

Bachelorarbeit
Monobachelor Mathematik

Homokline Tangenten und Kaskaden periodenverdoppelnder Verzweigungen

Christopher Brandt

Betreuung durch Prof. Dr. Bernold Fiedler

Freie Universität
Berlin

Zusammenfassung

Es werden Einparameterfamilien zweidimensionaler Diffeomorphismen betrachtet, insbesondere solche, die für einen bestimmten Parameterwert eine homokline Tangente aufweisen, d.h. es liegt ein Berührungspunkt der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Fixpunktes vor. Mit einer solchen globalen Verzweigung, oder Bifurkation, ist eine Vielzahl von dynamischen Phänomenen verbunden. Beispiele hierfür sind Hufeisen, hyperbolische Mengen, Kaskaden homokliner Berührungspunkte, Kaskaden periodenverdoppelnder Verzweigungen und unendlich viele Attraktoren.

Besonderer Fokus dieser Arbeit liegt auf den Kaskaden periodenverdoppelnder Bifurkationen. Es wird gezeigt, dass der natürlichen Entstehung eines Horseshoes (welche wiederum, wie ebenfalls gezeigt wird, eine Folge der homoklinen Tangente ist) unendlich viele periodenverdoppelnde Bifurkationen vorausgehen, deren Perioden unbeschränkt sind.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
1 Homokline Tangenten	1
1.1 Einführung	1
1.2 Beschreibung der Situation	2
1.3 Smales Hufeisen	4
1.4 Entfaltung der homoklinen Berührungspunkte	6
1.5 Die generische saddle-node und periodenverdoppelnde Bifurkation	7
1.5.1 Die generische saddle-node Bifurkation	9
1.5.2 Die generische periodenverdoppelnde Bifurkation	11
2 Kaskaden periodenverdoppelter Bifurkationen	15
2.1 Annahmen und Definitionen	15
2.2 Formulierung des Hauptresultats	16
2.3 Beweis	17
3 Ausblick	23
4 Appendix: Smales Hufeisen	27
Literaturverzeichnis	33

Abbildungsverzeichnis

1.1	Die stabile und instabile Mannigfaltigkeit des hyperbolischen Sattels $x_\lambda = 0$ für verschiedene Werte von λ	4
1.2	Schematische Darstellung des Hufeisens: Das Rechteck und dessen Bild, zerlegt in jeweils drei Teile.	5
1.3	Diagram zur Äquivalenz von der Abbildung f auf Λ zum Shift auf zwei Symbolen.	5
1.4	Entstehung des Hufeisens durch Variation des Parameters.	8
1.5	Bifurkationsdiagramme der generischen saddlenode Bifurkation, hier $c(0)>0$, für $c(0)<0$ ergeben sich genau umgekehrte Stabilitäten.	11
1.6	Bifurkationsdiagramme der generischen saddlenode Bifurkation, $(D_\lambda b)(0) < 0$. Für $(D_\lambda b)(0) > 0$ vertauschen alle Stabilitäten.	13
2.1	Schematische Darstellung des Pfadabschnitts (λ, x_λ) aus dem Beweis.	19
2.2	Fortsetzung des Pfades an Bifurkationen, falls wir uns auf einem Pfad von nicht-Möbius Sätteln befunden haben.	19
2.3	Fortsetzung des Pfades an Bifurkationen, falls wir uns auf einem Pfad von Attraktoren befunden haben.	20
2.4	Entstehung einer Schleife beim Starten von einem Möbius-Sattel aus.	21
4.1	Diagram zur Equivalenz von der Abbildung f auf Λ zum Shift auf zwei Symbolen.	29

Kapitel 1

Homokline Tangenten

1.1 Einführung

Es soll eine Verzweigung, oder *Bifurkation*, vorgestellt werden, die eine Vielzahl interessanter dynamischer Phänomene hervorbringt: Die Entfaltung einer homoklinen Tangente. Man spricht von einer homoklinen Tangente, wenn ein Berührungspunkt zwischen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Fixpunktes vorliegt. Ein dabei auftretendes Phänomen ist eine sogenannte Kaskade periodenverdoppelnder Bifurkationen, welche schließlich dazu führt, dass das System chaotische Dynamik aufweist.

In Kapitel 1.2 werden grundlegende Begriffe eingeführt, die mit diskreten dynamischen Systemen, wie sie hier behandelt werden, in Zusammenhang stehen. Weiterhin wird ein Bild zu dem Begriff der homoklinen Tangente geschaffen. Als kurzer Einschub wird in Kapitel 1.3 und noch einmal formeller im Appendix Smales Hufeisen vorgestellt. Dieses liefert eine bildhafte Darstellung, was chaotische Dynamik ist und warum sie auftritt. Darauf aufbauend wird in 1.4 gezeigt, dass bei der Entfaltung der homoklinen Tangente ein solches Hufeisen auf natürliche Weise entsteht.

Schließlich werden in Kapitel 1.5 zwei lokale Bifurkationen, welche zum Verständnis der Entstehung der Kaskade periodenverdoppelnder Bifurkationen notwendig sind, beschrieben.

In Kapitel 2, dem Hauptteil dieser Arbeit, wird die Entstehung des Hufeisens von einer anderen Seite betrachtet. Es wird gezeigt, dass während der Entstehung des Hufeisens bestimmte periodische Orbits auftreten, welche, während der Parameter variiert wird, ständig ihre Perioden verdoppeln, so dass im vollständigen Hufeisen schließlich periodische Orbits jeder beliebigen (minimalen) Periode auftreten. Da wir in 1.4 gezeigt haben, dass während der Entfaltung der homoklinen Tangente ein Hufeisen entsteht, wissen wir, dass diese Bifurkation mit der Kaskade von periodenverdoppelnden Verzweigungen einhergeht.

Um einen Ausblick zu gewähren, welche Themen mit homoklinen Tangenten und Kaskaden von Periodenverdoppelungen in Zusammenhang stehen, werden in Kapitel 3 einige ausgewählte Ergebnisse vorgestellt.

Im Appendix befinden sich formelle Beweise zu den im Zusammenhang mit Smales Hufeisen gemachten Behauptungen.

Die Ideen dieser Arbeit sind in [PT95] zu finden. Alle anderen Referenzen und direkte Übernahmen von Gedanken sind direkt im Text angegeben.

1.2 Beschreibung der Situation

Wir betrachten einen parameterabhängigen Diffeomorphismus $F_\lambda \in C^3(\mathbb{R}^2)$ (d.h. F_λ hängt dreifach stetig differenzierbar von λ ab und jedes F_λ ist dreifach stetig total differenzierbar), wobei $\lambda \in [-1, 1]$. (Der Grund, dass wir F in $C^3(\mathbb{R}^2)$ wählen ergibt sich aus der Diskussion über periodenverdoppelnde Bifurkationen in Kapitel 1.5.2). Wir betrachten im Folgenden für unterschiedliche Parameterwerte λ sogenannte *Iterationen*

$$x_k \in \mathbb{R}^2, x_{n+1} = F_\lambda(x_n) \quad (1.1)$$

oder, anders aufgefasst, betrachten wir für gegebene $x \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [-1, 1]$ die Menge $\{F_\lambda^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_{(+/-)}\}$. Dazu einige grundlegende Definitionen:

Definition 1. Periodische Orbits und hyperbolische Fixpunkte Sei G ein $C^k(\mathbb{R}^2)$ Diffeomorphismus ($k \geq 1$).

Wir definieren den positiven Orbit $\gamma^+(x, G)$ von $x \in \mathbb{R}^2$ unter G als die Menge $\{G^k(x) \mid k \in \mathbb{N}_+^0\}$, den negativen Orbit $\gamma^-(x, G) := \{G^k(x) \mid k \in \mathbb{N}_-^0\}$ entsprechend. Der Orbit von x unter G ist $\gamma(x, G) := \gamma^+(x, G) \cup \gamma^-(x, G)$. Ist $\gamma(x, G) = \{x\}$, so nennen wir x einen Fixpunkt von G (also $G(x) = x$). Ist $G^n(x) = x$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ so bezeichnen wir x als n -periodischen Orbit von G , ist n die kleinste positive Zahl, so dass $G^n(x) = x$ gilt, sagen wir n ist die minimale Periode von x .

Im Folgenden wird mit $D_x G(x_0)$, oder oft kürzer mit $DG(x_0)$, die Jacobi-Matrix von G an der Stelle x_0 bezeichnet. Dies gilt auch für parameterabhängige Diffeomorphismen F_λ : mit $DF_{\lambda_0}(x_0)$ ist nur die Ableitung nach x (bzw. der Variablen, welche nicht der Parameter ist) gemeint, die Ableitung nach dem Parameter an der Stelle λ_0 , x_0 wird mit $D_\lambda F_{\lambda_0}(x_0)$ bezeichnet.

Wir nennen einen Fixpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ von G einen hyperbolischen Fixpunkt, wenn keiner der Eigenwerte von $DG(x_0)$ im Betrag gleich 1 ist. Wir nennen einen hyperbolischen Fixpunkt einen Sattel, falls es Eigenwerte gibt mit Betrag kleiner 1 und Eigenwerte mit Betrag größer 1.

Sprechen wir über die Stabilität eines Fixpunktes, so ist danach gefragt, wie viele Eigenwerte im Betrag größer oder kleiner als 1 sind. Wir nennen einen Fixpunkt stabil (oder Senke), falls alle Eigenwerte kleiner als 1 sind. Wir nennen ihn instabil, falls ein Eigenwert größer als 1 ist. Diese Definition ist äquivalent zu der folgenden intuitiveren Definition von Stabilität:

Ein Fixpunkt x_0 heißt stabil unter G , falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |G^n(x) - x_0| < \varepsilon$ ($\forall n \geq 0$). In Worten: Die Iterierten von Punkten in der Nähe eines stabilen Fixpunktes bleiben in dessen Nähe. Ein Fixpunkt x_0 heißt instabil, falls er nicht stabil ist.

Satz 1. Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten Sei G ein $C^k(\mathbb{R}^2)$ -Diffeomorphismus, $k \geq 1$, und x_0 ein hyperbolischer Fixpunkt. Unterteile $\mathbb{R}^2 = E^S \oplus E^U$ in die Haupträume zu $|\operatorname{Re spec} DG(x_0)| < 1$ und $|\operatorname{Re spec} DG(x_0)| > 1$. Die Mengen

$$W^S(x_0, G) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} G^n(y) = x_0\} \quad (1.2)$$

und

$$W^U(x_0, G) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} G^{-n}(y) = x_0\} \quad (1.3)$$

sind invariante (d.h. $G(W^{U/S}(x_0, G)) \subseteq W^{U/S}(x_0, G)$) C^k -Mannigfaltigkeiten, wobei $T_{x_0}W^S$ (also der Tangentialraum an W^S an der Stelle x_0) gleich E^S ist, und $T_{x_0}W^U$ gleich E^U ist. Wir nennen $W^S(x_0, G)$ die stabile Mannigfaltigkeit und $W^U(x_0, G)$ die instabile Mannigfaltigkeit von x_0 unter G . Wir werden oft lokale Abschnitte dieser Mannigfaltigkeiten mit $W_{loc}^{S/U}$ bezeichnen.

