehen haben – kreisförmig.

## 4. Retardierte Differentialgleichungen

Ein weiteres unverzichtbares Element dieser Arbeit sind retardierte Differentialgleichungen. Die von uns zur Stabilisierung verwendete verzögerte Rückkopplungskontrolle führt zu einem retardierten Gleichungssystem.

Die DDEs<sup>†</sup> bilden ein umfangreiches Gebiet, weshalb hier nicht im Detail auf die Theorie eingegangen werden soll. Wir benötigen ohnehin nur die relativ einfachen punktweisen Verzögerungen. Für eine weitergehende Analyse verweisen wir auf Bellman und Cooke [1] und Diekmann et al. [4].

\*Laut implizitem Funktionensatz gibt es solch eine Funktion.

<sup>†</sup>Die Abkürzung stammt vom englischen Begriff „delay differential equations“.

Wir wollen – um damit eine Stabilisierung zu erreichen – zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung einen verzögerten Term hinzufügen:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = g(\mathbf{z}(t)) + h(\mathbf{z}(t - \tau)) \quad (4.1)$$

Wir nennen  $\tau$  die *Verzögerungszeit*.

Nun handelt es sich nicht mehr um eine gewöhnliche Differentialgleichung, da die Änderung  $\dot{\mathbf{z}}$  nicht nur vom Wert  $\mathbf{z}$  zum Zeitpunkt  $t$  abhängt.

Wenn wir allerdings  $\mathbf{z}(t_0)$  für  $t_0 \in [-\tau, 0]$  vorgeben, lässt sich für  $0 < t < \tau$  die Funktion  $h$  als rein zeitabhängig ansehen:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = g(\mathbf{z}(t)) + \tilde{h}(t) \quad \text{für } t \in [0, \tau] \quad (4.2)$$

Diese Vorgehensweise kann nun  $n$ -fach wiederholt werden um eine solche Gleichung für

$$t \in [n\tau, (n + 1)\tau] \quad n \in \mathbb{N} \text{ beliebig} \quad (4.3)$$

zu finden, sofern die Lösung für alle  $t$  existiert.

Für Gleichungen der Form (4.2) liefert die bekannte Lösungstheorie inhomogener Differentialgleichungen dann Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen unserer retardierten Gleichung.

### 4.1. Charakteristische Gleichungen

Für den Beweis der in Abschnitt 8 aufgestellten Sätze werden wir Aussagen über die Stabilität von Gleichungen der Form (4.1) treffen müssen. Eine exakte Betrachtung (auch für nicht punktweise Verzögerungen) ist zum Beispiel über die Spektraltheorie zu den mit solchen Lösungen korrespondierenden Halbgruppen möglich. [4]

Wir wollen hier allerdings nur motivieren, wie wir in solchen Fällen zu Stabilitätsaussagen kommen können.

Für gewöhnliche Differentialgleichungen ermitteln wir die Stabilität über die Eigenwerte in der Linearisierung. In der Gleichung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) \quad (4.4)$$

ist beispielsweise  $\mathbf{z} = 0$  dann (asymptotisch) stabil, wenn  $A$  nur Eigenwerte  $\eta_k$  mit strikt negativem Realteil besitzt.

Wir können diese Gleichung in Form einer *charakteristischen Gleichung* notieren, indem wir annehmen, dass die Lösungen der Gleichung (4.4) durch

$$Lz = 0 \tag{4.5}$$

mit dem Operator

$$L := A - \frac{d}{dt} \tag{4.6}$$

auf einem geeigneten Funktionenraum\* gegeben ist. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den komplex eindimensionalen Fall. Eigenfunktionen haben dann die Form

$$e_k = e^{\eta_k t}, \tag{4.7}$$

denn nur für diese gilt  $Le_k = Ae_k - \eta_k e_k$ . Wir können die Gleichung

$$0 = \chi(\eta_k) = Ae_k - \eta_k e_k \tag{4.8}$$

aufstellen, die wir *charakteristische Gleichung* nennen. Als Lösung im Eindimensionalen ergibt sich selbstverständlich wie zuvor der Eigenwert  $\eta = A \in \mathbb{C}$ .

Im Allgemeinen werden wir  $e_k$  aus der Gleichung kürzen und die Indices von  $\eta$  weglassen.

Warum haben wir nun diesen umständlichen Weg beschritten, obwohl wir zuvor die Stabilität direkt an den Eigenwerten von  $A$  ablesen konnten?

Die Antwort lautet: Für retardierte Differentialgleichungen lässt sich ebenfalls mittels charakteristischer Gleichungen die Stabilität ermitteln. Durch Linearisierung von (4.1) erhalten wir

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - \tau) \tag{4.9}$$

und können wieder unseren Exponentialansatz (4.7) verwenden. Da  $\exp(\eta(t - \tau)) = \exp(-\eta\tau) \cdot \exp(\eta t)$ , haben wir den Operator  $L$  in der Form

$$L := A + Be^{-\eta\tau} - \frac{d}{dt} \tag{4.10}$$

gegeben und die Eigenwerte sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$0 = \chi(\eta) = A + Be^{-\eta\tau} - \eta. \tag{4.11}$$

Die Lösungen  $\eta$  sind im Allgemeinen nicht in analytischer Form zugänglich. Zudem können unendlich viele Eigenwerte  $\eta$  vorliegen.

*Bemerkung.* Dass auch für retardierte Differentialgleichungen die Linearisierung für Aussagen über die Stabilität ausreicht, ist ein nicht-triviales Ergebnis, das wir zwar verwenden werden, aber auf dessen Beweis wir hier nicht weiter eingehen.

Der Satz über Hopf-Verzweigungen trifft auch auf Gleichungen der Form (4.1) zu, was wir auch ausnutzen werden.

---

\* Für diesen einfachen Fall wäre beispielsweise  $C^1(\mathbb{R}^n)$  möglich.

## Teil III. Modell

### 5. Oszillatoren in Hopf-Normalform

Durch die Darstellung in Hopf-Normalform sollte unser Modell eine große Klasse von realen Oszillator-Systemen repräsentieren, die sich in dieser Form modellieren lassen.

Bereits in der Einleitung wurde das Pendelsystem mit zwei Oszillatoren  $z_1$  und  $z_2$  als Beispiel genannt. Anhand dieses einfachen Falles lässt sich motivieren, inwiefern eine Differentialgleichung in Hopf-Normalform dazu geeignet ist, Oszillatoren nahe der Ruhelage zu simulieren.

Betrachten wir erneut Abbildung 1 und denken uns die mit  $a$  beschriftete Feder zunächst einmal weg. Die mit  $\lambda$  beschrifteten Kästen sollen dabei eine Anregung (z.B. durch einen Motor) darstellen.

Es sei jeder einzelne Oszillator in Hopf-Normalform (3.1) gebracht:

$$\dot{z}_1 = f(z_1) = (\lambda + i + \gamma|z_1|^2) z_1 \quad (5.1a)$$

$$\dot{z}_2 = f(z_2) = (\lambda + i + \gamma|z_2|^2) z_2 \quad (5.1b)$$

Die Komponenten  $\operatorname{Re} z_k(t)$  und  $\operatorname{Im} z_k(t)$  ( $k=1,2$ ) entsprechen dann etwa der Auslenkung der Pendelmasse für unterschiedliche Anregungsphasen  $\sin(t)$  und  $\cos(t)$  – wobei uns die konkrete Transformation hier nicht interessiert [2, Ch. 2].

Die Eigenschaften der einzelnen Feder  $\gamma_k$  würden (wie durch die Benennung schon suggeriert) durch den Koeffizienten  $\gamma$  modelliert. Der Parameter  $\lambda$  könnte etwa für die externe Energiezufuhr stehen, die die Oszillatoren antreibt. Ab einer bestimmten Intensität  $\lambda = 0$  ist dann die Energiezufuhr nicht mehr ausreichend, um periodische Schwingungen anzuregen.

Aus der Anschauung mit den Federpendeln ergibt sich auch die Bezeichnung *weiche Feder* für  $\operatorname{Im} \gamma > 0$  und *harte Feder* für  $\operatorname{Im} \gamma < 0$ . Für die weiche Feder wird die Periode mit steigender Auslenkung kleiner, für die harte größer.

So ist also das Verhalten jedes einzelnen Oszillators erklärbar. Fügen wir wieder die Feder  $a$  ein, so ergibt sich ein gekoppeltes System.

Solch ein System möchten wir in dieser Arbeit stabilisieren.

---

## 6. Modell zweier gekoppelter Oszillatoren

In diesem Abschnitt soll das in dieser Arbeit zu stabilisierende System zweier gekoppelter Oszillatoren vorgestellt werden. Wir charakterisieren die in diesem System stattfindenden Hopf-Verzweigungen und bestimmen die daraus resultierenden instabilen Dimensionen, um festzustellen inwiefern eine Stabilisierung notwendig ist.

Das System gekoppelter Oszillatoren, das wir betrachten, hat die Form

$$\dot{z}_1 = f(z_1) + a \cdot (z_2 - z_1) \quad (6.1a)$$

$$\dot{z}_2 = f(z_2) + a \cdot (z_1 - z_2), \quad (6.1b)$$

wobei  $a > 0$  die Kopplung zwischen den beiden Oszillatoren darstellt und  $f$  wie in (3.1) durch

$$\dot{z} = f(z) = (\lambda + i + \gamma|z|^2) z$$

definiert ist. Diese Form der Kopplung legt die Transformation in neue Koordinaten nahe. Mit der Substitution

$$z_+ = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad \text{Durchschnitt} \quad (6.2a)$$

$$z_- = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \quad \text{Asynchronizität} \quad (6.2b)$$

erhalten wir ein äquivalentes System

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} (f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) \quad (6.3a)$$

$$\dot{z}_- = \frac{1}{2} (f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)) - 2az_- . \quad (6.3b)$$

In dieser Darstellung können wir dynamisch invariante Unterräume finden. Zuerst betrachte man  $z_1 = z_2$ , also  $z_- = 0$ . In diesem Fall ist

$$\dot{z}_- = \frac{1}{2} (f(z_+) - f(z_+)) = 0, \quad (6.4)$$

also haben wir den *In-Phase-Unterraum*

$$Z_+ := \{(z_+, z_-) \mid z_- = 0\} \quad (6.5a)$$

gefunden.

Es gibt dazu analog für  $z_+ = 0$  ( $z_1 = -z_2$ ) den *Gegen-Phase-Unterraum*

$$Z_- := \{(z_+, z_-) \mid z_+ = 0\}, \quad (6.5b)$$

da mit  $f(-z) = -f(z)$  gilt, dass

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} (f(z_-) + f(-z_-)) = 0. \quad (6.6)$$

## 6. Modell zweier gekoppelter Oszillatoren

---

Betrachten wir also die Dynamik in den beiden invarianten Unterräumen.

In  $Z_+$  verhält sich der Durchschnitt  $z_+$  analog zu einem einzelnen Oszillator in Hopf-Normalform:

$$\dot{z}_+ = f(z_+) = (\lambda + i + \gamma|z_+|^2) z_+ \quad (6.7)$$

Er durchläuft also insbesondere eine Hopfverzweigung bei  $\lambda = 0$ . Die abzweigenden periodischen Orbits haben dann Amplitude

$$r_+(\lambda) = \sqrt{-\lambda/\operatorname{Re} \gamma} \quad (6.8)$$

und minimale Periode

$$p_+(\lambda) = \frac{2\pi}{1 + r_+^2(\lambda) \operatorname{Im} \gamma}. \quad (6.9)$$

In  $Z_-$  ist die DGL für die Asynchronizität  $z_-$  ebenfalls in Hopf-Normalform, falls wir  $\lambda$  um  $2a$  verschieben:

$$\dot{z}_- = f(z_-) - 2a \cdot z_- = ((\lambda - 2a) + i + \gamma|z_-|^2) z_- \quad (6.10)$$

Dann findet die Hopfverzweigung also bei  $\lambda = 2a$  statt. Analog zu (6.8) und (6.9) haben wir abzweigende periodische Orbits mit Amplitude

$$r_-(\lambda) = \sqrt{-(\lambda - 2a)/\operatorname{Re} \gamma} \quad (6.11)$$

und minimaler Periode

$$p_-(\lambda) = \frac{2\pi}{1 + r_-^2(\lambda) \operatorname{Im} \gamma}. \quad (6.12)$$

Die Hopfverzweigung ist *subkritisch* für  $\operatorname{Re} \gamma > 0$  und *superkritisch* für  $\operatorname{Re} \gamma < 0$ . Die periodischen Orbits haben also in beiden Fällen die explizite Form

$$z_{\pm}(t, \lambda) = r_{\pm}(\lambda) \cdot \exp\left(\frac{2\pi i t}{p_{\pm}(\lambda)}\right). \quad (6.13)$$

Um später eine Stabilisierung des Systems zu erreichen, benötigen wir Informationen über die instabilen Dimensionen der Gleichgewichte und periodischen Orbits.