Der Beweis zu diesem Satz befindet sich z.B. in [Nit71].

Ein hyperbolischer Fixpunkt $x_0 = 0$ für $\lambda = 0$ unseres parameterabhängigen Diffeomorphismus F_λ lässt sich per impliziten Funktionensatz fortsetzen, da $\det(D(F_\lambda - id)(x_0)) \neq 0$ wegen Hyperbolizität, d.h. F_λ besitzt für λ nahe 0 Fixpunkte x_λ nahe x_0 , die stetig von λ abhängen. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $x_\lambda = 0$, ansonsten betrachte $\tilde{F}_\lambda(x) := F_\lambda(x + x_\lambda)$.

Liegt ein Schnittpunkt der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten vor, so lässt sich chaotische Dynamik auf bestimmten Teilmengen des \mathbb{R}^2 finden. Zu einer genaueren Definition von „Chaos“ kommen wir im folgenden Abschnitt, zunächst bemerken wir, dass wir für Fixpunkte x_λ von F_λ , die für $\lambda < 0$ lokal keinen und für $\lambda > 0$ lokal zwei Schnittpunkte ihrer stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten haben, eine globale Bifurkation (d.h. eine Änderung der gesamten Dynamik) bei $\lambda = 0$ beobachten können.

Wir machen also folgende Annahme: $x_\lambda = 0$ sind hyperbolische Sättel von F_λ , wobei die stabile Mannigfaltigkeit $W^S(x_0, F_0)$ und die instabile Mannigfaltigkeit $W^U(x_0, F_0)$ einen Berührungspunkt $q \in \mathbb{R}^2$ haben. Diese Mannigfaltigkeiten sind eindimensional, da genau ein Eigenwert im Betrag größer 1 und einer kleiner 1 ist. Wir wählen Koordinaten¹ (x_1, x_2) , so dass $q = (x_1 = 0, x_2 = 0)$ und die lokale Parametrisierung der stabilen Mannigfaltigkeit, nahe q , folgendermaßen aussieht: $W_{loc}^S := W^S(x_0, G_0) \cap U(q) = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$, wobei $U(q)$ eine genügend kleine offenen Umgebung vom Berührungspunkt q ist. In diesen Koordinaten gilt, dass $W_{loc}^U := W^U(x_0, G_0) \cap U(q) = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = p(x_1) = a \cdot x_1^2 + \dots\}$ und wir nehmen an, dass $a \neq 0$ und $p(x_1)$ ohne Einschränkung größer als 0 in $U(q)$ ist (also $a > 0$) (der lineare Term von $p(x_1)$ verschwindet, da p in q ein lokales Minimum hat). Wir wählen nun geänderte Koordinaten (\tilde{x}_1, x_2) mit $\tilde{x}_1 = x_1 \sqrt{p(x_1)x_1^{-2}} = \sqrt{a} \cdot x_1 + \mathcal{O}(x_1^2)$ (wobei wir mit $\mathcal{O}(g(x))$ stets Terme $f(x)$ meinen, für die gilt: $\exists C > 0$ und x_0 , so dass $\forall |x| \geq |x_0|$ gilt: $|f(x)| \leq |g(x) \cdot C|$). In diesen Koordinaten gilt nun $p(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1^2$ und weiterhin ist die stabile Mannigfaltigkeit durch $\{x_2 = 0\}$ gegeben. D.h. wir können stets annehmen, dass, falls ein solcher Berührungspunkt vorliegt, dieser

¹Mit wir wählen Koordinaten ist gemeint: wir wählen einen Homöomorphismus $\Phi(x)$, so dass für $(\Phi^{-1} \circ F_0 \circ \Phi)(x)$ das folgende gilt...

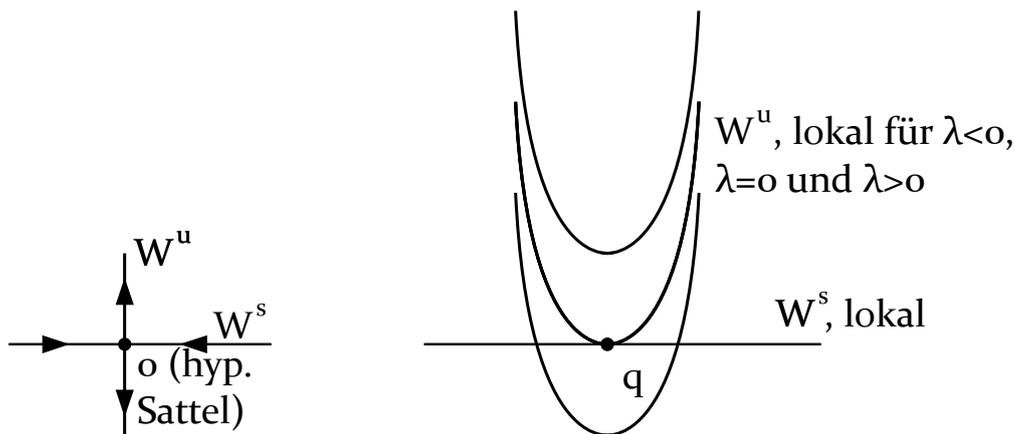


Abbildung 1.1: Die stabile und instabile Mannigfaltigkeit des hyperbolischen Sattels $x_\lambda = 0$ für verschiedene Werte von λ .

ein quadratischer Kontakt ist. Damit ist gemeint, dass die instabile Mannigfaltigkeit lokal als Parabel auf der stabilen Mannigfaltigkeit steht, solange der quadratische Term der Parametrisierung der instabilen Mannigfaltigkeit nach obiger Koordinatentransformation nicht verschwindet.

Alle Orbits von F_λ hängen differenzierbar von λ ab, somit auch die stabile und instabile Mannigfaltigkeit. Das heißt, wir finden Homöomorphismen Φ_λ , so dass die stabile Mannigfaltigkeit $W^S(x_\lambda = 0, \Phi_\lambda^{-1} \circ F_\lambda \circ \Phi_\lambda)$ stets lokal durch die Menge $\{x_2 = 0\}$ gegeben ist, und die instabile Mannigfaltigkeit $W^U(x_\lambda = 0, \Phi_\lambda^{-1} \circ F_\lambda \circ \Phi_\lambda)$ lokal eine Parabel ist, die jedoch lokal für $\lambda < 0$ keinen Schnittpunkt und für $\lambda > 0$ zwei Schnittpunkte hat, d.h. ohne Einschränkung ist $W_{loc}^U(x_\lambda = 0, \Phi_\lambda^{-1} \circ F_\lambda \circ \Phi_\lambda) \cap U(q) = \{x_2 = x_1^2 - b(\lambda)\} \cap U(q)$, wobei b eine Funktion in λ ist, welche die Position des Scheitelpunktes der Parabel bestimmt (also $b(0) = 0$) und wir $D_\lambda b(0) > 0$ fordern (d.h. die Parabeln „schieben sich“ mit positiver Geschwindigkeit ineinander, Transversalitätsbedingung). Die Situation wird in Abbildung 1.1 dargestellt.

1.3 Smales Hufeisen

Smales Hufeisen (vgl. [Sma67]) beschreibt eine der einfachsten Abbildungen, die chaotische Dynamik enthält. Betrachtet wird ein Diffeomorphismus f , welcher ein Rechteck R im \mathbb{R}^2 auf sich selbst abbildet, und zwar wie in Abbildung 1.2 dargestellt, d.h. es streckt das Rechteck R in vertikale Richtung, kontrahiert es in horizontale Richtung und "biegt es um", so dass der Schnitt von Urbild und Bild aus zwei vertikalen Streifen ($f(A) \cap R$ und $f(C) \cap R$ in der Abbildung) besteht, welche horizontalen Streifen des Urbildes entsprechen. Von Interesse ist nun die Menge der Punkte, welche sich unter Iterationen $f^n(R)$ stets auf einem der beiden horizontalen Streifen A und C befinden, d.h. sei $\Lambda := \{x \in R \mid f^n(x) \in R \forall n \in \mathbb{Z}\}$ (die Punkte die unter Iterationen von f stets auf A und C bleiben, sind genau die, welche im gesamten Rechteck R bleiben, denn Punkte auf B werden bereits nach einer Iteration aus dem Rechteck geschoben). Wir nennen Λ

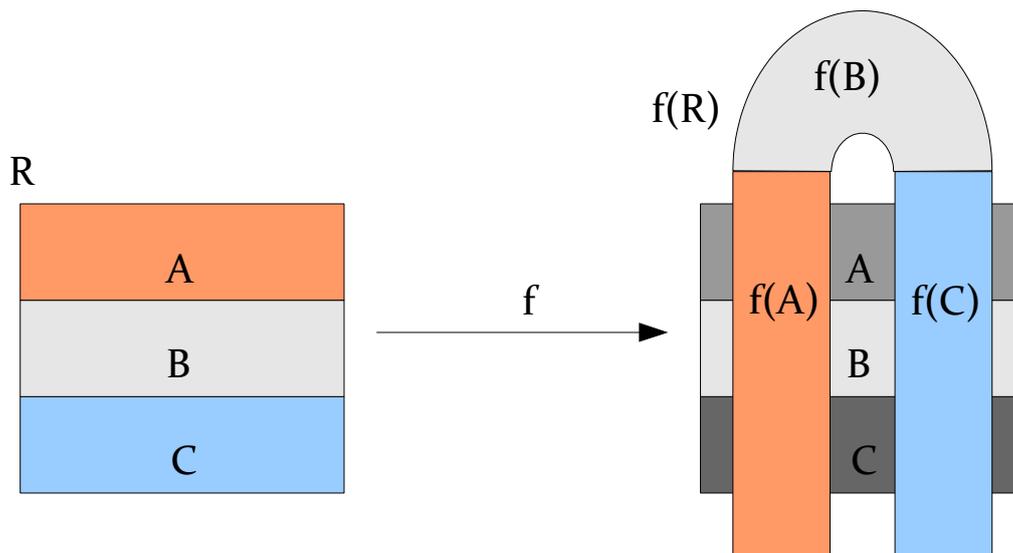


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung des Hufeisens: Das Rechteck und dessen Bild, zerlegt in jeweils drei Teile.

die maximal invariante Menge unter f auf R .

Gleichzeitig definieren wir den Raum der bi-unendlichen Folgen über zwei Symbolen $\Sigma := \{(a_n), n \in \mathbb{Z} \mid a_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathbb{Z}\}$, sowie den sogenannten Shift: $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, welcher eine Folge „nach links verschiebt“, d.h. $(\sigma(a))_n = a_{n+1}$. Wir behaupten nun, dass sich f auf der maximal invarianten Menge Λ genau so verhält wie der Shift σ auf dem Raum Σ , d.h. es existiert ein Homöomorphismus h , so dass das Diagramm in Abbildung 1.3 kommutiert.

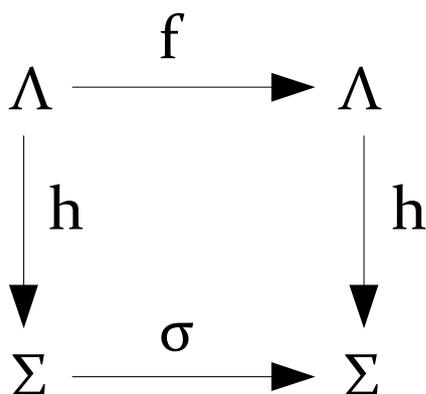


Abbildung 1.3: Diagramm zur Äquivalenz von der Abbildung f auf Λ zum Shift auf zwei Symbolen.

Die Konjugation ist leicht einzusehen: Wir identifizieren eine Folge ...00101... (die fett-

gedruckte **1** stellt das 0-te Element der Folge dar) mit genau dem Punkt $x \in \Lambda$, für den gilt ... $f^{-2}(x) \in A$; $f^{-1}(x) \in A$; $x \in C$; $f(x) \in A$; $f^2(x) \in C$; ..., d.h. wir bezeichnen den horizontalen Streifen A mit 0 und C mit 1 und weisen einer Folge $(a_j) \in \Sigma$ den Punkt in Λ , welcher sich nach der j -ten Iteration von f auf dem a_j -ten horizontalen Streifen befindet. Ein formeller Beweis befindet sich im Appendix, dort wird ebenfalls gezeigt, dass weder die horizontalen Streifen, noch deren Bilder durch Geraden begrenzt werden müssen, es genügen Lipschitzstetige Kurven.

Wir bemerken Folgendes: Σ enthält periodische Orbits jeder beliebigen minimalen Periode, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} \exists a \in \Sigma$, so dass $\sigma^n(a) = a$ ist und $\sigma^k(a) \neq a$ für $0 < k < n$. σ besitzt dichte Orbits auf Σ . Weiterhin besitzt σ auf Σ Sensibilität in den Startwerten, d.h. für jede Folge $a \in \Sigma$ existiert eine beliebig nahe Folge $\tilde{a} \in \Sigma$ für die gilt: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\sigma^n(a), \sigma^n(\tilde{a})) = 0$ aber $\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\sigma^n(a), \sigma^n(\tilde{a})) \geq 1$, wobei dist eine Metrik auf Σ ist. Wegen der Konjugation von $f|_\Lambda$ zu σ teilt f , eingeschränkt auf die maximal invariante Menge, alle diese Eigenschaften, wobei wir diese Eigenschaften als chaotische Dynamik bezeichnen. Formelle Beweise dieser Behauptungen und die konkrete Definition einer Metrik auf Σ befinden sich ebenfalls im Appendix.

Wir werden im folgenden Abschnitt zeigen, dass wir in der Nähe des homoklinen Berührungspunktes q unseres ursprünglichen Diffeomorphismus F_λ die Entstehung eines Hufeisens verfolgen können, wenn wir den Parameter λ verändern, d.h. wir beobachten die Entstehung von chaotischer Dynamik.

Zuletzt sei bemerkt, dass wir durch die horizontale Kontraktion und vertikale Expansion wissen, dass es sich bei allen periodischen Orbits mit Periode k in Λ um Sättel (siehe Definition 1) von f^k handelt.

1.4 Entfaltung der homoklinen Berührungspunkte

Wir möchten nun die Entstehung des oben beschriebenen Hufeisens in der im ersten Abschnitt vorgestellten Bifurkation nachvollziehen. Dazu wählen wir ein Rechteck R , welches sich auf der stabilen Mannigfaltigkeit befindet, dessen Ränder parallel zu dieser sind und welches q enthält. Um zu sehen, wohin das Rechteck nach einer großen Anzahl von Iterationen, $F_\lambda^n(R)$, abgebildet wird, ziehen wir das Lambda-Lemma von Jacob Palis heran:

Satz 2. Lambda-Lemma Sei $G \in C^k(\mathbb{R}^2)$ -Diffeomorphismus, $k \geq 1$, p ein hyperbolischer Sattel und $W^{S/U}$ dessen stabile und instabile Mannigfaltigkeiten (mit jeweils Dimension 1). Sei $x_0 \in W^S$, $x_0 \neq p$ und sei D der Abschnitt einer differenzierbaren Kurve, welche W^S in x_0 transversal schneidet. Dann existiert eine offene Umgebung V von p , so dass Folgendes gilt:

Sei D^n die Zusammenhangskomponente von $G^n(D) \cap V$, welche $x_n := G^n(x_0)$ enthält.

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $\mathbb{N} \ni \hat{n} = \hat{n}(\varepsilon)$, so dass für jedes $n > \hat{n}$ gilt:

$\|D^n - W^U \cap V\|_{C^1} < \varepsilon$. Das heißt der Abstand und die Differenz der Krümmung von der

Iteration einer zur stabilen Mannigfaltigkeit Transversalen D und der instabilen Mannigfaltigkeit werden beliebig klein.

Wir betrachten eine vertikale Gerade des Rechtecks R und nennen diese D . Das Lambda-Lemma sagt uns, dass $D_\lambda^n := F_\lambda^n(D)$ für genügend große n beliebig nahe und fast parallel zur instabilen Mannigfaltigkeit ist. Wir beobachten weiterhin, dass D_λ^n , wegen seiner Nähe zur instabilen Mannigfaltigkeit entlang dieser gestreckt wird. In der Tat, denn wegen Stetigkeit bleiben iterierte Punkte nahe der instabilen Mannigfaltigkeit in der Nähe von iterierten Punkten auf der instabilen Mannigfaltigkeit, diese werden entlang der instabilen Mannigfaltigkeit, weg vom hyperbolischen Sattel geschoben. Wir erhalten damit, dass ein $N = N(D, \lambda)$ existiert, so dass D_λ^N entlang der Parabel verläuft, welche die instabile Mannigfaltigkeit nahe q ist. Es gibt also ab einem bestimmten Parameterwert zwei disjunkte Schnitte von D_λ^N und R . Wenden wir das Lambda-Lemma also auf jede Vertikale durch das Rechteck R an, so erhalten wir ein \hat{N} und ein $\delta > 0$, so dass $F_\lambda^{\hat{N}}(R)$ für $\lambda = -\delta$ einen leeren Schnitt mit R hat und für $\lambda = +\delta$ das Hufeisen Bild aus dem vorigen Abschnitt erfüllt ist (eventuell müssen dazu Höhe und Breite des Rechtecks entsprechend justiert werden). Siehe dazu Abbildung 1.4.

Wir haben also die Entstehung eines Hufeisens auf einem Rechteck R gezeigt, d.h. innerhalb des Rechtecks finden wir eine maximal invariante Teilmenge, auf der wir chaotische Dynamik für $F_{+\delta}^{\hat{N}}$ finden. Im Folgenden schreiben wir

$$\varphi_\lambda := F_\lambda^{\hat{N}} \quad (1.4)$$

In Kapitel 2 werden wir zeigen, dass wir (unter weiteren Voraussetzungen), während wir den Parameter λ von $-\delta$ nach $+\delta$ variieren, sogenannte Kaskaden periodenverdoppelnder Bifurkationen beobachten können. Das sind Zusammenhangskomponenten periodischer Orbits, welche unendlich viele periodenverdoppelnde Bifurkationen (s.u.) enthalten, also auch Orbits beliebiger Periode $k, 2k, 4k, \dots$. Dies wird im nächsten Kapitel präzise formuliert und bewiesen. Zunächst müssen wir im nächsten Abschnitt jedoch zwei grundlegende lokale Bifurkationen, aus denen sich die Kaskaden zusammensetzen werden, einführen.

1.5 Die generische saddle-node und periodenverdoppelnde Bifurkation

Unter (lokalen) Bifurkationen verstehen wir in diesem Zusammenhang Phänomene, die bei der lokalen Untersuchung von Fixpunkten auftreten, während der Parameter verändert wird. Diese treten dann auf, wenn der Fixpunkt seine Stabilität ändert (also ein Eigenwert im Betrag die 1 passiert). Zur Untersuchung der zwei hier vorzustellenden Bifurkationen werden wir zunächst eine Reduktion der Dimension durchführen, indem wir das Vektorfeld auf eine invariante Mannigfaltigkeit einschränken. Dazu wird uns das folgende Theorem über die lokale Zentrumsmannigfaltigkeit helfen:

Satz 3. Die lokale Zentrumsmannigfaltigkeit Sei F ein $C^k(\mathbb{R}^m)$ -Diffeomorphismus, $m \geq 2$, $k \geq 1$ und $0 = F(0)$ ein nicht-hyperbolischer Fixpunkt. Wir betrachten die Iteration