Betrachten wir zunächst den subkritischen Fall (Abb. 3(a)). Hier ist das Gleichgewicht  $z_+ = z_- = 0$  für  $\lambda < 0$  zunächst stabil. Bei  $\lambda = 0$  gibt der periodische Orbit  $z_+(t, \lambda)$  seine instabile Dimension ab, wodurch das Gleichgewicht *zweifach instabil* wird. Dasselbe geschieht mit dem periodischen Orbit  $z_-(t, \lambda)$  bei  $\lambda = 2a$ , wodurch für  $\lambda > 2a$  vierfache Instabilität vorliegt.

Im superkritischen Fall (Abb. 3(b)) gibt hingegen das Gleichgewicht bei  $\lambda = 0$  zwei stabile Dimensionen an den abzweigenden Orbit ab, der dadurch *stabil* wird. Bei  $\lambda = 2a$



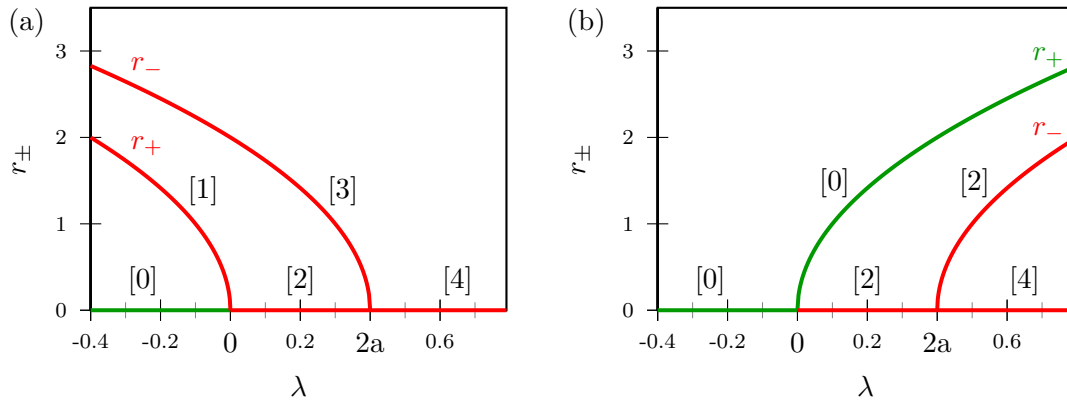


Abbildung 3: Parameterabhängige Stabilität der Gleichgewichte und abzweigenden periodischen Orbits. In (a) ist die subkritische Verzweigung mit  $\text{Re } \gamma = 0.1$ , in (b) die superkritische mit  $\text{Re } \gamma = -0.1$  dargestellt. In beiden Fällen ist  $a = 0.2$ . In eckigen Klammern ist jeweils die Anzahl instabiler Dimensionen angegeben. Stabile Objekte sind grün, instabile rot gefärbt.

gibt das dann zweifach instabile Gleichgewicht wiederum zwei stabile Dimensionen ab, sodass der abzweigende Orbit einfach instabil wird.

Unsere Aufgabe wird sein, das System für die  $\lambda$  zu stabilisieren, für die sowohl das Gleichgewicht, als auch periodische Orbits instabil sind. Das transformierte System (6.3ab) wird für die in Abschnitt 7 folgenden Betrachtungen nützlich sein, da es insbesondere nach Linearisierung entkoppelt:

$$\dot{z}_+ = (\lambda + i) z_+ \quad (6.14a)$$

$$\dot{z}_- = (\lambda - 2a + i) z_- \quad (6.14b)$$

## Teil IV.

# Stabilisierung

### 7. Stabilisierungsansatz

Mit der Information, für welche Werte des Verzweigungsparameters  $\lambda$  welche instabilen Objekte vorliegen, können wir nun versuchen, eine Stabilisierung zu erreichen. Dabei wird unser Ziel die Stabilisierung der bei  $\lambda = 2a$  für  $(\lambda - 2a) \cdot \operatorname{Re} \gamma < 0$  abzweigenden periodischen Orbits in  $z_-$  und des Gleichgewichts  $z_+ \equiv 0$  sein. Diese sind – wie im vorherigen Abschnitt gezeigt – ohne einen Stabilisierungsterm instabil.

Um Stabilisierung zu erreichen, führen wir eine nichtinvasive verzögerte Rückkopplungskontrolle ein, die an die Form des Systems angepasst ist.

Betrachten wir das transformierte System (6.3ab).

Aus (6.13) wissen wir, dass die DGL in  $Z_+$  eine Hopf-Verzweigung bei  $\lambda = 0$  mit periodischem Orbit

$$z_+(t) = r_+ \exp\left(\frac{2\pi it}{p_+}\right) \quad (7.1a)$$

durchläuft. Die DGL in  $Z_-$  hingegen durchläuft eine Hopf-Verzweigung bei  $\lambda = 2a$  mit periodischem Orbit

$$z_-(t) = r_- \exp\left(\frac{2\pi it}{p_-}\right). \quad (7.1b)$$

Versuchen wir also die Gegen-Phasen-Lösung zu stabilisieren, indem wir einen verzögerten Rückkopplungsterm hinzufügen. Dieser soll nichtinvasiv in  $Z_-$  sein, also auf dem periodischen Orbit (7.1b) sowie in  $z_+ \equiv 0$  verschwinden.

Führen wir  $\theta = 2\pi\tau/p_-$  ein, so kann die Drehsymmetrie des Orbits

$$z_-(t - \tau) = z_- \left( t - \frac{\theta p_-}{2\pi} \right) = r_- \exp\left(\frac{2\pi it}{p_-} - i\theta\right) = e^{-i\theta} \cdot z_-(t) \quad (7.2)$$

ausgenutzt werden, wobei  $\theta \in \mathbb{R}_+$  dem Phasenunterschied zwischen  $z_-(t)$  und  $z_-(t - \tau)$  entspricht.

Mit der Definition eines Drehoperators

$$T := e^{i(\theta + \pi)} \quad (= -e^{i\theta}) \quad (7.3)$$

und der Rücktransformation

$$z_1 = z_+ + z_- \quad (7.4a)$$

$$z_2 = z_+ - z_- \quad (7.4b)$$

gelten in  $Z_- = \{(z_+, z_-) \mid z_+ \equiv 0\}$  folgende Relationen zwischen den einzelnen Oszillatoren  $z_1$  und  $z_2$ :

$$\begin{aligned} z_- &= z_1 = -z_2 \\ \Rightarrow z_1(t) &= -T z_1(t - \tau) \end{aligned} \quad (7.5a)$$

$$z_1(t) = T z_2(t - \tau) \quad (7.5b)$$

$$z_2(t) = T z_1(t - \tau) \quad (7.5c)$$

$$z_2(t) = -T z_2(t - \tau) \quad (7.5d)$$

Der um  $\theta + \pi$  rotierte zweite Oszillator entspricht also mit einer Zeitverzögerung von  $\tau = \theta p_- / (2\pi)$  dem ersten usw.

Von diesen Relationen verwenden wir (7.5b) und (7.5c), um eine nichtinvasive Rückkopplung zum System (6.1ab) hinzuzufügen:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f(z_1) + a \cdot (z_2 - z_1) + \frac{b_+ + b_-}{2} (T z_2(t - \tau) - z_1) \\ &\quad + \frac{b_+ - b_-}{2} (T z_1(t - \tau) - z_2) \end{aligned} \quad (7.6a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= f(z_2) + a \cdot (z_1 - z_2) + \frac{b_+ + b_-}{2} (T z_1(t - \tau) - z_2) \\ &\quad + \frac{b_+ - b_-}{2} (T z_2(t - \tau) - z_1) \end{aligned} \quad (7.6b)$$

Dabei sind  $b_+, b_- \in \mathbb{C}$  Kontrollparameter, die noch gewählt werden können.

Transformieren wir (7.6ab) in  $z_{\pm}$ -Koordinaten:

$$\begin{aligned} \dot{z}_+ &= \frac{1}{2}(\dot{z}_1 + \dot{z}_2) \\ &= \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) + b_+ \cdot (T z_+(t - \tau) - z_+) \end{aligned} \quad (7.7a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_- &= \frac{1}{2}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) \\ &= \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)) - 2az_- - b_- \cdot (T z_-(t - \tau) + z_-) \end{aligned} \quad (7.7b)$$

Die Terme sind genau so konstruiert, dass die linearisierten Gleichungen in  $z_+$  und  $z_-$  entkoppeln.

*Bemerkung.* Die Relationen (7.5a) und (7.5d) könnten ebenfalls für eine nichtinvasive, in  $z_+$  und  $z_-$  entkoppelnde Rückkopplung verwendet werden (siehe Diskussion in Abschnitt 13).

Wir können anschließend für *alle* Kopplungskonstanten  $a > 0$  und für *fast alle*  $\gamma$  Kontrollbereiche finden, die eine Stabilisierung ermöglichen.

## 8. Stabilisierungssätze

Die möglichen Regionen stabilisierender  $b_+, b_-$  hängen – wie man in den nun folgenden Sätzen erkennen kann – von  $\theta$  ab. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass  $\tau$  – und damit  $\theta = 2\pi\tau/p_-$  (zusätzlich zu  $b_+, b_-$ ) – frei wählbar ist. Sollten wir nur eine vorgegebene Verzögerungszeit verwenden können, ist eine Stabilisierung nur für bestimmte  $a$  möglich (siehe Korollar 8.4).

**Satz 8.1.** *Betrachte gekoppelte Oszillatoren wie in (6.1ab) mit Kopplungskonstante  $a > 0$  und  $\gamma \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im } \gamma \neq 0$ .*

*Man verwende eine zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle der Form (7.6ab).*

*Dann existieren für alle Verzögerungszeiten*

$$\tau = \frac{\theta p_-}{2\pi} \quad \text{mit} \quad 0 < \theta < \frac{1}{a} \quad (8.1)$$

*offene, nichtleere Regionen von Kontrollparametern  $b_+$  und  $b_-$ , sodass die periodischen Gegen-Phase-Orbits*

$$\begin{aligned} z_-(t) &= r_- \exp(2\pi i t / p_-) \\ z_+(t) &= 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

*für  $\lambda$  nahe  $2a$  stabilisiert werden. Die Regionen werden in Satz 8.2 explizit definiert.*

Es existieren also keinerlei Beschränkungen an  $\gamma$ , außer  $\text{Im } \gamma \neq 0$  und der eine Entartung der periodischen Orbits verhindernden Bedingung  $\text{Re } \gamma \neq 0$ . Auch kann für beliebig große Kopplungskonstanten  $a$  stabilisiert werden.

Die offenen Regionen sind nicht nur von  $a$  und  $\theta$  abhängig, sondern auch für den sub- und den superkritischen Fall sowie für harte und weiche  $\gamma$  jeweils unterschiedlich.

**Satz 8.2.** *Die offenen nicht-leeren Regionen für die Kontrollparameter aus Satz 8.1 sind gegeben durch  $b_+ \in \Lambda_+^{a\theta}$  und  $b_- \in \Lambda_-^\theta \cap G$ . Deren explizite Darstellung ist gegeben durch*

$$\Lambda_+^{a\theta} = \{b_+ = x + iy \mid \exists \omega \in I \text{ sodass } x = \text{Re } b_+(\omega), |y| < -\text{Im } b_+(\omega)\} \quad (8.3a)$$

$$\Lambda_-^\theta = \{b_- = x + iy \mid \exists \omega \in I \text{ sodass } x = \text{Re } b_-(\omega), |y| < -\text{Im } b_-(\omega)\} \quad (8.3b)$$

$$I = \left(0, \frac{\pi}{2\theta}\right). \quad (8.4)$$

*Die komplexwertigen Funktionen  $b_+(\cdot)$  und  $b_-(\cdot)$  sind dabei als*

$$b_+(\omega) := a + \omega \tan(\theta\omega) + i(-\omega + a \tan(\theta\omega)) \quad \text{und} \quad (8.5a)$$

$$b_-(\omega) := -\omega(\cot(\theta\omega) + i) \quad (8.5b)$$

*definiert. Die Region  $\Lambda_-^\theta$  hängt nur von  $\theta$  ab, während  $\Lambda_+^{a\theta}$  auch noch von  $a$  abhängt.*

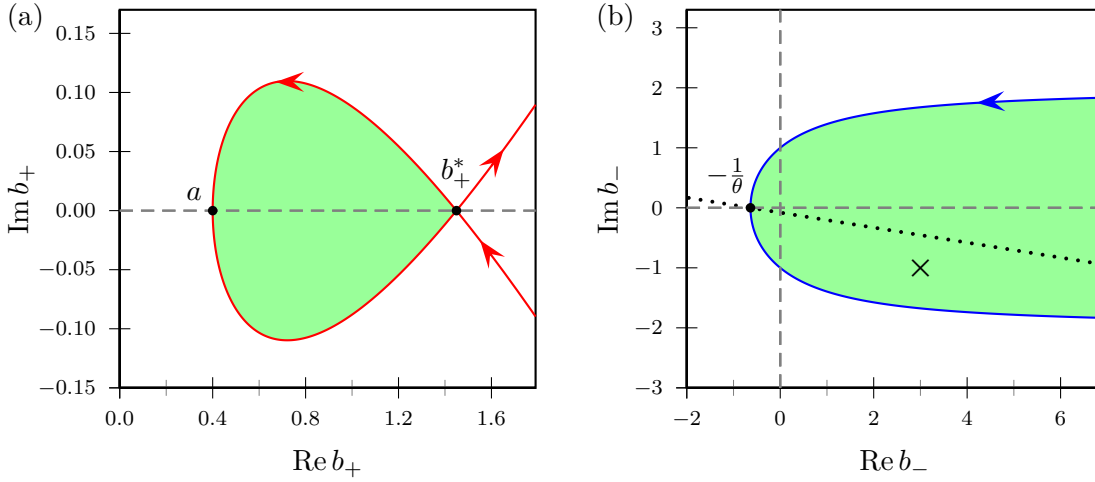


Abbildung 4: Die Stabilisierungsregionen  $\Lambda_+^{a\theta}$  (a) und  $\Lambda_-^a$  (b) sind in grün dargestellt und werden von den Kurven  $b_{\pm}(\omega)$  beschränkt. Die Pfeile geben die Richtung steigender  $\omega$  an. Für beide Kurven wurde  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  und  $a = 0.4$  gewählt. Die gepunktete Gerade und der mit  $\times$  markierte Punkt sind  $g$  und  $b_-$  aus Abbildung 7(b).

Außerdem gibt es abhängig von  $\gamma$  folgende Darstellung von  $G$ :

1. Im Falle einer harten Feder

$$\text{Im } \gamma > 0 \quad (8.6)$$

ist die Einschränkung der Stabilisierungsregion gegeben durch

$$G = \{b_- \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \mid \text{Im } b_- < g(\text{Re } b_-)\} . \quad (8.7)$$

2. Im Falle einer weichen Feder

$$\text{Im } \gamma < 0 \quad (8.8)$$

ist die Einschränkung der Stabilisierungsregion gegeben durch

$$G = \{b_- \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \mid \text{Im } b_- > g(\text{Re } b_-)\} . \quad (8.9)$$

Dabei ist die Hilfsfunktion  $g$  eine Gerade der Form

$$g(x) := -\frac{\text{Re } \gamma}{\text{Im } \gamma} \cdot \left(x + \frac{1}{\theta}\right) . \quad (8.10)$$

Der Beweis der Sätze findet im nächsten Abschnitt statt.

Es folgen einige einfache Schlussfolgerungen aus dem Beweis dieser Sätze. Diese sind in den folgenden Korollaren zusammengefasst.

**Korollar 8.3.** *Der Stabilisierungsparameter  $b_+$  kann sowohl im sub- als auch im superkritischen Fall reell gewählt werden. Im superkritischen Fall mit weicher Feder sind auch für  $b_-$  reelle Werte*

$$-\frac{1}{\theta} < b_- < \infty \quad (8.11)$$

*möglich, um eine Stabilisierung zu erreichen.*

*Beweis.* Für  $b_+$  beachte man, dass  $\Lambda_+^{a\theta}$  symmetrisch zur  $x$ -Achse ist.

Im Abschnitt 9.3 des Beweises von Satz 8.1 und 8.2 werden die Schnittpunkte von  $b_+(\omega)$  mit der reellen Achse bestimmt. Diese sind  $a$  und  $b_+^* = b_+^*(a, \theta) > a$ . Über das von diesen gebildete Intervall erstreckt sich  $\Lambda_+^{a\theta}$  und insbesondere ist das Intervall enthalten.

Damit haben wir reelle  $b_+$  gefunden, die eine Stabilisierung zulassen.

Im superkritischen Fall beachte man zunächst, dass  $(-1/\theta, \infty) \subset \Lambda_-^\theta$ . Außerdem gilt dann

$$g(x) < 0 \quad \text{für} \quad \text{Im } \gamma < 0, \text{Re } \gamma < 0 \quad (8.12a)$$

$$g(x) > 0 \quad \text{für} \quad \text{Im } \gamma > 0, \text{Re } \gamma > 0 \quad (8.12b)$$

und damit folgt  $(-1/\theta, \infty) \subset G$ . Dadurch haben wir auch stabilisierende, reelle  $b_-$  gefunden.  $\square$

Gegenüber anderen Stabilisierungsansätzen wie denen aus [5] und [3] hat der in dieser Arbeit gewählte Ansatz (7.6ab) den Vorteil der „freieren“ Wahl der Verzögerungszeit  $\tau$ .

**Korollar 8.4.** *Betrachte wieder gekoppelte Oszillatoren wie in (6.1a) und (6.1b). Sei*

$$\tau < \frac{p_-}{2\pi \cdot a} \quad (8.13)$$

*vorgegeben.*

*Dann existieren zur verzögerten Rückkopplungskontrolle der Form (7.6ab) mit*

$$\theta = \frac{2\pi \cdot \tau}{p_-} \quad (8.14)$$

*offene nichtleere Bereiche von Kontrollen, sodass die periodischen Gegen-Phase-Orbits für  $\lambda$  nahe  $2a$  stabilisiert werden.*

*Beweis.* Das Korollar ist eine umformulierte Version von Satz 8.1, bei der nicht  $\theta$  zu  $a$  gewählt wird, sondern  $\tau$  (und damit  $\theta$ ) vorgegeben ist. Dazu muss nur  $\theta(\tau)$  eingesetzt werden.  $\square$

Prinzipiell kann mit jeder vorgegebenen Verzögerungszeit stabilisiert werden. Allerdings darf die Zeit nicht zu lang (im Vergleich zur Kopplung) sein.

---

## 9. Beweis der Stabilisierungssätze

Der Beweis der Stabilisierungssätze 8.1 und 8.2 erfolgt weitgehend analog zu dem im Paper von Fiedler et al. [5], das dieser Arbeit zu Grunde liegt.

Dabei werden wir wie folgt vorgehen:

Zuerst stellen wir die charakteristischen Gleichungen  $\chi_{\pm}(\eta) = 0$  für unser System auf. Die anschließende Untersuchung, für welche Werte von  $b_{\pm}$  sich die Anzahl der Eigenwerte  $\eta$  mit strikt negativem Realteil ändert, führt dann zu der Feststellung, dass dies nur per Hopfverzweigung geschieht. Damit können wir Stabilisierungsbereiche  $\Lambda_+^{\theta}, \Lambda_-^{\theta}$  für  $b_+$  bzw.  $b_-$  finden, für die keine Eigenwerte strikt positiven Realteil aufweisen. Die Bestimmung von Kontrollen  $b_+$ , die  $z_+ \equiv 0$  stabilisieren, ist damit bereits beendet. Für  $b_-$  dagegen müssen wir noch die Lage zweier Kurven zu einander ermitteln. Die erste ist die Hopfkurve der  $(\lambda, \tau)$ , für die eine Hopfverzweigung auftritt. Die zweite ist die Pyragas-Kurve \*, die sich als nichtinvasive Verzögerungszeit in Abhängigkeit von  $\lambda$  ergibt. Dann können wir unseren Stabilitätsbereich mittels  $G$  einschränken, damit die abzweigenden periodischen Orbits stabil werden.

Es verbleiben schlussendlich Kontrollterme  $b_- \in \Lambda_-^{\theta} \cap G$  und unser Ziel – Stabilisierung in  $Z_-$  – ist erreicht.

### 9.1. Charakteristische Gleichungen

Über charakteristische Gleichungen können wir die Stabilität des Gleichgewichts ermitteln. Nur wenn – durch Hinzufügen des Kontrollterms – die Gleichgewichte stabil werden, kann eine Stabilisierung erreicht werden. Im Falle der  $z_+$ -Orbits wollen wir tatsächlich  $z_+ \equiv 0$  stabilisieren. Für  $z_-$  brauchen wir ein stabiles Objekt, von dem die abzweigenden periodischen Orbits ihre Stabilität „erben“ können.

Wie bereits in Abschnitt 6 festgestellt, entkoppelt das linearisierte System in  $z_+, z_-$ :

$$\dot{z}_+ = (\lambda + i) z_+ + b_+ \cdot (T z_+(t - \tau) - z_+) \quad (9.1a)$$

$$\dot{z}_- = (\lambda - 2a + i) z_- - b_- \cdot (T z_-(t - \tau) + z_-) \quad (9.1b)$$

Wir können also die beiden Komponenten separat betrachten, wenn wir die instabile Dimension bestimmen.

Die charakteristischen Gleichungen ergeben sich per Exponentialansatz zu

$$0 = \chi_+(\eta) = \lambda + i + b_+ \cdot (T e^{-\tau\eta} - 1) - \eta \quad (9.2a)$$

$$0 = \chi_-(\eta) = \lambda - 2a + i - b_- \cdot (T e^{-\tau\eta} + 1) - \eta. \quad (9.2b)$$

---

\*Diese Bezeichnung basiert auf der Verwendung nichtinvasiver Kontrollterme durch K. Pyragas [11].

Wir bestimmen daraus die instabilen Dimensionen der einzelnen Gleichungen

$$E_+(b_+) = \#\{\eta \in \mathbb{C} \mid \chi_+(\eta) = 0, \operatorname{Re} \eta > 0\} \quad (9.3a)$$

$$E_-(b_-) = \#\{\eta \in \mathbb{C} \mid \chi_-(\eta) = 0, \operatorname{Re} \eta > 0\}, \quad (9.3b)$$

wobei wir die reelle Vielfachheit zählen – also sind diese Mengen als Multimengen zu lesen.

Die instabile Dimension des Gesamtsystems ist

$$E(b_+, b_-) = E_+(b_+) + E_-(b_-) \quad (9.4)$$

und damit ergibt sich als Bedingung für eine mögliche Stabilisierung

$$E(b_+, b_-) = 0 \quad \text{also} \quad E_+(b_+) = E_-(b_-) = 0. \quad (9.5)$$

Die Regionen für die Stabilisierung (d.h. die  $b_{\pm}$ , die stabilisieren) können im Allgemeinen von der Kopplungskonstante  $a \in \mathbb{R}$ , der Rotation  $\theta \in \mathbb{R}^+$ ,  $\operatorname{Re} \gamma$  und  $\operatorname{Im} \gamma$  abhängen. Wir werden später aber sehen, dass  $b_+$  unabhängig von  $\gamma$  und  $b_-$  unabhängig von  $a$  gewählt werden kann.

Wir befassen uns etwas genauer mit den charakteristischen Gleichungen, um  $E(b_+, b_-)$  zu ermitteln.

Für  $b_+ = b_- = 0$  können wir die Hopfverzweigung in  $Z_- = \{(z_+, z_-) \mid z_+ \equiv 0\}$  bei  $\lambda = 2a$  und  $\eta = i$  unmittelbar ablesen.

Mit der Verzögerungszeit  $\tau = \theta p_- / (2\pi)$  bei dieser Hopf-Verzweigung ergibt sich aus den charakteristischen Gleichungen (9.2ab)

$$0 = \chi_+(\eta) = 2a + i + b_+ \cdot (T e^{-\theta\eta} - 1) - \eta \quad (9.6a)$$

$$0 = \chi_-(\eta) = i - b_- \cdot (T e^{-\theta\eta} + 1) - \eta. \quad (9.6b)$$

Dies bedeutet, es gibt einfache Eigenwerte

$$\eta = 2a + i \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re} \eta = 2a > 0 \quad \text{in} \quad Z_+ = \{(z_+, z_-) \mid z_- \equiv 0\} \quad \text{und} \quad (9.7a)$$

$$\eta = i \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re} \eta = 0 \quad \text{in} \quad Z_- = \{(z_+, z_-) \mid z_+ \equiv 0\}. \quad (9.7b)$$

Da  $\eta = 2a + i$  strikt komplex ist, muss seine reelle Vielfachheit 2 sein, also haben wir  $E(0, 0) = 2 + 0$  ermittelt.