$$x_j \in \mathbb{R}^m, x_{n+1} = F(x_n) \quad (1.5)$$

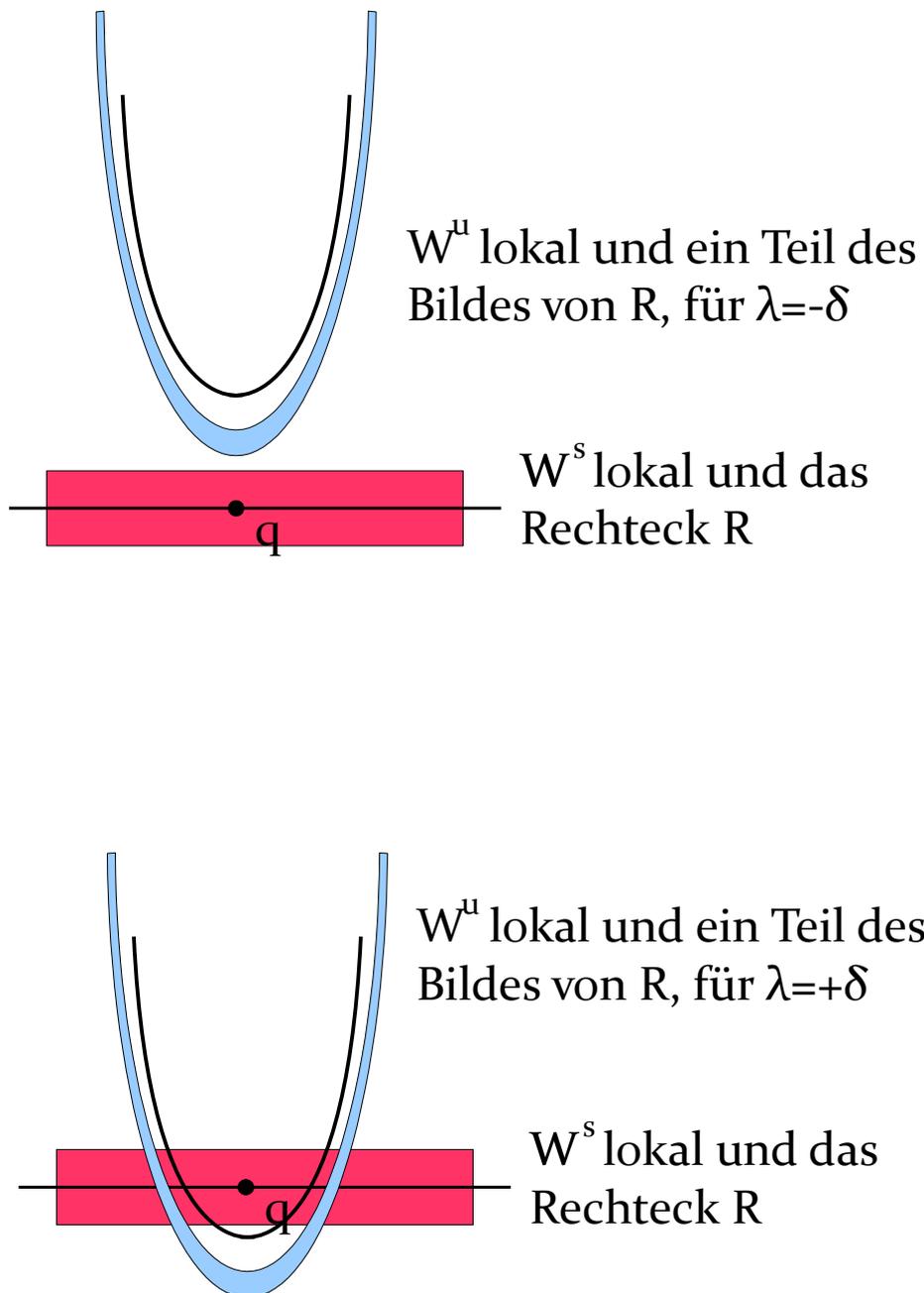


Abbildung 1.4: Entstehung des Hufeisens durch Variation des Parameters.

Sei A die Linearisierung von F im Ursprung. A definiert unter anderem einen sogenannten Zentrums-Unterraum E^c , welcher von den Hauptvektoren (verallgemeinerten Eigenvektoren) aufgespannt wird, die zu den Eigenwerten mit Betrag gleich 1 gehören. Dann existiert eine lokal invariante Mannigfaltigkeit

$$W_{loc}^C = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} \|F^n(x)\| < \infty\} \quad (1.6)$$

welche nicht unbedingt eindeutig ist, C^{k-1} , deren Dimension mit der von E^c übereinstimmt und welche in 0 tangential zu E^c ist (also $T_0 W^C = E^C$). Auf diese Mannigfaltigkeit eingeschränkt ist die Iteration 1.5 lokal äquivalent zu

$$y_j \in W_{loc}^C \subset \mathbb{R}^m, \quad y_{n+1} = A_c y_n + \mathcal{O}(y^2) \quad (1.7)$$

wobei A_c die Matrix aus Basisvektoren von E_c ist.

Für den Beweis verweisen wir auf [PT95]. Aus (1.6) geht hervor, dass lokal alle Fixpunkte teil der lokalen Zentrumsmanigfaltigkeit sind. Um unseren Parameter mit einzubeziehen, fügen wir ihn einfach der Iterationsgleichung hinzu:

$$\begin{aligned} y_j &= (x_j, \lambda_j) \in \mathbb{R}^3 \\ y_{n+1} &= G(y_n) := (\varphi_{\lambda_n}(x_n), \lambda_n) \end{aligned}$$

Sei nun $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ ein nicht-hyperbolischer Fixpunkt für $\varphi_{\hat{\lambda}}$, d.h. $\varphi_{\hat{\lambda}}(\hat{x}) = \hat{x}$ und $D\varphi_{\hat{\lambda}}(\hat{x})$ hat (mindestens) einen Eigenwert mit Betrag 1. Dann hat $DG(\hat{\lambda}, \hat{x})$ zusätzlich einen Eigenwert gleich +1 (da $D\lambda(\lambda) = 1$) und weiterhin die Eigenwerte mit Betrag gleich 1 von $D\varphi_{\hat{\lambda}}(\hat{x})$. Wir erhalten also für G im Punkt $(\hat{\lambda}, \hat{x})$ eine mindestens zweidimensionale Zentrumsmanigfaltigkeit, welche alle Fixpunkte in der Nähe von diesem Punkt enthält. Wir können das Verhalten dieser Fixpunkte also auf der reduzierten Iterationsgleichung (1.7) untersuchen. Da wir im Folgenden annehmen werden, dass $D\varphi_{\hat{\lambda}}(\hat{x})$ genau einen Eigenwert mit Betrag 1 hat (u.a. deshalb „generische“ Bifurkationen), stellt dies tatsächlich eine Reduzierung der zu betrachtenden Dimension dar. Als Referenz für die Diskussion der folgenden Bifurkationen wird auf [HK91] verwiesen.

1.5.1 Die generische saddle-node Bifurkation

Mit obigen Definitionen und mit $\hat{\lambda} = \hat{x} = 0$ (o.B.d.A.) nehmen wir an, $D\varphi_0(0)$ hat einen Eigenwert $\mu_1 = +1$ und einen Eigenwert $|\mu_2| \neq 1$. Wie oben beschrieben erhalten wir eine lokale C^2 -Zentrumsmanigfaltigkeit W_{loc}^C , auf welcher wir die reduzierte Iteration

$$\xi_k \in \mathbb{R}, \quad \xi_{n+1} = f_\lambda(\xi_n)$$

erhalten. Hierbei haben wir $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ vernachlässigt. Taylorentwicklung von f im Ursprung liefert

$$f_\lambda(\xi) = a(\lambda) + b(\lambda)\xi + \frac{1}{2}c(\lambda)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3)$$

wobei $f_0(0) = 0$ nach Voraussetzung, also $a(0) = 0$. Aus (1.7) und $\mu_1 = +1$ geht hervor, dass $b(0) = +1$.

Weiterhin fordern wir, dass $D_\lambda a(0) \neq 0$ und $c(0) \neq 0$ (weitere „generische“ Bedingungen).

Wir suchen nun Fixpunkte von f , d.h. wir suchen Nullstellen der Funktion

$$g(\lambda, \xi) := f_\lambda(\xi) - \xi = a(\lambda) + (b(\lambda) - 1)\xi + \frac{1}{2}c(\lambda)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3) \quad (1.8)$$

Wir kennen die Lösung $g(0, 0) = 0$ und wissen $D_\lambda g(0, 0) = D_\lambda a(0) \neq 0$. Deshalb können wir den impliziten Funktionensatz anwenden um Lösungen $\lambda = \lambda(\xi)$ zu erhalten. Der implizite Funktionensatz liefert uns ebenfalls die Ableitung der Lösungsfunktion $\lambda(\xi)$:

$$D_\xi \lambda(\xi_0) = -\frac{D_\xi g(\lambda(\xi_0), \xi_0)}{D_\lambda g(\lambda(\xi_0), \xi_0)}$$

Für $\xi_0=0$ erhalten wir

$$D_\xi \lambda(0) = -\frac{b(0) - 1}{D_\lambda a(0)} = 0$$

Für die zweite Ableitung ergibt sich:

$$D_\xi^2 \lambda(\xi_0) = -\frac{D_\xi^2 g(\lambda(\xi_0), \xi_0) \cdot D_\lambda g(\lambda(\xi_0), \xi_0) - D_\xi g(\lambda(\xi_0), \xi_0) \cdot D_\xi D_\lambda g(\lambda(\xi_0), \xi_0)}{(D_\lambda g(\lambda(\xi_0), \xi_0))^2}$$

Wiederum bei $\xi_0 = 0$ erhalten wir

$$D_\xi^2 \lambda(0) = -\frac{c(0)}{D_\lambda a(0)} =: \alpha \neq 0 \quad (\text{wegen } c(0) \neq 0 \text{ und } D_\lambda a(0) \neq 0 \text{ nach Voraussetzung})$$

Zusammenfassend erhalten wir folgende Taylorentwicklung von $\lambda(\xi)$ um $\xi = 0$:

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{2}\alpha\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3)$$

Dem entnehmen wir Folgendes: sei λ ein beliebiger fester Parameterwert, dann gibt es lokal jeweils zwei Fixpunkte für $\lambda \cdot \alpha > 0$, und keinen für $\lambda \cdot \alpha < 0$. Zur Untersuchung der Stabilität dieser Fixpunkte betrachten wir

$$h(\xi_0) := D_\xi f_\lambda(\xi_0)(\xi_0) = b(\lambda(\xi_0)) + c(\lambda(\xi_0))\xi_0 + \mathcal{O}(\xi_0^2)$$

für $|\xi_0|$ klein. Wegen

$$(D_{\xi_0} h)(0) = (D_\lambda b)(\lambda(0)) \cdot (D_{\xi_0} \lambda)(0) + c(\lambda(0)) = c(0) \neq 0$$

und $h(0) = b(0) = 1$ wissen wir, dass die abzweigenden Äste von Fixpunkten unterschiedliche Stabilitäten besitzen (für unterschiedliche Vorzeichen von ξ). Die Situation ist in Abbildung 1.5 dargestellt.

Die genaue Stabilität hängt in unserem zweidimensionalen Fall von dem zweiten Eigenwert ab. Da wir jedoch annehmen werden, unser Diffeomorphismus ist, zumindest auf der von uns betrachteten Teilmenge des \mathbb{R}^2 , flächenkontrahierend (das Produkt der Eigenwerte ist überall im Betrag kleiner als 1), können wir folgern, dass die eindimensional instabilen Zweige aus obiger Betrachtung stets Sättel sind und die eindimensional stabilen Zweige stets Attraktoren sind, d.h. beide Eigenwerte sind im Betrag kleiner als 1. (Da der erste Eigenwert im Punkt der Bifurkation im Betrag 1 ist, muss der zweite Eigenwert in einer kleinen Umgebung dieses Punktes im Betrag stets kleiner als 1 sein).

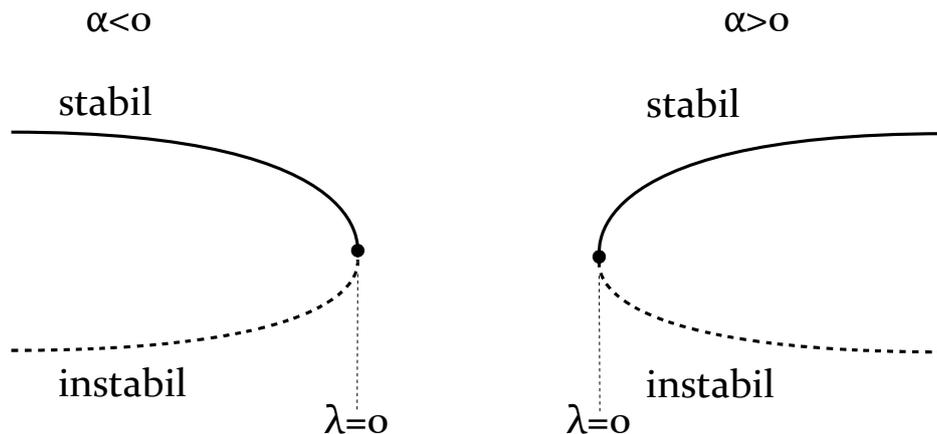


Abbildung 1.5: Bifurkationsdiagramme der generischen saddlenode Bifurkation, hier $c(0) > 0$, für $c(0) < 0$ ergeben sich genau umgekehrte Stabilitäten.