## 9.2. Stabilitätskurven

Die allgemeinen Lösungen der charakteristischen Gleichungen zu finden, ist glücklicherweise für die Bestimmung von  $E_{\pm}(b_{\pm})$  nicht notwendig. Uns interessiert nur, wann sich



die Anzahl der Eigenwerte  $\eta$  mit positivem Realteil ändert. Da unsere charakteristischen Gleichungen stetig in  $b_{\pm}$  sind, werden wir versuchen, die Kontrollen zu finden, bei denen die Eigenwerte  $\eta$  gerade die imaginäre Achse überqueren. Dabei ändert sich das Vorzeichen des Realteils, und nur dadurch kann sich die instabile Dimension ändern. Praktischerweise werden wir die Grenzen der jeweiligen Stabilisierungsregion in Form je einer differenzierbaren Kurve erhalten.

Da  $E_{\pm} \geq 0$  und  $E_+(0) = 2, E_-(0) = 0$  gilt, betrachten wir Änderungen an  $E_+(b_+)$  durch das „Überqueren“ imaginärer Eigenwerte  $\eta = i\tilde{\omega}$  mit  $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ .

Wir hoffen dabei eine Region zu finden, in der  $E(b_+) = 0$  gilt. Diese Hoffnung wird nicht vergebens sein, und da die Region von  $a$  und  $\theta$  abhängen wird, bezeichnen wir sie mit  $\Lambda_+^{\theta}$ .

Aber lösen wir zunächst die charakteristische Gleichung (9.6a) in  $z_+$  mit  $\eta = i\tilde{\omega} = i(1 + 2\omega)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= 2a + i + b_+ \cdot (T e^{-\theta \cdot i(1+2\omega)} - 1) - i(1 + 2\omega) \\ &= 2a - 2i\omega + b_+ \cdot (-e^{-2i\theta\omega - i\theta + i\theta} - 1) \\ &= 2a - 2i\omega - b_+ \cdot (e^{-2i\theta\omega} + 1) \end{aligned} \quad (9.8)$$

Wir erhalten eine Kurve

$$b_+(\omega) := \frac{2a - 2\omega i}{1 + \exp(-2i\theta\omega)} = a + \omega \tan(\theta\omega) + i(-\omega + a \tan(\theta\omega)) \quad (8.5a)$$

von Lösungen in  $\mathbb{C}$  mit Parameter  $\omega$ . Die Funktion  $b_+(\omega)$  hat Singularitäten bei  $2\theta\omega = \pi k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  ungerade.

Analog gehen wir für  $E_-(b_-)$  vor, um eine Region  $\Lambda_-^{\theta}$  zu finden.

Wie das „einsame“ hochgestellte  $\theta$  schon vermuten lässt, wird sich hier keine Abhängigkeit von  $a$  ergeben.

Lösen wir Gleichung (9.6b)

$$\begin{aligned} 0 &= i - b_- \cdot (T e^{-\theta \cdot i(1+2\omega)} + 1) - i(1 + 2\omega) \\ &= 2i\omega - b_- \cdot (-e^{-2i\theta\omega - i\theta + i\theta} + 1) \\ &= 2i\omega + b_- \cdot (e^{-2i\theta\omega} - 1), \end{aligned} \quad (9.9)$$

so erhalten wir eine zweite Kurve mit Parameter  $\omega$ :

$$b_-(\omega) := \frac{2\omega i}{1 - \exp(-2i\theta\omega)} = -\omega(\cot(\theta\omega) + i) \quad (8.5b)$$

Die Funktion  $b_-(\omega)$  wird nur für  $\theta\omega = \pi k$  mit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  singular. Die Möglichkeiten einer Änderung über imaginäre Eigenwerte haben wir also alle erfasst.

## 9. Beweis der Stabilisierungssätze

---

Die zweite Möglichkeit eine Änderung der Stabilität zu erreichen ist ein Eigenwert  $\eta = 0$ .

Aber nur für  $\omega = -\frac{1}{2}$  gilt  $\eta = i\left(2 \cdot -\frac{1}{2} + 1\right) = 0$ .

Für  $\theta \neq k\pi$  mit  $k \in \mathbb{N}$  ungerade existiert die Lösung

$$b_+ \left(-\frac{1}{2}\right) = a + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right) + i\left(\frac{1}{2} - a \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right). \quad (9.10a)$$

Falls  $\theta \neq k\pi$  mit  $k \in \mathbb{N}$  gerade, dann gibt es die Lösung

$$b_- \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(-\cot\left(\frac{1}{2}\theta\right) + i\right). \quad (9.10b)$$

Also sind über  $b_{\pm}(\omega)$  bereits alle  $b_{\pm}$  mit Eigenwert 0 bestimmt. Der Fall  $\eta = 0$  muss also nicht gesondert behandelt werden.

Betrachten wir nun die Änderung von  $E_{\pm}(b_{\pm})$  beim „überqueren“ unserer Kurve  $\omega \mapsto b_{\pm}(\omega)$ . Da die Nullstellen  $\chi_{\pm} = 0$  durch komplex analytische Funktionen ((9.6a) bzw. (9.6b)) gegeben sind, kann es nur dort zu einer Änderung kommen, wo Eigenwerte bei Änderung von  $b_{\pm}$  die imaginäre Achse überqueren. Ist die Stabilitätskurve dann komplex differenzierbar, so ist sie auch orientierungserhaltend. Instabile Eigenwerte mit  $\operatorname{Re} \eta > 0$  befinden sich rechts der imaginären Achse  $\eta = i\tilde{\omega} = i(1 + 2\omega)$ , also folgt, dass  $E_{\pm}(b_{\pm})$  rechts der Kurve  $b_{\pm}(\omega)$  um 2 größer ist als links.

Wir müssen noch zeigen, dass  $b_+$  und  $b_-$  wirklich komplex differenzierbar sind. Bestimmen wir dazu die Ableitungen

$$b'_+(\omega) = \frac{d}{d\omega} b_+(\omega) = \tan(\theta\omega) + \theta\omega \sec^2(\theta\omega) - i + ia\theta \sec^2(\theta\omega) \quad (9.11a)$$

$$b'_-(\omega) = \frac{d}{d\omega} b_-(\omega) = -\cot(\theta\omega) + \omega\theta \csc^2(\theta\omega) - i, \quad (9.11b)$$

dann sehen wir, dass  $b'_-(\omega)$  niemals verschwindet, da  $\operatorname{Im} b'_-(\omega) \equiv -1$ .

$b'_+(\omega)$  hingegen verschwindet in  $\omega = 0$  für  $a\theta = 1$ :

$$\begin{aligned} b'_+(0) &= \tan(0) + 0 \sec^2(0) - i + ia\theta \sec^2(0) \\ &= 0 + 0 \cdot 1 - i + ia\theta = 0 \end{aligned} \quad (9.12)$$

Verlangen wir

$$a < \frac{1}{\theta} \quad (9.13)$$

dann gilt für  $\sec^2(\omega) = a\theta < 1$ , dass der Realteil

$$\operatorname{Re} b'_+(\omega) = \tan(\theta\omega) + \theta\omega \sec^2(\theta\omega) = \tan(\theta\omega) + a\theta^2\omega \quad (9.14)$$

*niemals* verschwindet – da die Steigung  $a\theta^2$  kleiner als die Steigung  $\theta$  von  $\tan(\theta\omega)$  in  $\omega = 0$  ist – beide Kurven also über  $\omega$  parametrisiert werden können.

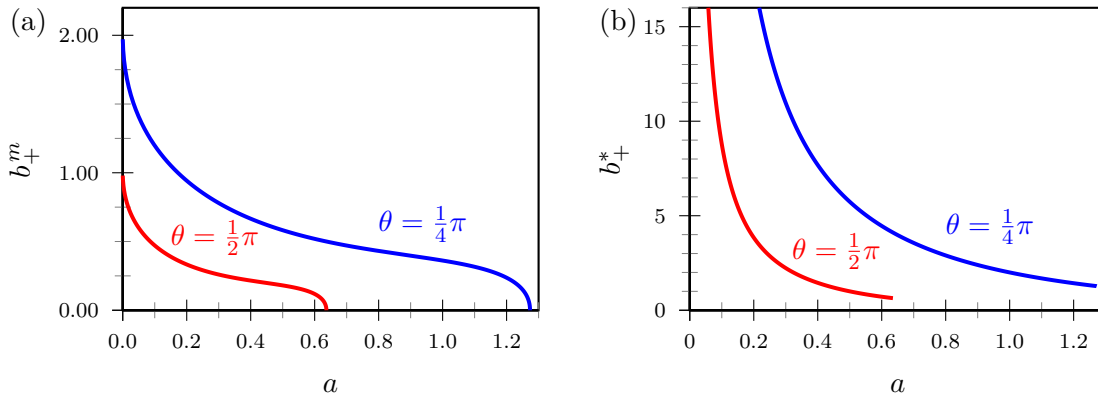


Abbildung 5: Die Stabilisierungsregion  $\Lambda_+^{a\theta}$  ist von  $a$  und  $\theta$  abhängig.

In (a) ist mit  $b_+^*$  das Maximum des Realteils für verschiedene  $a$  und  $\theta$  dargestellt.

In (b) ist hingegen das Maximum des Imaginärteils zu sehen, welches wir mit  $b_+^m$  bezeichnen.

Es ist explizit durch  $b_+^m(a, \theta) = 1/\theta \arccos(\sqrt{a\theta}) \cdot [1 - a \cdot \sqrt{\theta/a - \theta^2}]$  gegeben. Die beiden Kurven mit  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  (rot) und  $\theta = \frac{1}{4}\pi$  (blau) verdeutlichen auch die  $\theta$ -Abhängigkeit.

### 9.3. Stabilisierungsregion für das Gleichgewicht

Mit der im vorherigen Abschnitt gefundenen Kurve  $b_+(\cdot)$  können wir das Gebiet mit  $E_+ = 0$  ermitteln. Dabei nutzen wir die (relativ) einfache Geometrie der Kurve aus. Diese sieht immer „ungefähr“ wie in Abbildung 4(a) aus, abgesehen davon, dass sie mit steigendem Produkt  $a \cdot \theta$  eine immer kleinere Schleife  $\Lambda_+^{a\theta}$  enthält und für kleinere  $\theta$  immer spitzer wird.

Versuchen wir zunächst die instabilen Dimensionen  $E_+(0) = 2$  zu eliminieren. Wie in Abbildung 4(a) zu sehen ist, gibt es eine von  $b_+(\cdot)$  begrenzte Region  $\Lambda_+^{a\theta}$ . Vom Ursprung aus muss  $b_+(\cdot)$  von links nach rechts überquert werden, um in das Innere zu gelangen – z.B. entlang der reellen Achse. Dabei reduziert sich  $E_+$  um 2, wie gewünscht.

Sehen wir uns das Gebiet etwas genauer an.

Unter der Bedingung (9.13) ist es nichtleer, denn auf der reellen Achse enthält es das Intervall

$$a < b_+ < b_+^*(a, \theta), \quad (9.15)$$

wobei  $b_+^*(a, \theta) = b_+(\omega^*)$  sich als die erste positive Nullstelle von

$$0 = \text{Im}(b_+(\omega^*)) = -\omega^* + a \tan(\theta\omega^*) \quad (9.16)$$

ergibt. Diese Nullstelle existiert immer, da  $\tan \rightarrow \infty$  für  $\theta\omega \nearrow \frac{1}{2}\pi$  und die Steigung von  $a \tan(\theta\omega^*)$  in  $\omega = 0$  gleich  $a\theta < 1$  ist.

## 9. Beweis der Stabilisierungssätze

---

Dass tatsächlich im *gesamten* Gebiet

$$\Lambda_+^{a\theta} = \{b_+ = x + iy \mid \exists \omega \in (0, \omega^*), \text{ sodass } x = \operatorname{Re} b_+(\omega), |y| < -\operatorname{Im} b_+(\omega)\} \quad (9.17)$$

$E_+ = 0$  gilt, lässt sich wie folgt sehen:

Offensichtlich gilt  $b_+(-\omega) = \overline{b_+(\omega)}$  und das Gebiet ist damit zur reellen Achse symmetrisch. Für  $\omega < -\omega^*$  ist  $\operatorname{Im} b_+(\omega) < 0$ ; daher kann, wie in Satz 8.2, Gleichung (8.3b), auch  $0 < \omega < \pi/(2\theta)$  als Parameter zugelassen werden, um dasselbe Gebiet  $\Lambda_+^{a\theta}$  zu definieren. Die Bedingung  $|\operatorname{Re} b_+(\omega)| < -\operatorname{Im} b_+(\omega)$  ist dann, falls  $\omega^* < \omega < \pi/(2\theta)$ , für kein  $b_+$  erfüllbar.