1.5.2 Die generische periodenverdoppelnde Bifurkation

In diesem Fall nehmen wir an, die Linearisierung unseres Diffeomorphismus am Bifurkationsfixpunkt hat Eigenwerte $\mu_1 = -1$ und $|\mu_2| \neq 1$. Wir verfahren wie zuvor und erhalten erneut die auf die Zentrumsmannigfaltigkeit eingeschränkte Iteration

$$\xi_k \in \mathbb{R}, \xi_{k+1} = f_\lambda(\xi_k)$$

mit

$$f_\lambda(\xi) = a(\lambda) + b(\lambda)\xi + \frac{1}{2}c(\lambda)\xi^2 + \frac{1}{3!}d(\lambda)\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4)$$

wobei $f_0(0) = 0$ nach Voraussetzung, also $a(0) = 0$. Aus (1.7) geht hervor, dass $b(0) = -1$. In diesem Fall dürfen wir o.B.d.A annehmen, dass $a(\lambda) = 0$ für $|\lambda|$ klein, d.h. $\xi = 0$ bleibt Fixpunkt für eine kleine Parameterumgebung. Dies dürfen wir annehmen, da $D_\xi(f_\lambda(\xi) - \xi)|_{\xi=0} = -2 \neq 0$ und wir somit den impliziten Funktionensatz anwenden können, um Lösungen $\xi = \xi(\lambda)$ zu erhalten, so dass $f_\lambda(\xi(\lambda)) = \xi(\lambda)$ für $|\lambda|$ klein und durch Translatieren können wir annehmen $\xi(\lambda) = 0$.

Weiterhin fordern wir, dass $D_\lambda b(0) \neq 0$ und $\gamma := D_\xi^3 f_0^2(0) \neq 0$ (ebenfalls „generische“ Bedingungen).

Die Stabilität der trivialen Fixpunkte $\xi(\lambda) = 0$ wechselt wegen $D_\lambda b(0) \neq 0$ in $\lambda = 0$ von stabil zu instabil oder umgekehrt, wir nehmen im Folgenden den ersten Fall an, d.h. $D_\lambda b(0) < 0$. Wir werden nun zeigen, dass wir ebenfalls periodische Orbits der Periode zwei für $\lambda \cdot \gamma < 0$ finden, deren Stabilität entgegengesetzt zu der Stabilität der Fixpunkte bei $\xi = 0$ zum selben Parameterwert ist. Wir suchen also Nullstellen der Funktion $\frac{1}{\xi}(f_\lambda^2(\xi) - \xi)$. Dazu betrachten wir die Taylorentwicklung von $f_\lambda^2(\xi)$ um $\xi = 0$. Um Klarheit zu schaffen verwenden wir nun die Notation $f(\lambda, \xi) := f_\lambda(\xi)$ und schreiben $(D_\xi^l g^m)(\lambda_0, \xi_0)$ für die l -te Ableitung nach ξ der

m -ten Iterierten von g im Punkt (λ_0, ξ_0) .

$$\begin{aligned} (D_\xi f^2)(\lambda_0, \xi_0) &= (D_\xi f)(\lambda_0, f(\lambda_0, \xi_0)) \cdot (D_\xi f)(\lambda_0, \xi_0) \\ (D_\xi^2 f^2)(\lambda_0, \xi_0) &= (D_\xi^2 f)(\lambda_0, f(\lambda_0, \xi_0)) \cdot ((D_\xi f)(\lambda_0, \xi_0))^2 \\ &\quad + (D_\xi f)(\lambda_0, f(\lambda_0, \xi_0)) \cdot (D_\xi^2 f)(\lambda_0, \xi_0) \end{aligned}$$

Insbesondere ist $(D_\xi(f^2))(\lambda, 0) = (b(\lambda))^2$ und $(D_\xi^2 f^2)(0, 0) = 0$. Damit erhalten wir folgende Taylorentwicklung:

$$f_\lambda^2(\xi) = (b(\lambda))^2 \xi + \frac{1}{2} \beta(\lambda) \xi^2 + \frac{1}{3!} \gamma(\lambda) \xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4)$$

mit $\beta(0) = 0$ und $\gamma(0) = \gamma = D_\xi^3 f_0^2(0)$. Damit gilt:

$$g_\lambda(\xi) := \frac{1}{\xi} (f_\lambda^2(\xi) - \xi) = \alpha(\lambda) + \frac{1}{2} \beta(\lambda) \xi + \frac{1}{3!} \gamma(\lambda) \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3)$$

wobei $\alpha(\lambda) = ((b(\lambda))^2 - 1)$ also $\alpha(0) = 0$ und $D_\lambda \alpha(0) = 2 \cdot (D_\lambda b(0)) \cdot b(0) > 0$. Für jedes feste λ entsprechen Nullstellen der Funktion g_λ 2-periodischen Orbits der Funktion f_λ , wobei diese Orbits die minimale Periode zwei haben.

Dies entspricht genau der Struktur von (1.8), so dass wir erneut Lösungen $\lambda(\xi_0) = \delta \xi_0^2 + \mathcal{O}(\xi_0^3)$ erhalten, mit $\delta := -\frac{\frac{1}{3!} \gamma(0)}{D_\lambda \alpha(0)} \neq 0$. Somit erhalten wir jeweils zwei 2-periodische Orbits für $\delta \cdot \lambda > 0$ und keinen für $\delta \cdot \lambda < 0$. Um deren Stabilität zu ermitteln betrachten wir die Linearisierung entlang der 2-periodischen Orbits:

$$h(\xi_0) := (D_\xi f^2)(\lambda(\xi_0), \xi_0) = (b(\lambda(\xi_0)))^2 + \beta(\lambda(\xi_0)) \xi_0 + \frac{1}{2} \gamma(\lambda(\xi_0)) \xi_0^2 + \mathcal{O}(\xi_0^3)$$

Es ist

$$\begin{aligned} h(0) &= (b(0))^2 = 1 \\ D_{\xi_0} h(0) &= 2 \cdot b(\lambda(0)) \cdot (D_\lambda b)(\lambda(0)) \cdot (D_{\xi_0} \lambda)(0) \\ &\quad + (D_\lambda \beta)(\lambda(0)) \cdot (D_{\xi_0} \lambda)(0) \cdot 0 + \beta(\lambda(0)) = \beta(0) = 0 \\ D_{\xi_0}^2 h(0) &= (\dots) = \gamma(\lambda(0)) = \gamma \neq 0 \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die erste Ableitung entlang der 2-periodischen Orbits in $\xi_0 = 0$ ein lokales Maximum (für $\gamma < 0$) oder Minimum (für $\gamma > 0$) besitzt. Wegen $h(0) = 1$ können wir folgern:

Ist $\gamma > 0$, so liegen die 2-periodischen Orbits auf der Seite der negativen Parameterwerte (da in diesem Fall $\delta < 0$, also $\lambda \cdot \delta > 0$ für $\lambda < 0$) und sind instabil. Für $\gamma < 0$ liegen sie auf der Seite der positiven Parameterwerte und sind stabil. Die Stabilität ist also genau entgegengesetzt zu der Stabilität der trivialen Fixpunkte bei $\xi = 0$. Die Situation wird in Abbildung 1.6 dargestellt.

Wie bei der saddle-node Bifurkation, hängt die genaue Stabilität im zweidimensionalen Fall vom zweiten Eigenwert ab, welchen wir aber lokal als stabil voraussetzen dürfen, da wir

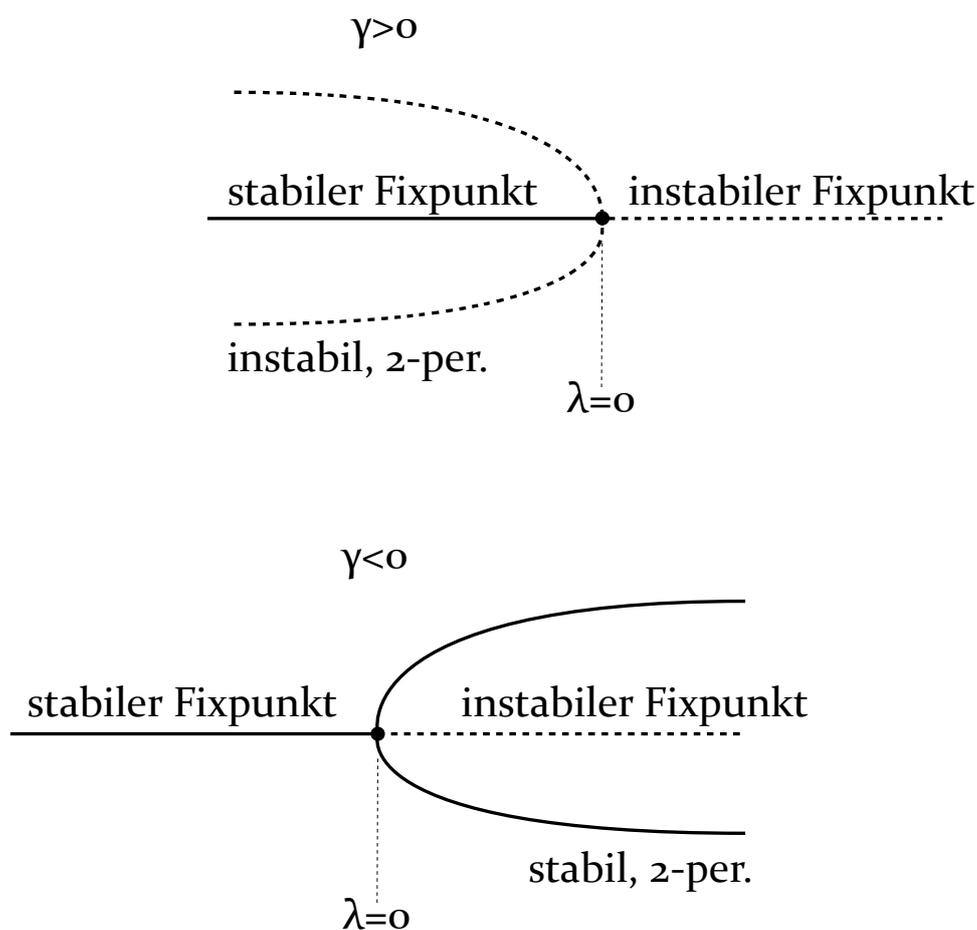


Abbildung 1.6: Bifurkationsdiagramme der generischen saddlenode Bifurkation, $(D_\lambda b)(0) < 0$. Für $(D_\lambda b)(0) > 0$ vertauschen alle Stabilitäten.

den Diffeomorphismus auf der betrachteten Menge als flächenkontrahierend annehmen (der Betrag der Determinante der Ableitung ist an jeder Stelle kleiner als 1).