Außer dieser Symmetrie gilt im Realteil auch noch Monotonie:

$$\operatorname{Re} b'_+(\omega) > \theta\omega + \theta\omega \cdot 1 > 0 \quad \text{für } \omega > 0. \quad (9.18)$$

Damit ergibt sich immer ein Gebiet über  $0 < \omega < \omega^*$ .

Nun müssen wir nur noch sicherstellen, dass für  $\omega > n \cdot \pi/\theta$  – also für einen anderen „Ast“ der Kurve  $-b_+(\omega)$  dieses Gebiet nicht erneut schneidet.

Dazu wollen wir die Asymptotik der Kurve für

$$\omega \rightarrow \frac{(2n \pm 1)\pi}{2\theta} \quad (9.19)$$

betrachten. Es empfiehlt sich die Koordinatentransformation  $s := \tan(\theta\omega)$  durchzuführen, wodurch sich (9.19) auf jedem Ast zu

$$s \rightarrow \pm\infty \quad (9.20)$$

vereinfacht. Man betrachte die reparametrisierte Version der Kurven-Gleichung (8.5a):

$$b_+(s) = a + \frac{\arctan(s) + n\pi}{\theta} \cdot s + i \left( -\frac{\arctan(s) + n\pi}{\theta} + as \right) \quad (9.21)$$

In dieser Form können wir die Asymptotengleichungen direkt ablesen, wenn wir ausnutzen, dass  $\arctan(s)$  im Unendlichen gegen  $\pm\pi/2$  konvergiert:

$$h_{\pm}(s) = \left( \frac{(2n \pm 1)\pi}{2\theta} + ia \right) s + \left( a - i \frac{(2n \pm 1)\pi}{2\theta} \right) \quad (9.22)$$

Wir stellen diese Gleichung noch nach dem Imaginärteil um und erhalten

$$\operatorname{Im} h_{\pm} = \frac{2a\theta}{(2n \pm 1)\pi} (\operatorname{Re}(h_{\pm}) - a) - \frac{(2n \pm 1)\pi}{2\theta}. \quad (9.23)$$

Was bedeutet dies für unterschiedliche Äste  $n$ ?

Die „untere“\* Asymptote  $h_+$  für  $n$  entspricht gerade der „oberen“  $h_-$  für  $n + 1$ . Unterschiedliche Äste schneiden sich demnach nur für  $\operatorname{Re} b_+(\omega) < a$  und  $\operatorname{Re} b_+(\omega) > b_+^*$  – also außerhalb unserer Stabilisierungsregion.

---

\*Für  $\omega > 0$  liegt  $b_+(\omega)$  stets strikt zwischen den beiden Geraden. Im diesem Sinne können wir von einer *unteren* und einer *oberen* Asymptote sprechen.

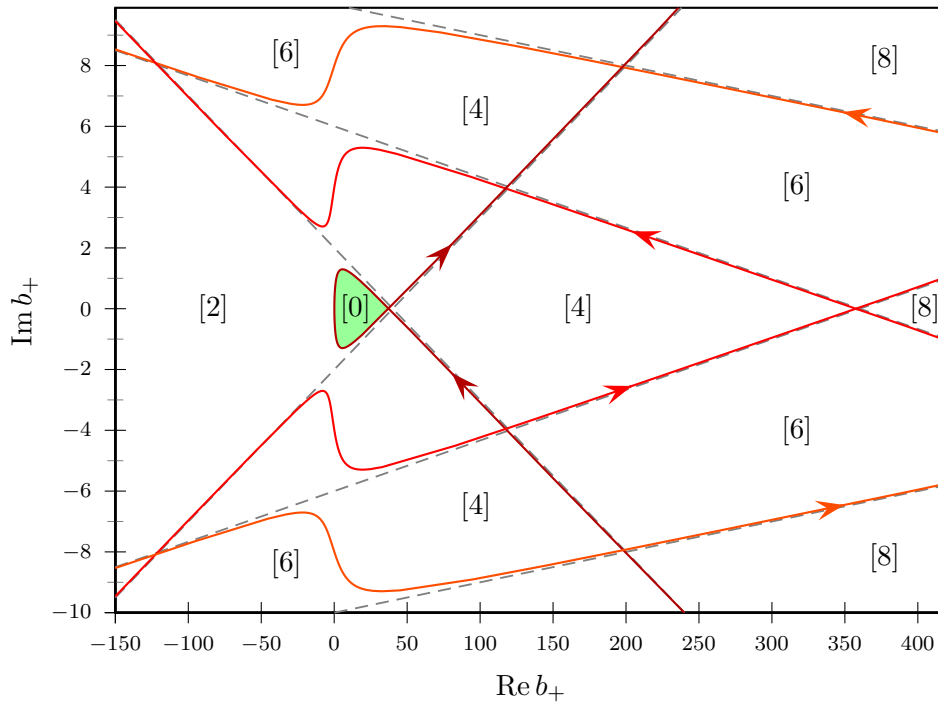


Abbildung 6: Darstellung der Stabilisierungskurve  $b_+(\cdot)$  mit mehreren „Ästen“  
 Die Stabilisierungsregion  $\Lambda_+^{a\theta}$  ist in grün dargestellt. Die Pfeile geben die Richtung steigender  $\omega$  an. In eckigen Klammern ist die instabile Dimension  $E_+(b_+)$  der einzelnen – von den  $b_+$ -Kurveästen eingegrenzten – Regionen angegeben. Jedes Überqueren der Kurve von links nach rechts führt zu einer Erhöhung von  $E_+$  um zwei.  
 Die gestrichelten Geraden stellen die Asymptoten aus Gleichung (9.23) dar. Es wurden  $\theta = \frac{1}{4}\pi$  und  $a = 0.1$  gewählt.

Damit haben wir für  $a < 1/\theta$  eine Region von Kontrollen  $b_+ \in \Lambda_+^{a\theta}$  gefunden, die  $z_+ \equiv 0$  stabilisiert.

#### 9.4. Stabilisierungsregion für die periodischen Orbits

In  $z_+$  haben wir eine Stabilisierungsregion gefunden. In  $z_-$  wollen wir daher das gleiche erreichen. Die Kurve  $b_-(\omega)$  wird dann die Grenze unserer Region sein. Diese sieht immer gleich aus, skaliert nur antiproportional mit  $\theta$ .

Da wir hier aber einen (nicht trivialen) periodischen Orbit stabilisieren wollen, haben wir mit der Bestimmung der instabilen Dimension für das Gleichgewicht  $z_- \equiv 0$  unser Ziel noch nicht erreicht.  $E_-(b_-) = 0$  ist jedoch eine notwendige Bedingung für eine mögliche Stabilisierung.

## 9. Beweis der Stabilisierungssätze

---

Mit  $E_-(0) = 0$  haben wir bereits die Existenz zumindest einer – möglicherweise zur Stabilisierung geeigneten – Kontrolle gegeben. In vielen Fällen wird  $b_- = 0$  allerdings die periodischen Orbits nicht stabilisieren. Ermitteln wir also auch hier die Region mit  $E_- = 0$ .

Dank der im Imaginärteil konstanten Ableitung  $\text{Im } b'_-(\omega) = -1$  ist die Region leicht zu bestimmen. Es gibt keine Selbstüberschneidungen der Kurve und wir können  $\text{Re } b_-(\omega)$  auch als Funktion von  $\text{Im } b_-(\omega) = -\omega$  auffassen:

$$\text{Re } b_-(\text{Im } b_-(\omega)) = (\text{Im } b_-(\omega)) \cdot \cot(\theta \cdot \text{Im } b_-(\omega)) \quad (9.24)$$

Die Kurve ist – nach zu  $\theta$  proportionaler Skalierung – immer identisch zu der in Abbildung 4b, was wir leicht erkennen können, indem wir Gleichung 9.24 mit Parameter  $\text{Im } b_-(\omega) = -\omega/\theta$  betrachten:

$$\text{Re } b_-\left(-\frac{\omega}{\theta}\right) = \frac{\omega}{\theta} \cot(\omega) = \frac{1}{\theta} \text{Re } b_-(-\omega) \quad (9.25)$$

Als Veranschaulichung für die  $\theta$ -Abhängigkeit sollen folgende Punkte auf der Kurve dienen:

$$b_-(0) = -\frac{1}{\theta} \quad (9.26a)$$

$$b_-\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) = i\frac{\pi}{2\theta} \quad (9.26b)$$

$$b_-\left(-\frac{\pi}{2\theta}\right) = -i\frac{\pi}{2\theta} \quad (9.26c)$$

$$b_-\left(\frac{\pi}{\theta}\right) = \infty + i\frac{\pi}{\theta} \quad (9.26d)$$

$$b_-\left(-\frac{\pi}{\theta}\right) = \infty - i\frac{\pi}{\theta} \quad (9.26e)$$

wobei die Definitionslücke in  $\omega = 0$  hebbar ist und  $b_-(\pm\pi/\theta)$  als Grenzwert von unten respektive oben gemeint sind.

Überquert man  $b_-(\cdot)$  von innen, so erhöht sich  $E_-$  um 2. Damit ist  $\Lambda_-^\theta$  die Region, in der  $E_- = 0$  gilt.

Nun haben wir also eine sehr einfache Region, die sowohl  $b_-$  mit positivem als auch negativem Real- und Imaginärteil enthält.

*Bemerkung.* Die beiden Regionen  $\Lambda_+^{a\theta}$  und  $\Lambda_-^\theta$  werden mit sinkendem  $\theta$  immer größer (siehe Abbildung 5, bzw. Gleichungen (9.26a-e)). Für  $\theta \rightarrow \infty$  schrumpft  $\Lambda_-^\theta$  auf die positive reelle Achse  $\mathbb{R}_+$  zusammen.

## 9.5. Stabilisierung der periodischen Orbits

Die Stabilisierungsregion für das Gleichgewicht  $z_- \equiv 0$  wurde im vorherigen Abschnitt gefunden. Wenn wir  $b_- \in \Lambda_-^\theta$  wählen, haben wir also ein stabiles Objekt, das seine Stabilität bei der Hopf-Verzweigung an die periodischen Orbits abgeben *kann*. Wir wollen überprüfen, wann das auch wirklich geschieht.

Dazu betrachten wir, für festes  $b_-$ , die  $(\lambda, \tau)$ -Ebene. Bisher haben wir uns nur das Verhalten von Lösungen unserer charakteristischen Gleichung für den Verzweigungspunkt

$$(\lambda, \tau) = \left( 2a, \frac{\theta p_-(2a)}{2\pi} \right) = (2a, \theta) \quad (9.27)$$

angesehen. Da die periodischen Orbits für  $\lambda > 2a$  (superkritischer Fall) bzw.  $\lambda < 2a$  (subkritischer Fall) auftreten, sollten wir entsprechende Lösungen von (9.2b) auf Stabilitätswechsel untersuchen. Zwei Kurven sind dabei von Interesse: Die Pyragas-Kurve der nichtinvasiven Verzögerungszeiten und die Hopfkurve der Punkte  $(\lambda, \tau)$ , für die (9.2b) rein imaginäre Lösungen besitzt.

Die Lage der beiden Kurven zueinander bestimmt dann, ob unsere abzweigenden Orbits stabil oder instabil werden.

Wir betrachten zunächst die mit den Umlaufzeiten periodischer Lösungen korrespondierenden Verzögerungszeiten

$$\tau(\lambda) = \frac{\theta p_-(\lambda)}{2\pi} = \frac{\theta}{2\pi} \frac{2\pi}{1 + r_-^2(\lambda) \operatorname{Im} \gamma} = \frac{\theta}{1 - (\lambda - 2a) \operatorname{Im} \gamma / \operatorname{Re} \gamma}. \quad (9.28)$$

Sie bilden die Pyragas-Kurve, die im subkritischen Fall für  $\lambda < 2a$  und im superkritischen für  $\lambda > 2a$  definiert ist. Zunächst wollen wir die Tangente an die Kurve in der  $(\lambda, \tau)$ -Ebene bei  $\lambda = 2a, \tau = \theta$  berechnen. Seien also

$$\lambda = 2a + \hat{\lambda} + o(\hat{\lambda}) \quad \text{und} \quad (9.29a)$$

$$\tau = \theta + \hat{\tau} + o(\hat{\tau}), \quad (9.29b)$$

wobei  $o(\hat{\lambda})$  wie üblich Terme höherer Ordnung bezeichnet, dann ergibt sich die Linearisierung von  $\tau$  zu

$$\hat{\tau} = \hat{\lambda} \theta \frac{\operatorname{Im} \gamma}{\operatorname{Re} \gamma} \quad (9.30)$$

In der nicht entarteten Hopf-Normalform ist  $\operatorname{Re} \gamma \neq 0$ , also haben wir immer eine Tangente in dieser Form.