In diesem Zusammenhang noch eine im Folgenden wichtige Namenskonvention: Die Sättel, welche bei der zweidimensionalen periodenverdoppelnden Bifurkation auftreten, unterscheiden sich von denen in der saddle-node Bifurkation darin, dass der instabile Eigenwert stets negativ ist (also kleiner als -1). Wir nennen diese Sättel im Folgenden **Möbius-Sättel**, da sie von den restlichen Sätteln unterschieden werden müssen.

Kapitel 2

Kaskaden periodenverdoppelnder Bifurkationen

2.1 Annahmen und Definitionen

Die Entstehung des Hufeisens des Diffeomorphismus φ_λ (vgl. (1.4)) auf dem Rechteck R aus Kapitel 1.4 erfüllt die folgenden Bedingungen, welche wir als Annahmen des Satzes über Kaskaden periodenverdoppelnder Bifurkationen verwenden:

Sei $\{\varphi_\lambda\}$ eine Familie von $C^3(\mathbb{R}^2)$ Diffeomorphismen. Wir nehmen an, es existiert ein Rechteck R sowie $\delta > 0$, so dass

- (a) $R \cap \varphi_{-\delta}(R) = \emptyset$
- (b) $\forall \lambda \in [-\delta, +\delta] : V_1 \cap \varphi_\lambda(R) = \emptyset$ und $V_2 \cap \varphi_\lambda(R) = \emptyset$, wobei V_1 und V_2 zwei gegenüberliegende vertikale Seiten von R sind
- (c) $\forall \lambda \in [-\delta, +\delta] : R \cap \varphi_\lambda(T) = \emptyset$ und $R \cap \varphi_\lambda(B) = \emptyset$, wobei T und B zwei gegenüberliegende horizontale Seiten von R sind
- (d) $\varphi_{+\delta}$ besitzt periodische Orbits und diese sind alle Sättel, d.h. sei $x \in R$ ein periodischer Orbit von $\varphi_{+\delta}$ mit minimaler Periode k , dann gilt für die Eigenwerte μ_1 und μ_2 von $D\varphi_{+\delta}^k$, dass $|\mu_1| < 1$ und $|\mu_2| > 1$

Wir fordern, dass $\varphi_\lambda \in C^3$ ist, aufgrund der Forderung der nicht verschwindenden dritten Ableitung bei generischen periodenverdoppelnden Bifurkationen. Annahmen (a) - (c) ergeben sich direkt aus der Konstruktion in Kapitel 1.4. Annahme (d) ist eine Eigenschaft der Hufeisen-Abbildung (siehe Kapitel 1.3 und Appendix). Weiterhin fordern wir die zwei folgenden Voraussetzungen:

- (e) Für jedes $\lambda \in [-\delta, +\delta]$ ist φ_λ flächenkontrahierend auf R , d.h. $\forall x \in R$ gilt $|D\varphi_\lambda(x)| < 1$.
- (f) Für jedes $\lambda \in [-\delta, +\delta]$ besitzt φ_λ maximal einen Bifurkationsorbit, d.h. nur einen periodischen Orbit x , welcher einen Eigenwert von $D\varphi_\lambda^k(x_0)$ mit Absolutwert gleich 1 be-

sitzt. Dieser Bifurkationsorbit entspricht entweder der generischen saddlenode Bifurkation oder der generischen periodenverdoppelnden Bifurkation.

Die Bedingung (f) ist generisch, d.h. die Menge der C^3 Diffeomorphismen auf \mathbb{R}^2 , welche (f) erfüllen, ist eine residuale Menge, d.h. sie ist der abzählbare Durchschnitt dichter offener Mengen.

Lemma 1. Sei $f_\lambda \in C^3(\mathbb{R}^2)$ ein Diffeomorphismus mit einem Parameter $\lambda \in [-\delta, +\delta]$, der (f) erfüllt. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge. Dann besitzt f auf $[-\delta, +\delta] \times K$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Bifurkationsorbits der minimalen Periode k .

Beweis. (zu Lemma 1)

Angenommen f besitzt für ein $k \in \mathbb{N}$ unendlich viele Bifurkationsorbits in $[-\delta, +\delta] \times K$ mit minimaler Periode k . Dann existiert wegen Kompaktheit von K und der Parameterumgebung eine konvergente Teilfolge von diesen Orbits $(\lambda_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\lambda^*, x^*) \in [-\delta, +\delta] \times K$. Da jedes x_n ein Bifurkationsorbit für $f_{\lambda_n}^k$ ist, ist jeweils einer der Eigenwerte von $Df_{\lambda_n}^k(x_n)$ im Betrag 1. Bezeichne $\mu(x, \lambda)$ diesen Eigenwert von $Df_\lambda^k(x)$. Wähle gilt also $\mu(x_n, \lambda_n) = 1$ ($\forall n$). Wegen Stetigkeit von Df (in λ und x) und somit von μ gilt $1 \equiv \mu(x_n, \lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(x^*, \lambda^*) = 1$. Weiterhin ist auch x^* ein k -periodischer Orbit für f_{λ^*} , denn $0 \equiv f_{\lambda_n}^k(x_n) - x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_{\lambda^*}^k(x^*) - x^* = 0$. Es handelt sich also auch bei dem Häufungspunkt (λ^*, x^*) um einen k -periodischen Bifurkationsorbit (wobei k nicht unbedingt die minimale Periode sein muss). Aus Voraussetzung (f) folgt jedoch, dass es solche Häufungspunkte nicht geben kann, da wir für jeden Parameterwert nur maximal einen Bifurkationsorbit zulassen, und aus der Diskussion der Bifurkationen in Kapitel 1.5 ergibt sich, dass es einen Parameterbereich um einen Bifurkationsorbit gibt, in dem sich keine weitere Bifurkation befinden kann. \square

Definition 2. Wir definieren den Raum P als die Menge der periodischen Orbits zusammen mit deren Parameterwerten: $P := \{(x, \lambda) \mid x \in R \text{ ist periodischer Orbit von } \varphi_\lambda\}$
 $\tilde{P} := P / \sim$, wobei \sim die folgende Äquivalenzrelation ist:

$$(x, \lambda) \sim (\bar{x}, \lambda) : \iff \exists k \geq 0 : \varphi_\lambda^k(x) = \varphi_\lambda(\bar{x}) \quad (2.1)$$

d.h. wir identifizieren ganze Orbits von φ_λ als einen Punkt in \tilde{P} .

2.2 Formulierung des Hauptresultats

Mit den bisherigen Annahmen und Definitionen können wir nun den folgenden Satz formulieren, welcher das Hauptresultat dieser Arbeit ist:

Satz 4. Sei $\{\varphi_\lambda\}$ eine Familie von $C^3(\mathbb{R}^2)$ Diffeomorphismen und R ein Rechteck in \mathbb{R}^2 , so dass die Annahmen (a)-(f) aus Kapitel 2.1 erfüllt sind.

Sei $(x, +\delta) \in \tilde{P}$, d.h. x ist periodischer Orbit von $\varphi_{+\delta}$. Sei $k \geq 0$ dessen minimale Periode. Dann existiert für jedes natürliche $n \geq 0$ ein periodischer Orbit der minimalen Periode $2^n k$, welcher sich auf der Zusammenhangskomponente von $(x, +\delta)$ in \tilde{P} befindet.

Anders formuliert bedeutet das: ausgehend von einem k -periodischen Sattel im voll ausgebildeten Hufeisen bei $\lambda = +\delta$, können wir einem zusammenhängenden Pfad von periodischen Orbits folgen, auf dem wir Orbits der Perioden $k, 2k, 4k, \dots$ antreffen. Diese gehen der Entstehung des Hufeisens voraus.

Dieser Satz wurde erstmals in [YA83] formuliert und bewiesen. Der hier folgende Beweis richtet sich nach diesem Beweis und nach [PT95], wobei alle Schritte so ausführlich wie möglich behandelt wurden.

2.3 Beweis

Beweis. (von Satz 4)

Wegen der „Hufeisen-Bedingung“ (d) wissen wir, dass x ein periodischer *Sattel* ist. In Kapitel 1.5 haben wir im Zuge der Vorstellung der periodenverdoppelnden Bifurkation zwischen Möbius und nicht-Möbius Sätteln unterschieden. Auch im Beweis des Satzes möchten wir diese Eigenschaft zur Fallunterscheidung nutzen, da sich bei Möbius-Sätteln zusätzliche Probleme ergeben.

Fall 1: x ist nicht-Möbius Sattel

Unsere Vorgehensweise ist wie folgt: Wir suchen einen Pfad Γ in der Zusammenhangskomponente von $(x, +\delta)$ (natürlich in \tilde{P}), welcher Periodenverdopplungen mit unbeschränkten Perioden durchläuft. Den Pfad (beginnend in $(x, +\delta)$) setzen wir nach bestimmten Konventionen fort, so dass wir niemals Kreise schließen und niemals terminieren können.

Sei $F(\lambda, y) := \varphi_\lambda^k(y) - y$, $F : [-\delta, +\delta] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Nullstellen (y, λ) von F sind periodische Orbits mit minimaler Periode k von φ_λ). Es gilt $F(+\delta, x) = 0$. Da x ein hyperbolischer Sattel für $\varphi_{+\delta}$ ist, ist $|\det(D_y F(+\delta, x))| = |\det(D\varphi_{+\delta}^k(x) - Id)| \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen finden wir also ein $\alpha > 0$ und eindeutige Lösungen $x_\lambda = x(\lambda)$ für $\lambda \in (+\delta - \alpha, +\delta]$ (wobei $x(\lambda)$ stetig von λ abhängt) mit $F(\lambda, x(\lambda)) = 0$.

Die Punkte (λ, x_λ) für $\lambda \in (+\delta - \alpha, +\delta]$ sind also in \tilde{P} und bilden einen stetigen Pfadabschnitt von dem zu erstellenden Pfad Γ für absteigende Parameterwerte, beginnend in $(x, +\delta)$. Wir möchten nun zeigen, dass wir solche Pfadabschnitte solange fortsetzen können, bis wir auf eine Bifurkation stoßen. Sei $\lambda^* := +\delta - \alpha$ und $x^* := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda^*} x(\lambda)$, dieser Grenzwert existiert wegen Stetigkeit der Lösungsfunktion $x(\lambda)$. Angenommen wir können den impliziten Funktionensatz (im Folgenden IFS) in (λ^*, x^*) nicht fortsetzen. Dann muss gelten:

$$|\det(D_y F(\lambda^*, x^*))| = |\det(D\varphi_{\lambda^*}^k(x^*) - Id)| = 0, \quad (2.2)$$

d.h. einer der Eigenwerte von $D\varphi_{\lambda^*}^k(x^*)$ muss $+1$ sein, denn eine der Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(D\varphi_{\lambda^*}^k(x^*) - \gamma Id) = 0$ ist $\gamma = 1$, gegeben durch (2.2).

Der Pfadabschnitt endet in diesem Fall also in einer Bifurkation.

Können wir den IFS in (λ^*, x^*) anwenden, so erhalten wir eine neue untere Intervallgrenze λ^* des Intervalls in dem wir Lösungen $x(\lambda)$ erhalten und stoßen entweder im neuen Punkt (λ^*, x^*) auf eine Bifurkation oder können den IFS dort erneut anwenden. Können wir den IFS auf diese Weise unendlich oft anwenden, so ist die monotone Folge der unteren Schranken der Intervalle, in denen Lösungen gegeben sind, von unten beschränkt, da sie $-\delta$ nicht passieren können, denn nach Voraussetzung (a) besitzt $\varphi_{-\delta}$ keine periodischen Orbits. Sie konvergieren also gegen einen Grenzwert, den wir ebenfalls λ^* nennen. Jede der Lösungsfunktionen besitzt einen

Grenzwert an der unteren Schranke ihres Intervalls, auch diese müssen wegen Stetigkeit von φ gegen ein x^* konvergieren. In diesem Punkt können wir den IFS nicht anwenden, da wir ein offenes Intervall erhalten würden, dessen untere Schranke kleiner als λ^* wäre, damit wäre aber λ^* kein Grenzwert. Das heißt auch in diesem Fall endet unser Pfadabschnitt bei (λ^*, x^*) in einer Bifurkation.

Wir bezeichnen den bisherigen Pfadabschnitt mit (λ, x_λ) , $\lambda \in [\lambda^*, +\delta]$. Die x_λ können das Rechteck R nicht verlassen, da sich wegen (b) und (c) auf dem Rand von R keine periodischen Punkte befinden.

Was kann über die minimale Periode von x_λ für φ_λ entlang des Pfadabschnitts gesagt werden? Die minimale Periode \tilde{k} von x_λ für φ_λ kann für jedes $\lambda > \lambda^*$ nur ein Teiler von k sein, denn $F(\lambda, x_\lambda) = 0$ garantiert, dass bereits $\varphi_\lambda^k(x_\lambda) = x_\lambda$ und somit auch keine größere minimale Periode möglich ist. Angenommen, es existiert ein $\tilde{\lambda} > \lambda^*$, so dass $\varphi_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{k}}(x_{\tilde{\lambda}}) = x_{\tilde{\lambda}}$ mit $\tilde{k} = k/m$.

Wir definieren $\tilde{F}(\lambda, y) := \varphi_\lambda^{\tilde{k}}(y) - y$ und wenden wie oben den IFS für aufsteigende Parameterwerte wiederholt an, um eine Parameterumgebung $\tilde{U} := (\tilde{\lambda} - \tilde{\alpha}, \tilde{\lambda} + \tilde{\beta})$ zu erhalten, in der wir Lösungen $\tilde{F}(\lambda, \tilde{x}(\lambda)) = 0$ für $\lambda \in \tilde{U}$ haben. Wie zuvor gilt $\left| \det(D\tilde{F}(\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}, \tilde{x}(\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}))) \right| = 0$.

Daraus folgt aber, dass $D\varphi_{\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}}^{\tilde{k}}(\tilde{x}(\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}))$ einen Eigenwert $+1$ hat (s.o.). Sei $\tilde{\varphi} := \varphi_{\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}}^{\tilde{k}}$ und $\tilde{x} := \tilde{x}(\tilde{\lambda} + \tilde{\beta})$. Dann gilt $D\varphi_{\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}}^{\tilde{k}}(\tilde{x}) = D\tilde{\varphi}^m(\tilde{x}) = D\tilde{\varphi}^{m-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) \cdot D\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = D\tilde{\varphi}^{m-1}(\tilde{x}) = \dots = D\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = D\varphi_{\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}}^{\tilde{k}}(\tilde{x})$. Also hat auch $D\varphi_{\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}}^{\tilde{k}}(\tilde{x})$ einen Eigenwert $+1$. Es folgt

$$\left| \det(DF(\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}, \tilde{x}(\tilde{\lambda} + \tilde{\beta}))) \right| = 0 \quad (2.3)$$

Da wir in $\lambda = +\delta$ eine minimale Periode k von x für $\varphi_{+\delta}$ gefordert haben, muss gelten $\lambda^* < \tilde{\lambda} + \tilde{\beta} < +\delta$, was aber (2.3) widerspricht. Wir wissen also, dass sich entlang des Pfadabschnitts, d.h. für Parameterwerte $\lambda \in (\lambda^*, +\delta]$, die Periode von x_λ für φ_λ nicht ändert und der Pfadabschnitt in $(\lambda^*, x^*) \in \tilde{P}$, einer Bifurkation, endet (siehe Abbildung 2.1).

Die minimale Periode gerade im Punkt $(\lambda^*, x_{\lambda^*})$ kann von k abweichen: Der Eigenwert $+1$ kann eine saddle-node Bifurkation eines k -periodischen Orbits bedeuten, oder eine periodenverdoppelnde Bifurkation eines $k/2$ -periodischen Orbits. Im Falle einer periodenverdoppelnden Bifurkation haben wir uns auf einem von ihr abzweigenden Pfad von nicht-Möbius Sätteln doppelter minimaler Periode befunden. Dies folgt aus der Diskussion in Kapitel 1.5.

Zum Fortsetzen des Pfades legen wir nun folgende Konvention fest: Wir folgen immer den nicht-Möbius Pfaden von Sätteln für absteigende Werte von λ oder den Pfaden von Attraktoren für aufsteigende Werte von λ . Wir betreten dabei keinen Pfad doppelt. Dass dies möglich ist, ergibt sich aus der Erkenntnis, dass wir durch das Weglassen der Möbius-Pfade und der Äquivalenzrelation \sim genau einen ausgehenden und einen einkehrenden Pfad pro Bifurkation finden.

Da wir uns auf einem Pfad von nicht-Möbius Sätteln befunden haben, gibt es also die zwei in Abbildung 2.2 dargestellten Fälle. Die Fortsetzung auf den jeweils folgenden Pfadabschnitten geschieht wie zuvor beschrieben, mit dem Unterschied, dass wir, falls wir uns auf einem Pfad von Attraktoren befinden, bei der ersten periodenverdoppelnden Bifurkation auch dann die Konvention der Pfadrichtung befolgen, wenn wir dort den Pfad per IFS fortsetzen könnten

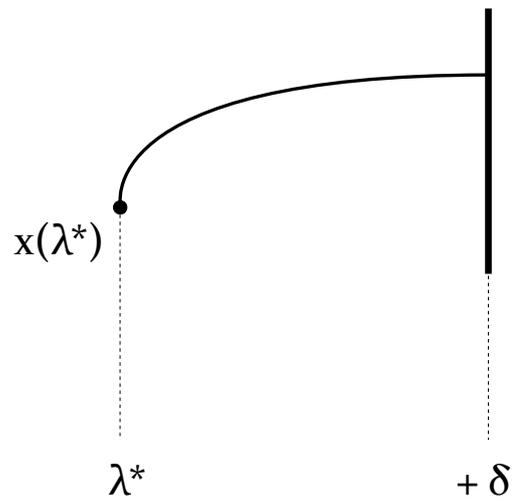


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Pfadabschnitts (λ, x_λ) aus dem Beweis.

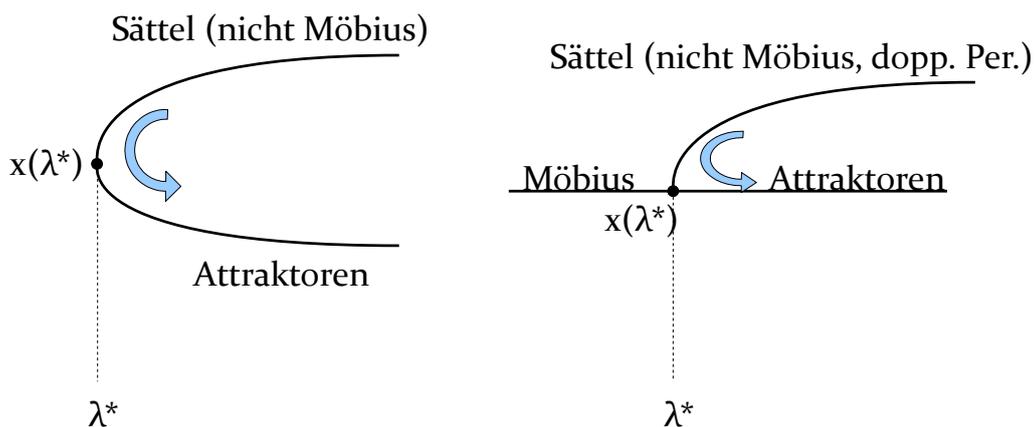


Abbildung 2.2: Fortsetzung des Pfades an Bifurkationen, falls wir uns auf einem Pfad von nicht-Möbius Sätteln befunden haben.

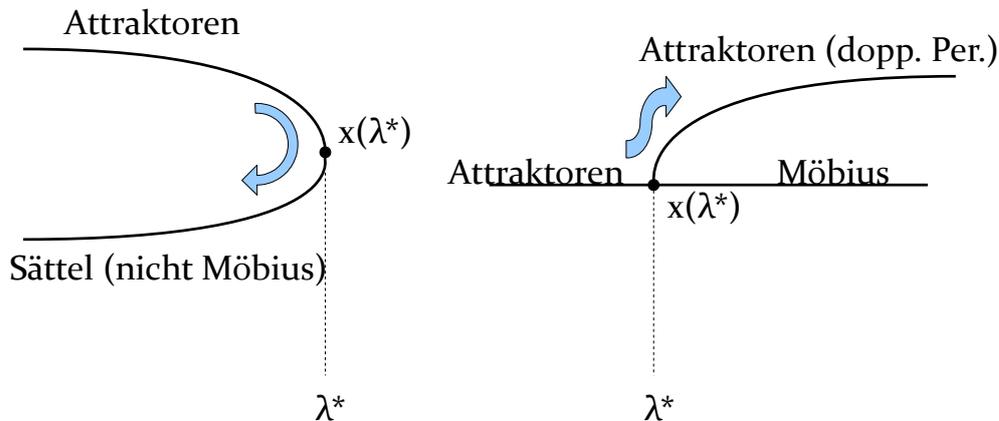


Abbildung 2.3: Fortsetzung des Pfades an Bifurkationen, falls wir uns auf einem Pfad von Attraktoren befinden haben.

(wir finden eine erste periodenverdoppelnde Bifurkation, da nur endlich viele auf einem Pfadabschnitt liegen können, vgl. Lemma 1). Die Pfadfortsetzung von einem Pfad von Attraktoren wird in Abbildung 2.3 dargestellt. (Alle Bilder können natürlich horizontal gespiegelt auftreten.)