Kommen wir zur Hopfkurve. Für diese haben wir keine explizite Darstellung. Wir benötigen allerdings nur die Tangente an  $(2a, \theta)$ , um Aussagen für  $\lambda$  nahe  $2a$  treffen zu

können. Betrachten wir also die charakteristische Gleichung (9.2b) und ersetzen wir  $\eta$  durch  $i(2\omega + 1)$ :

$$\begin{aligned} 0 = \chi_-(\omega) &= \lambda - 2a + i - b_- \cdot (T e^{-\tau \cdot i(1+2\omega)} + 1) - i(1 + 2\omega) \\ &= \lambda - 2a - b_- \cdot (-e^{i\theta} e^{-i(\tau+2\omega\tau)} + 1) - 2i\omega \end{aligned} \quad (9.31)$$

Für die Koordinaten der Tangente führen wir die Bezeichnungen

$$\lambda = 2a + \tilde{\lambda} + o(\tilde{\lambda}) \quad \text{und} \quad (9.32a)$$

$$\tau = \theta + \tilde{\tau} + o(\tilde{\tau}) \quad (9.32b)$$

ein. Die Linearisierung in  $\lambda, \tau$  und  $\omega$  hat dann die Form:

$$0 = \chi_-(\omega) = \tilde{\lambda} - b_- \cdot (2i\theta\omega + i\tilde{\tau}) - 2i\omega \quad (9.33)$$

Bei getrennter Betrachtung von Real- und Imaginärteil ergibt sich das Gleichungssystem

$$\tilde{\lambda} = -\operatorname{Im} b_- \cdot (2\theta\omega + \tilde{\tau}) \quad (9.34a)$$

$$0 = -\operatorname{Re} b_- \cdot (2\theta\omega + \tilde{\tau}) - 2\omega, \quad (9.34b)$$

aus dem sich durch Umstellen

$$\tilde{\tau} = \frac{-2\omega}{\operatorname{Re} b_-} - 2\theta\omega = -\frac{1 + \theta \operatorname{Re} b_-}{\operatorname{Re} b_-} 2\omega \quad (9.35a)$$

$$\tilde{\lambda} = \operatorname{Im} b_- \cdot (2\theta\omega - \frac{2\omega}{\operatorname{Re} b_-} - 2\theta\omega) = \frac{\operatorname{Im} b_-}{\operatorname{Re} b_-} 2\omega \quad (9.35b)$$

ergibt. Diese Tangenten-Gleichungen werden uns im weiteren Verlauf helfen, Regionen für  $b_-$  zu finden, für welche die abzweigenden periodischen Orbits durch unsere Kontrolle stabilisiert werden.

Da  $\Lambda_\theta^-$  nur  $b_-$  mit  $\operatorname{Re} b_- > -1/\theta$  enthält, verschwindet unsere Tangente nur für  $\operatorname{Re} b_- = 0$ . Im Sonderfall  $\operatorname{Im} b_- = 0$  verläuft sie senkrecht. Nach implizitem Funktionensatz gibt es also nahe  $\omega = 0$  die Hopfkurve  $(\lambda(\omega), \tau(\omega))$ .

Was geschieht nun, wenn die Pyragas-Kurve die Hopfkurve schneidet, wie es bei  $(2a, \theta)$  der Fall ist? Es könnte dort zu einer Stabilitätsänderung des Gleichgewichts  $z_- \equiv 0$  kommen. In einem solchen Fall würden die instabilen periodischen Orbits eben diese Stabilität übernehmen.

Also bestimmen wir, inwiefern ein Überqueren der Hopfkurve zu einer Änderung der instabilen Dimension führt. Linearisieren wir dazu die charakteristische Gleichung (9.2b) mittels der Ersetzungen

$$\lambda = 2a + \check{\lambda} \quad (9.36a)$$

$$\tau = \theta + \check{\tau} \quad (9.36b)$$

$$\eta = i + \check{\eta}, \quad (9.36c)$$



so erhalten wir

$$0 = \check{\chi}_-(\check{\lambda}, \check{\tau}, \check{\eta}) = \check{\lambda} - b_- \cdot (\check{\tau}\eta + \tau\check{\eta}) \exp(-\tau\eta + i\theta) - \check{\eta}. \quad (9.37)$$

Diese Gleichung teilen wir durch Einführen einer Hilfsvariablen  $\check{\xi}$  in zwei (einfache) Gleichungen auf:

$$\check{\xi} = \varphi(\check{\lambda}, \check{\tau}) = \check{\lambda} - b_- \cdot \check{\tau} \exp(-\tau\eta + i\theta) \quad (9.38a)$$

$$\check{\xi} = \psi(\check{\eta}) = -(b_- \cdot \tau \exp(-\tau\eta + i\theta) + 1) \cdot \check{\eta} \quad (9.38b)$$

Durch diese Abbildungen können wir unsere Kurve in der Form

$$(\check{\lambda}, \check{\tau}) = (\varphi^{-1} \circ \psi)(\check{\eta}) \quad (9.39)$$

schreiben (solange  $\varphi$  invertierbar ist). Die Abbildung  $\psi: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  ist komplex linear, also richtungserhaltend sofern

$$0 \neq b_- \cdot \tau \exp(-\tau\eta + i\theta) + 1 \quad (9.40)$$

$$\Leftrightarrow b_- \neq -\frac{1}{\tau} \exp(\tau\eta - i\theta) \approx -\frac{1}{\theta}. \quad (9.41)$$

Innerhalb unserer offenen Region  $\Lambda_-^\theta$  ist diese Bedingung erfüllt,  $\psi$  also richtungserhaltend. Für die Abbildung  $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  können wir die (reelle) Determinante bestimmen:

$$\begin{aligned} \det \varphi &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{Re}(\eta b_- \cdot \exp(-\tau\eta + i\theta)) \\ 0 & \operatorname{Im}(\eta b_- \cdot \exp(-\tau\eta + i\theta)) \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Im}(\eta b_- \cdot \exp(-\tau\eta + i\theta)) \\ &= -\operatorname{Re} b_- \end{aligned} \quad (9.42)$$

Damit haben wir die Möglichkeit  $\varphi$  (und damit  $(\varphi^{-1} \circ \psi)$ ) orientierungserhaltend oder -umkehrend zu wählen.

Für  $\operatorname{Re} b_- > 0$  ist die Determinante negativ, also kehrt  $(\varphi^{-1} \circ \psi)$  die Orientierung um.

Für  $\operatorname{Re} b_- < 0$  bleibt dagegen die Orientierung erhalten.\*

Unsere Region  $\Lambda_-^\theta$  enthält das Intervall  $(-1/\theta, \infty)$ , also stehen uns immer passende Parameter für beide Wahlen zur Verfügung.

Da wir nun also wissen, wie für unsere Eigenwerte  $\eta$  „rechts und links“ der Hopfkurve mit „rechts und links“ der imaginären Achse korrespondieren, ist unsere Frage nach der Änderung der instabilen Dimension beantwortet:

Das Gebiet mit  $E_- = 2$  liegt in der  $(\lambda, \tau)$ -Ebene *rechts* der Hopfkurve, falls  $\operatorname{Re} b_- > 0$  und *links* der Hopfkurve falls  $\operatorname{Re} b_- < 0$ .

---

\* $\operatorname{Re} b_- = 0$  ist erneut ein Sonderfall. Er wird in Bemerkung 9.5 besprochen.

## 9. Beweis der Stabilisierungssätze

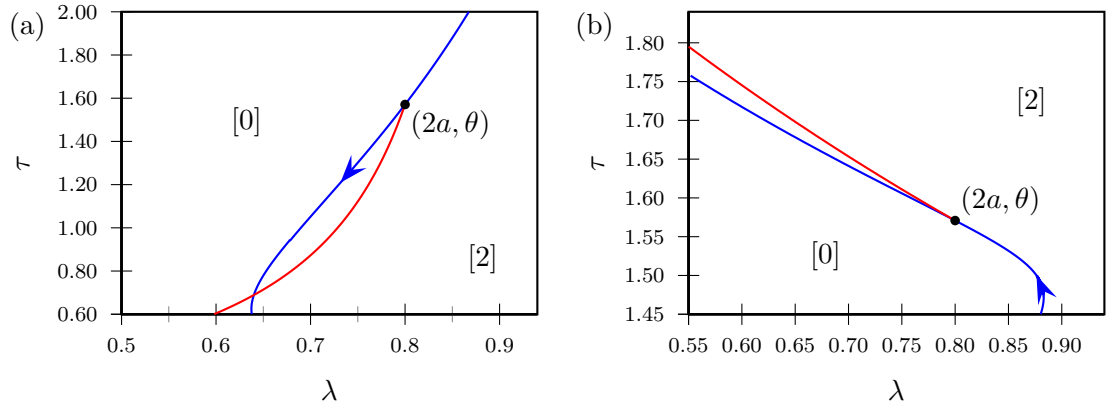


Abbildung 7: Lage der Hopf- (blau) und der Pyragas-Kurve (rot) im subkritischen Fall

Die folgenden Unterfälle werden betrachtet:

Harte Feder (a):  $\gamma = 1 + 8i$ ,  $b_- = 3 - i \Rightarrow \text{Im } b_- < g(\text{Re } b_-) = -0.125(\text{Re } b_- + 1/\theta)$

Weiche Feder (b):  $\gamma = 1 - 0.5i$ ,  $b_- = -0.5 + 0.3i \Rightarrow \text{Im } b_- > g(\text{Re } b_-) = 2(\text{Re } b_- + 1/\theta)$

Die Pfeile geben die Richtung steigender  $\omega$  an.

Für Fall (b) wurden in Abbildung 4 die Gerade  $g$  und  $b_-$  eingezeichnet.

Was bedeutet das für unsere Stabilisierung? Damit die periodischen Orbits, die für  $\lambda > 2a$  (superkritischer Fall) bzw.  $\lambda < 2a$  (subkritischer Fall) abzweigen, stabil sind, sollte die Pyragas-Kurve in die Region mit  $E_- = 2$  zeigen. Dort „übernimmt“ das Gleichgewicht die Instabilität. Solange die Kurve diese Region nicht verlässt – also für  $\lambda$  ausreichend nahe  $2a$  – sind die entsprechenden Orbits stabil.

Betrachten wir zuerst den *subkritischen Fall*  $\text{Re } \gamma > 0$ .

Hier zeigt die Pyragas-Kurve in Richtung negativer  $\hat{\lambda}$ . Die Hopf-Kurve deutet, je nach Wahl von  $b_-$ , in positive oder negative  $\hat{\lambda}$ -Richtung (entspricht  $\text{Re } b_- / \text{Im } b_- > 0$  bzw.  $\text{Re } b_- / \text{Im } b_- < 0$ ). Außerdem steigt  $\tilde{\tau}$  mit  $\omega$  für  $\text{Re } b_- < 0$  und fällt für  $\text{Re } b_- > 0$ , wie wir an (9.35a) sehen.

Wir benötigen für  $\text{Re } b_- > 0$  das Gebiet links der Hopf-Kurve und für  $\text{Re } b_- < 0$  das rechts von dieser.  $b_-$  muss folglich so gewählt werden, dass die Steigungen

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\lambda}} > \frac{\hat{\tau}}{\hat{\lambda}} & \text{für } \text{Re } b_- > 0, \text{Im } b_- > 0 \\ \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\lambda}} < \frac{\hat{\tau}}{\hat{\lambda}} & \text{für } \text{Re } b_- > 0, \text{Im } b_- < 0 \\ \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\lambda}} > \frac{\hat{\tau}}{\hat{\lambda}} & \text{für } \text{Re } b_- < 0, \text{Im } b_- > 0 \\ \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\lambda}} < \frac{\hat{\tau}}{\hat{\lambda}} & \text{für } \text{Re } b_- < 0, \text{Im } b_- < 0 \end{array} \right. \quad (9.43)$$

erfüllen, damit die Kurven korrekt zu einander orientiert sind.

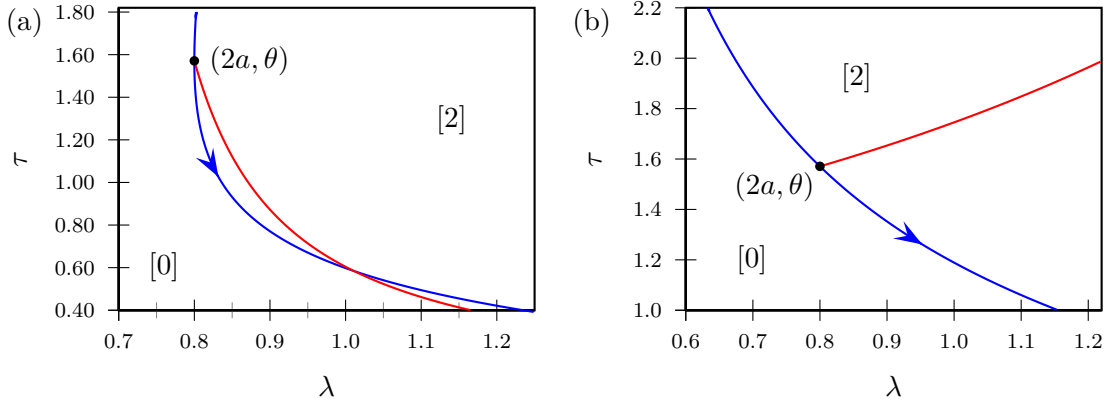


Abbildung 8: Lage der Hopf- (blau) und der Pyragas-Kurve (rot) im superkritischen Fall

Die betrachteten Unterfälle sind diesmal:

Harte Feder (a):  $\gamma = -1 + 8i$ ,  $b_- = 2 \Rightarrow \operatorname{Im} b_- < g(\operatorname{Re} b_-) = 0.125(\operatorname{Re} b_- + 1/\theta)$

Weiche Feder (b):  $\gamma = -1 - 0.5i$ ,  $b_- = 1 + i \Rightarrow \operatorname{Im} b_- > g(\operatorname{Re} b_-) = -2(\operatorname{Re} b_- + 1/\theta)$

Für beide Fälle sowie die in Abbildung 7 wurde  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  und  $a = 0.4$  gewählt. In eckigen Klammern ist die instabile Dimension des Gleichgewichts angegeben.

Im Folgenden kürzen wir diese Art Fallunterscheidungen durch die Verwendung von  $\gtrsim$  und  $\lesssim$  ab. So lassen sich die obigen Fälle etwa zu

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\lambda}} \gtrsim \frac{\hat{\tau}}{\hat{\lambda}} \quad \text{für } \operatorname{Im} b_- \gtrsim 0 \quad (9.44)$$

zusammenfassen.

Nun widmen wir uns dem *superkritischen Fall*  $\operatorname{Re} \gamma < 0$ .

Hier zeigt die Pyragas-Kurve in Richtung positiver  $\hat{\lambda}$ . Die Bedingungen an die Steigungen kehren sich also gerade alle um:

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\lambda}} \lesssim \frac{\hat{\tau}}{\hat{\lambda}} \quad \text{für } \operatorname{Im} b_- \gtrsim 0 \quad (9.45)$$

Einsetzen der in (9.30), (9.35a) und (9.35b) gefundenen Werte führt dann auf die Ungleichung

$$-\frac{1 + \theta \operatorname{Re} b_-}{\operatorname{Im} b_-} \gtrsim \theta \frac{\operatorname{Im} \gamma}{\operatorname{Re} \gamma} \quad \text{für } \operatorname{Im} b_- \cdot \operatorname{Re} \gamma \gtrsim 0, \quad (9.46)$$

wobei der sub- und superkritische Fall bereits zusammengefasst sind.

Um die in Satz 8.2 definierte Einschränkungsgregion  $G$  zu erhalten, stellen wir die Ungleichung (9.46) noch so um, dass nur  $\operatorname{Im} b_-$  auf der linken Seite steht:

$$\operatorname{Im} b_- \lesssim -(1/\theta + \operatorname{Re} b_-) \cdot \frac{\operatorname{Re} \gamma}{\operatorname{Im} \gamma} \quad \text{für } \operatorname{Im} \gamma \gtrsim 0, \quad (9.47)$$

wobei wir ausnutzen, dass sich die Ungleichung mit jedem Vorzeichenwechsel in den reellen und imaginären Komponenten von  $b_-$  und  $\gamma$  umkehrt.

Die rechte Seite von (9.47) entspricht der im Satz 8.2 in (8.10) definierten Funktion  $g$ . Die beiden Fälle mit positivem und negativem  $\text{Im } \gamma$  definieren dann unsere Gebiets-Einschränkung  $G$  in den Fällen 1 bzw. 2.

*Bemerkung.* Es bleiben die Fälle  $\text{Re } b_- = 0$ ,  $\text{Im } b_- = 0$  und  $\text{Im } \gamma = 0$  zu klären. Diese sind jeweils Grenzfälle, in denen die oben verwendeten Umformungen nicht mehr wohldefiniert sind.

Für  $\text{Im } b_- = 0$  verläuft die Tangente  $\tilde{\tau}$  senkrecht von oben nach unten ( $\text{Re } b_- > 0$ ) bzw. von unten nach oben ( $\text{Re } b_- < 0$ ). Die Ungleichung (9.47) ist damit weiterhin eine hinreichende Bedingung für Stabilisierung.

Auch für  $\text{Re } b_- = 0$  macht die Ungleichung keine Probleme, allerdings versagt dann unsere Darstellung der Tangente an die Hopfkurve. Betrachten wir aber (9.31) direkt, ergibt sich durch elementare Umformungen, dass

$$\tau(\omega) = \frac{\theta - \arccos(1 - i2\omega/b_-)}{1 + 2\omega} \quad \text{und} \quad (9.48a)$$

$$\lambda(\omega) = ib_- \cdot \sin(\arccos(1 - i2\omega/b_-)) + 2a \quad (9.48b)$$

die Gleichung lösen.\* Die Hopfkurve existiert also weiterhin, allerdings nur auf einer Seite von  $(2a, \theta)$ . Die imaginäre Achse müssen wir daher von unserer Region stabilisierender  $b_-$  ausschließen.

Für  $\text{Im } \gamma = 0$  verläuft die Pythagoras-Kurve waagerecht und unser Ansatz schlägt im subkritischen Fall fehl – daher die Einschränkung  $\text{Im } \gamma \neq 0$  in Satz 8.1. Bis auf diese Singularitäten sind aber keine Einschränkungen mehr an  $\gamma$  nötig.

Damit ist der Beweis der Sätze 8.1 und 8.2 abgeschlossen und die periodischen Orbits sind stabilisiert.

---

\*Man nutze  $e^x = \cos(x) + i \sin(x)$  aus um in Real- und Imaginärteil aufzuspalten.  $\sin \arccos(x)$  ließe sich auch als  $\sqrt{1 - x^2}$  schreiben, ist also ein Halbkreis.

---

## Teil V.

# Zusammenfassung und Diskussion

## 10. Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wollen wir die Ergebnisse dieser Arbeit noch einmal zusammenfassen. Mit einem erweiterten Stabilisierungsansatz hatten wir versucht, in Hopf Normalform vorliegende gekoppelte Oszillator-Systeme auch für große Kopplungskonstante  $a$  und „ungünstige“  $\gamma$  zu stabilisieren. In  $a$  ist überhaupt keine Schranke mehr nötig. Für  $\gamma$  müssen wir nur die reelle und imaginäre Achse (also Lebesgue-Nullmengen) ausschließen. Dabei haben wir explizite Regionen für unsere Kontrollparameter  $b_+$  und  $b_-$  erhalten.  $b_+$  kann immer reell gewählt werden.

Die Verzögerungszeit  $\tau$  ist ebenfalls im Intervall  $(0, p_-(2\pi a))$  frei wählbar.

## 11. Vergleich mit bisherigem Ansatz

Da diese Arbeit auf dem Paper von Fiedler et al. [5] basiert, soll hier noch ein kurzer Vergleich der Stabilisierungsansätze stattfinden.

Im eben genannten Paper wurde eine Teilmenge meiner Kontrollterme mit den Einschränkungen

$$b = b_+ = b_- \quad \text{und} \quad (11.1)$$

$$\theta = \pi \quad (11.2)$$

verwendet. Setzt man diese in die Gesamtkontrolle (7.6ab) ein, sieht man, dass  $T = 1$  gilt und die hinteren Terme wegfallen:

$$\dot{z}_1 = f(z_1) + a \cdot (z_2 - z_1) + b \cdot (z_2(t - \tau) - z_1) \quad (11.3a)$$

$$\dot{z}_2 = f(z_2) + a \cdot (z_1 - z_2) + b \cdot (z_1(t - \tau) - z_2) \quad (11.3b)$$

Zur Stabilisierung von  $z_1$  und  $z_2$  wird dann nur die verzögerte Variante des jeweils anderen Oszillators verwendet. Diese Gleichung ist also in den untransformierten Koordinaten um einiges einfacher als mein kompletter Stabilisierungsterm.

Das hat allerdings seinen Preis. Die zulässigen Werte  $b = b_- \in \Lambda_-^\pi$  für die Stabilisierung in der Komponente  $z_-$  müssen ebenfalls im Gebiet  $\Lambda_+^{a\pi}$  liegen, um auch Stabilisierung für  $z_+ \equiv 0$  zu erreichen. Der Stabilisierungsparameter  $b$  kann unter anderem keinen Realteil

kleiner als  $a$  haben, was zu einer Schranke an  $\text{Im } \gamma / \text{Re } \gamma$  im subkritischen Fall führt. Außerdem ist die Verzögerungszeit  $\tau$  durch diesen Ansatz auf

$$\tau = \frac{np_-}{2} \quad n \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \quad (11.4)$$

festgelegt. Für  $a > 1/\pi$  ist dann also keine Stabilisierung mehr möglich.

Nur der Fall  $n = 1$  wurde im Paper explizit behandelt. Wie wir aus Bemerkung 9.4 (S. 28) wissen, führt aber  $n = \theta/\pi > 1$  ohnehin nicht zu größeren Regionen.

Mein erweiterter Stabilisierungsansatz erlaubt also eine größere Freiheit bei der Wahl der Verzögerungszeit  $\tau$ , der Kopplungskonstanten  $a$  und des Parameters  $\gamma$ .

## 12. Einfache Verallgemeinerung

Das in meiner Arbeit betrachtete Stabilisierungsschema ist nur eine Teilmenge aller möglichen Rückkopplungen. Dabei wurde ein Unterraum ausgewählt, der eine Stabilisierung für alle  $\gamma$  und  $a$  zulässt.

Allgemeiner kann man beliebige Kontroll-Systeme

$$\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}) + A\mathbf{z} + B \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t - \tau) \\ \mathbf{z}(t) \end{pmatrix}^T \quad (12.1)$$

betrachten. Dabei ist die Kopplungsmatrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}, \quad (12.2)$$

die Kontrollmatrix  $B \in \mathbb{C}^{2 \times 4}$  zunächst beliebig und  $f$  als komponentenweise Auswertung zu lesen.

Um Nicht-Invasivität zu erreichen müssen dann Einschränkungen an  $B$  vorgenommen werden.

*Bemerkung.* Wir werden (in Abschnitt 13) zu der Vermutung kommen, dass die von uns betrachteten Fälle bereits alle wirklich unterschiedlichen Stabilisierungsansätze dieser Form abdecken.

Eine einfache Erweiterung, die aber nicht mehr im Schema (12.1) notiert werden kann, ist die Einführung von zwei unabhängigen Verzögerungszeiten in  $z_+$  und  $z_-$ . Für diese gilt der Stabilisierungssatz 8.1 ebenfalls, und der Beweis verlief analog.

Die Gleichungen (7.7a) und (7.7b) sind dann ein Spezialfall von

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) + b_+ \cdot (T_+ z_+(t - \tau_+) - z_+) \quad (12.3a)$$

$$\dot{z}_- = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)) - 2az_- - b_- \cdot (T_- z_-(t - \tau_-) + z_-) \quad (12.3b)$$

---

mit  $\tau_+ = \tau_- = \tau$  und  $T_+ = T_- = T$ . Im Beweis der Sätze werden die Gleichungen in  $z_+$  und  $z_-$  nur entkoppelt betrachtet. Die Annahme, dass nur ein gemeinsames  $\tau$  vorliegt, wird nicht verwendet und ist nicht erforderlich.

Diese Freiheit ermöglicht potentiell größere Stabilisierungsregionen. Geht man allerdings davon aus, dass man in beiden Komponenten eine *gemeinsame* untere Schranke an die Verzögerungszeit  $\tau$  hat, ist  $\tau_+ = \tau_- = \tau$  optimal, da die Regionen mit kleinerem  $\theta$  größer werden.\*

In  $z_+$  kann  $T_+$  jetzt beliebig gewählt werden. Es ist nicht einmal nötig, dass  $T_+$  eine Rotation darstellt, da wir nur in  $Z_-$  Nicht-Invasivität benötigen. Weil dort  $z_+ \equiv 0$  gilt, verschwindet jeder in  $z(t)$  und  $z(t - \tau)$  lineare Kontrollterm.

In der Bachelorarbeit von Konstantin Bubolz [3] wird beispielsweise ein zu  $T_+ = 0$  analoger Fall betrachtet. In  $Z_-$  ist der Term mit Kontrolle dann in der Form

$$\begin{aligned}\dot{z}_+ &= f(z_+) - b_+ \cdot z_+ \\ &= (\lambda - b_+ + i + \gamma|z|^2) z_+\end{aligned}\tag{12.4}$$

gegeben. Stabilisierung der Ruhelage nahe  $\lambda = 2a$  ist – da es sich nun um eine einfache Rückkopplung ohne Verzögerung handelt – für  $\operatorname{Re} b_+ > 2a$  erreicht.

Eleganter erreicht man die gleiche Stabilisierung aber, wenn man  $\theta_+$  und (analog zur Definition (7.3)) die Rotation

$$T_+ := e^{i(\theta_+ + \pi)}\tag{12.5}$$

einführt. Lässt man nun  $\theta_+$  gegen 0 laufen, so gilt im Grenzwert  $T_+ = -1$  und  $\tau = 0$ . Also entsteht der Kontrollterm

$$\begin{aligned}\dot{z}_+ &= f(z_+) + b_+ \cdot (-z_+ - z_+) \\ &= (\lambda - 2b_+ + i + \gamma|z|^2) z_+\end{aligned}\tag{12.6}$$

und damit die Stabilisierungsregion

$$\Lambda_+^{a0} = \{b_- \mid \operatorname{Re} b_+ > a\},\tag{12.7}$$

die gewissermaßen als Grenzwert von den in (8.3a) definierten Regionen  $\Lambda_+^{a\theta}$  gesehen werden kann. Genauer existiert für jedes  $b_+ \in \Lambda_+^{a0}$  ein  $\theta > 0$ , sodass  $b_+$  auch in  $\Lambda_+^{a\theta}$  enthalten ist.

---

\*Man vergleiche Bemerkung 9.4

## 13. Alle möglichen Kontrollen

Es stellt sich die Frage, wie weit wir noch von einer Aussage über alle Kontrollmatrizen  $B \in \mathbb{C}^{2 \times 4}$  entfernt sind – also welche Kontrollen noch betrachtet werden müssten. (Die Antwort wird lauten: Wir sind „quasi schon da“.)

An mehreren Punkten in dieser Arbeit haben wir eine Wahl getroffen, welches Stabilisierungsschema wir betrachten. Wir haben festgestellt, dass diese Wahlen insofern zielführend waren, dass fast alle Einschränkungen an die gegebenen Parameter wegfallen.

Ziel war es also Stabilisierung zu erreichen und nicht eine Klassifizierung der möglichen Stabilisierungsansätze durchzuführen. Die Bachelorarbeit von Konstantin Bubolz geht eher in diese Richtung [3]. Von meinem Ansatz ausgehend gibt es aber Anpassungen die nahe liegen und interessante Einblicke liefern.

Beispielsweise ließen sich, neben der Verallgemeinerung mit zwei unabhängigen Verzögerungszeiten  $\tau_{\pm}$ , auch noch die Symmetrien

$$\begin{aligned} z_1(t) &= -T z_1(t - \tau) \quad \text{und} \\ z_2(t) &= -T z_2(t - \tau), \end{aligned}$$

die in den Gleichungen (7.5a) und (7.5d) gefunden wurden, betrachten. Vermutlich können wir diese ebenfalls verwenden, um eine Stabilisierung anzustreben. Sie wurden bei der Betrachtung ausgelassen, da der Wegfall der Bedingungen an  $\gamma$  und  $a$ , wie sie im Paper von Fiedler et. al [5] nötig waren, schon ohne diese zusätzlichen Symmetrien erreichbar war.

Es könnte sich lohnen einen nochmals erweiterten Kontrollterm zu analysieren. Mit der Wahl zweier zusätzlicher Parameter  $c_+, c_- \in \mathbb{C}$ , betrachten wir eine Kontrolle der Form:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f(z_1) + a \cdot (z_2 - z_1) \\ &+ \frac{b_+ + b_-}{2} (T_+ z_2(t - \tau_+) - z_1) + \frac{b_+ - b_-}{2} (T_- z_1(t - \tau_-) - z_2) \\ &+ \frac{c_+ + c_-}{2} (S_+ z_1(t - \sigma_+) - z_1) + \frac{c_+ - c_-}{2} (S_- z_2(t - \sigma_-) - z_2) \end{aligned} \quad (13.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= f(z_2) + a \cdot (z_1 - z_2) \\ &+ \frac{b_+ + b_-}{2} (T_+ z_1(t - \tau_+) - z_2) + \frac{b_+ - b_-}{2} (T_- z_2(t - \tau_-) - z_1) \\ &+ \frac{c_+ + c_-}{2} (S_+ z_2(t - \sigma_+) - z_2) + \frac{c_+ - c_-}{2} (S_- z_1(t - \sigma_-) - z_1) \end{aligned} \quad (13.1b)$$



Diese ist so leider sehr unübersichtlich, wird aber in den besser geeigneten Koordinaten  $z_{\pm}$  wesentlich kürzer:

$$\begin{aligned} \dot{z}_+ &= \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) \\ &\quad + b_+ \cdot (T_+ z_+(t - \tau_+) - z_+) \end{aligned} \quad (13.2a)$$

$$\begin{aligned} &\quad + c_+ \cdot (S_+ z_+(t - \sigma_+) - z_+) \\ \dot{z}_- &= \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)) - 2az_- \\ &\quad - b_- \cdot (T_- z_-(t - \tau_-) + z_-) \\ &\quad - c_- \cdot (S_- z_-(t - \sigma_-) + z_-) \end{aligned} \quad (13.2b)$$

Die Überlegungen aus Abschnitt 12 wurden ebenfalls bei der Konstruktion ausgenutzt und auch auf die Kontrollterme mit Koeffizienten  $c_{\pm}$  angewendet.

Die Nicht-Invasivität ist gegeben, wenn wir

$$S_- = \exp\left(\frac{2\pi\sigma_-}{p_-}i\right) \quad (13.3)$$

setzen.  $S_+ \in \mathbb{C}$  ist (ebenso wie  $T_+$ ) beliebig. Damit wären dann bereits 6 unabhängig wählbare komplexe Parameter ( $b_+, b_-, c_+, c_-, T_+, S_+$ ) vorhanden. Die Parameter  $T_-$  und  $S_-$  sind durch die Verzögerungszeiten  $\tau_-$  und  $\sigma_-$  festgelegt, da das System ansonsten invasiv auf den periodischen Orbits in  $Z_-$  wäre.

Diese Erweiterung hat für identische Verzögerungszeiten  $\tau_+ = \tau_- = \sigma_+ = \sigma_- = \tau$  die in (12.1) gegebene Matrix-Form. Falls wir davon ausgehen, dass die Nicht-Invasivität immer zwei komplexe Parameter (in unserem Fall  $T_-$  und  $S_-$ ) festlegt, so sehen wir, dass die Matrix  $B$  ebenfalls nur sechs freie komplexe Koeffizienten hat. Würden wir noch das System (13.2ab) bezüglich seiner Stabilisierungsregionen betrachten, dann hätten wir *alle* möglichen Stabilisierungen dieser Form gefunden.

Mit nur einer Verzögerungszeit  $\tau$  lässt sich das System einfach auf das bereits bekannte zurückführen.

Einsetzen zeigt, dass der  $b_{+-}$  und der  $c_{+-}$ -Term in  $z_+$  zu

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) + [b_+ + c_+] \cdot (d z_+(t - \tau) - z_+) \quad (13.4)$$

zusammengefasst werden können. Wann genau hier Stabilisierung für bestimmte Konstanten  $d = [T_+ + S_+ - c_+T_+ - b_+S_+]$  möglich ist, müsste noch genauer untersucht werden.

Für den Fall reeller  $d$  siehe man in Herrn Bubolz' Bachelorarbeit [3]. Der Schritt zu allgemeinen (auch komplexen)  $d$  sollte meiner Meinung nach nicht allzu problematisch sein.\*

---

\*Es ist vermutlich für eine Untersuchung passender je einen Kontrollparameter in  $z_+(t - \tau)$  und  $z_+(t)$  anzusetzen.

### 13. Alle möglichen Kontrollen

---

In der  $z_-$ -Koordinate ist das System (13.2b) für  $\tau_- = \sigma_-$  sogar komplett untersucht, da  $T_- = -S_-$  und damit

$$\dot{z}_- = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)) - [b_- - c_-] \cdot (T_- z_-(t - \tau) + z_-) \quad (13.5)$$

gilt. Die Stabilisierung wurde in dieser Arbeit für Kontrollen in genau dieser Form gezeigt.

Bis auf wenige Details sind also alle Stabilisierungsansätze der Form (12.1) bereits gefunden.

*Bemerkung.* Detailfragen – die noch geklärt werden müssten – wären die Betrachtung von komplexen  $d$  sowie die Vermutung, dass zwei komplexe Dimensionen schon dadurch wegfallen, dass die Kontrolle in  $Z_-$  verschwinden soll.

---

## Literatur

- [1] Bellman, Richard / Cooke, Kenneth L. (1963): *Differential-Difference Equations*. Mathematics in Science and Engineering 6, Academic Press
- [2] Bialek, William (?) (2011): *An Integrated, Quantitative Introduction to the Natural Sciences Part 1: Dynamical Models*. Princeton University, Lecture notes ([http://www.princeton.edu/~wbialek/intsci\\_web](http://www.princeton.edu/~wbialek/intsci_web))
- [3] Bubolz / Konstantin (2013): *Stabilisierung periodischer Orbits im System zweier gekoppelter Oszillatoren durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle*. Bachelorarbeit, Freie Universität Berlin (<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/preprints/Bubolz2013-Bachelor.pdf>)
- [4] Diekmann, O. / van Gils S.A. , Lunel / S.M. Verduyn / Walther, H.-O. (1995): *Delay Equations*. Applied mathematical sciences 110, Springer Verlag New York Inc.
- [5] Fiedler, B. / Flunkert, V. / Hövel, P. / Schöll, E. (2011): *Delay stabilization of periodic orbits in coupled oscillator systems*. Philosophical Transactions of the Royal Society A 368, 319-341
- [6] Fiedler, B. / Flunkert, V. / Georgi, M. / Hövel, P. / Schöll, E. (2008): *Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control*. Physical Review Letters 98, 114101
- [7] Kolmanovskii, V. B. / Nosov, V. R. (1986): *Stability of Functional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering 180, Academic Press
- [8] Marsden, J. E. / McCracken, M. (1976): *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Applied mathematical sciences 19, Springer Verlag New York Inc.
- [9] Nakajima, Hiroyuki (1997): *On analytical properties of delayed feedback control of chaos*. Physics Letters A 232, 207-210
- [10] Nolting, Wolfgang (2010): *Grundkurs Theoretische Physik 1*. Springer-Lehrbuch
- [11] Pyragas, K. (1992): *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*. Physics Letters A 170, 421-428
- [12] Rahn, Theo u.a. (1985): *ICE – Zug der Zukunft*. Darmstadt, Hestramerlag

- [13] Schneider, Isabelle (2011): *Stabilisierung von drei symmetrisch gekoppelten Oszillatoren durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle*. Bachelorarbeit, Freie Universität Berlin (<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/preprints/Schneider2011-Bachelor.pdf>)
- [14] Schneider, Isabelle (2012): *Delayed feedback control of three diffusively coupled Stuart-Landau oscillators: a case study in equivariant Hopf bifurcation*. Philosophical Transactions of the Royal Society, im Druck ([http://dynamics.mi.fu-berlin.de/preprints/Schneider\\_2012.pdf](http://dynamics.mi.fu-berlin.de/preprints/Schneider_2012.pdf))
- [15] Smith, Hal (2011): *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Texts in Applied Mathematics 57

## Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Bernold Fiedler für das wirklich vielseitige Thema. Außerdem bedanke ich mich bei Isabelle Schneider für die hilfreichen Kommentare zu meinem Stabilisierungsansatz und der Struktur der Arbeit. Auch Konstantin Bubolz sei für seine inhaltlichen Anmerkungen gedankt. Nicht zuletzt gilt den fleißigen „Vorab-Lesern“ Alexander Fritz und Oliver Zwingel mein Dank. Ihre kritischen Kommentare haben der Arbeit zu mehr Verständlichkeit verholfen.