Wir können den Pfad Γ stets fortsetzen, bei den Bifurkationen wie in den Bildern (und aus Kapitel 1.5 folgend) beschrieben, dazwischen, wie oben beschrieben, durch Erweiterung der Pfade per IFS, der nur bei Bifurkationen fehlschlägt. Γ kann den Bereich $[-\delta, +\delta] \times R$ nicht verlassen, da $\varphi_{-\delta}$ keine periodischen Orbits und $\varphi_{+\delta}$ nur periodische Sättel besitzt, wir uns aber für aufsteigende Parameterwerte stets auf Pfaden von Attraktoren befinden. Das Rechteck R kann, wie zuvor beschrieben, nicht verlassen werden, da sich auf dessen Rand, nach Voraussetzung, keine periodischen Orbits befinden. Der Pfad kann nicht enden, nachdem er nur endlich viele Bifurkationen passiert hat, denn in diesem Fall könnten wir ihn stets fortsetzen. Wir durchlaufen somit unendlich viele Bifurkationen, diese müssen sich auf der kompakten Menge $[-\delta, +\delta] \times R$ befinden. Wegen Lemma 1 kann es nur endlich viele Bifurkationsorbits für jede Periode geben, die Perioden müssen also gegen unendlich gehen. Weiterhin haben wir beobachtet, dass sich die Perioden entlang des Pfades Γ nur halbieren oder verdoppeln können. Es folgt, dass wir auf Γ periodische Orbits der Perioden $k \cdot 2^n$ für jedes n finden.

Fall 2: x ist Möbius Sattel

Das Problem in diesem Fall ist die Möglichkeit, in eine Schleife zu geraten: Folgen wir dem Möbius Pfad, so treffen wir auf eine periodenverdoppelnde Bifurkation. Nach obiger Konvention würden wir nun dem Pfad der ausgehenden Sättel doppelter Periode für absteigende Parameterwerte folgen. Trifft dieser wieder auf eine periodenverdoppelnde Bifurkation, so würden wir für aufsteigende Parameterwerte dem Pfad der Attraktoren halber Periode folgen und könnten so auf die bereits besuchte erste periodenverdoppelnde Bifurkation treffen. Dies wird in Abbildung 2.4 verdeutlicht.

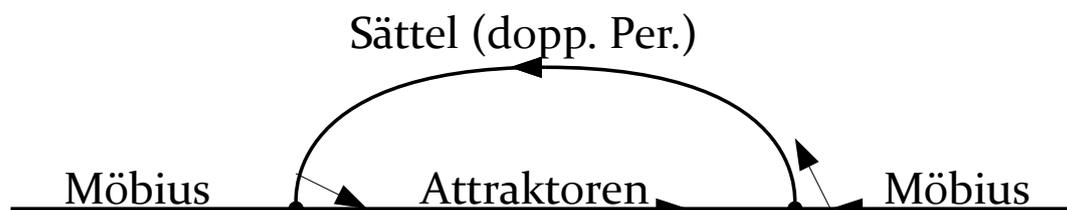


Abbildung 2.4: Entstehung einer Schleife beim Starten von einem Möbius-Sattel aus.

Begegnen wir nie einer solchen Schleife, sind wir fertig, denn wir können unseren Pfad wie in Fall 1 unendlich lange fortsetzen. Falls wir einer Schleife begegnen, umgehen wir das Problem wie folgt: Wir identifizieren eine solche Schleife als einen Punkt in $(\tilde{P} \text{ modulo Schleifen})$. Dies ist eine sinnvolle Identifikation, da es bei jeder Periodenverdopplung einen eingehenden Möbius-Pfad und an jeder Periodenhalbierung einen ausgehenden Möbius-Pfad gibt und somit die Anzahl der Periodenverdopplungen gleich der Anzahl der Periodenhalbierungen in einer Schleife ist. In dem reduzierten Raum $(\tilde{P} \text{ modulo Schleifen})$ erstellen wir einen Pfadabschnitt wie folgt: Wir setzen den Pfadabschnitt durch die als einen Punkt identifizierten Schleifen entlang Möbius-Pfaden fort, bis wir auf eine periodenverdoppelnde Bifurkation treffen, die nicht zu einer Schleife gehört. Dieser Pfad wird stets für absteigende Parameterwerte fortgesetzt, da wir nicht auf eine saddle-node Bifurkation treffen, bei der wir unsere Richtung ändern, wir können also nicht in einem periodischen Sattel in $\mathbb{R}^2 \times \{+\delta\}$ terminieren. Treffen wir auf eine periodenverdoppelnde Bifurkation, die nicht zu einer Schleife gehört, können wir wie in Fall 1 fortfahren. Treffen wir niemals auf eine solche Bifurkation, induziert unser Pfadabschnitt in $(\tilde{P} \text{ modulo Schleifen})$ einen Pfad in \tilde{P} , der unendlich lang ist und durch unendlich viele Bifurkationen läuft, die wegen Lemma 1 keine beschränkte Periode besitzen können und wir können das Schlussargument von Fall 1 wiederholen.

□

Kapitel 3

Ausblick

In diesem Kapitel soll ein Überblick über weitere Ergebnisse, die mit homoklinen Tangenten und Kaskaden periodenverdoppelnder Bifurkationen in Zusammenhang stehen, verschafft werden.

Kaskaden homokliner Tangenten In [PT95] wird folgendes gezeigt: Sei F_λ eine Familie von Diffeomorphismen, welche für $\lambda = 0$ einen Berührungspunkt q der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines Sattels p besitzt. Sei p Sattel für $\lambda \in [-1, 1]$. Dann existiert eine Folge $\lambda_n \rightarrow 0$, so dass F_{λ_n} eine homokline Tangente bei $q_n \rightarrow q$ zum Sattel p besitzt. Die Bifurkation homokliner Tangenten ist also kein isoliertes Phänomen, die Kaskaden periodenverdoppelnder Bifurkationen treten sogar in beliebig dichten Intervallen immer wieder auf. Diese Beobachtung, zusammen mit der Theorie der dynamisch definierten Kantormengen ist Grundlage des Beweises des unten erwähnten Newhouse Phänomens. Ob eine „erste“ oder eine „letzte“ homokline Tangente existiert, hängt maßgeblich von der Lage der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten ab und in welche Richtung sich die Mannigfaltigkeiten für aufsteigende Parameterwerte ineinander schieben. Aus Kaskaden homokliner Tangenten entstehen unendlich viele Kaskaden periodenverdoppelnder Bifurkationen.

Aktuelle Ergebnisse zu Kaskaden periodenverdoppelnder Bifurkationen Wir sagen ein Diffeomorphismus F besitzt *periodic orbit (PO) Chaos*, falls ein $C > 1$ existiert, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass die Anzahl der n -periodischen Orbits größer ist als C^n (wir haben sozusagen ein exponentielles Wachstum von Orbits bezüglich ihrer Periode). 2009 konnten James A. Yorke und Evelyn Sander in [SY09] und [SY10] beweisen, dass ein Diffeomorphismus, welcher für einen Parameterwert $-\delta$ kein PO Chaos besitzt, jedoch für einen Parameterwert $+\delta$, unendlich viele periodenverdoppelnde Kaskaden zwischen diesen Parameterwerten aufweist. Um die tatsächliche Verbindung der Kaskaden zum PO Chaos herzustellen wurde gezeigt, dass höchstens endlich viele periodische Orbits *nicht* mit Kaskaden verbunden sind. Weiterhin wurde dort gezeigt, dass Kaskaden entweder paarweise disjunkt sind (d.h. sie sind im Produktraum von Parameterwerten und Phasenraum nicht über Pfade periodischer Orbits verbunden) oder dass genau zwei Kaskaden verbunden sind, sodass eine Kaskade in das Chaos hineinführt und die andere heraus, d.h. die ständigen Periodenverdopplungen der einen Kaskade geschehen in Richtung ansteigender Parameterwerte, die der anderen in Richtung absteigender Parameterwerte.

Das Newhouse Phänomen Sheldon Newhouse konnte in [New74], [New79] zeigen, dass beliebig nahe von zweifach stetig differenzierbaren Diffeomorphismen auf 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ($Diff(2,2)$), welche eine homokline Tangente besitzen, eine offene Teilmenge $U \subseteq Diff(2,2)$ existiert, in welcher die Menge von Diffeomorphismen, welche eine homokline Tangente besitzen, dicht ist. Gilt für eine Abbildung $F \in Diff(2,2)$, welche eine homokline Tangente für einen Sattel p besitzt weiterhin, dass $|\det(DF)(p)| < 1$, so hat die oben erwähnte offene Menge U eine residuale Teilmenge, deren Diffeomorphismen die Eigenschaft besitzen, dass sie unendlich viele stabile Fixpunkte besitzen.

Jacob Palis' Vermutung Um ein Verständnis der globalen Komplexität der Dynamik von Diffeomorphismen, die nicht hyperbolisch (s.u.) sind zu entwickeln, stellte Jacob Palis' (z.B. in [PT95]) im Rahmen eines Programmes zur Einordnung von Diffeomorphismen folgende Vermutung auf:

Sei M eine zweidimensionale, kompakte, randlose, glatte Mannigfaltigkeit und $\phi \in Diff(k,M)$, $k \geq 1$. Dann kann ϕ entweder durch einen (essentiell) hyperbolischen Diffeomorphismus approximiert werden oder durch einen Diffeomorphismus, welcher eine homokline Tangente besitzt.

Wir benötigen einige Definitionen, um diese Vermutung zu erläutern. Wir bezeichnen einen Punkt $x \in M$ als *nicht-wandernd* (unter ϕ), falls für jede offene Umgebung U von x gilt: $\forall N \geq 1 \exists n \geq N$, so dass $\phi^n(x) \cap U \neq \emptyset$. Wir bezeichnen eine ϕ -invariante Menge Λ (ϕ -invariant heißt $\phi(\Lambda) = \Lambda$) als *hyperbolisch*, falls für jeden Punkt $x \in \Lambda$ eine Aufteilung des Tangentialraums an M existiert, $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$, so dass folgendes gilt:

1. die Aufteilung hängt stetig von x ab
2. die Aufteilung ist invariant, d.h. $D\phi(E_x^{u/s}) = E_{\phi(x)}^{u/s}$
3. $\exists \mu > 1$ und $C > 0$, so dass für jedes $y \in E_x^u$ und $n > 0$ gilt:

$$\|D\phi^n(y)\| \geq C \cdot \mu^n \cdot \|y\|$$

und für jedes $y \in E_x^s$ und $n > 0$ gilt:

$$\|D\phi^n(y)\| \leq C^{-1} \cdot \mu^{-n} \cdot \|y\|,$$

wobei $\| \cdot \|$ eine Norm auf $T_x M$ ist.

Ein Diffeomorphismus wird als hyperbolisch bezeichnet, wenn dessen Menge an nicht-wandernden Punkten hyperbolisch ist, als essentiell hyperbolisch, falls er eine endliche Zahl an hyperbolischen Attraktoren besitzt (hyperbolische Fixpunkte mit ausschließlich stabilen Eigenwerten), deren stabile Umgebungen (die größte offene Umgebung der Attraktoren, in der alle Punkte gegen den Attraktor konvergieren) eine Teilmenge von M überdecken, welche positives Lebesgue-Maß besitzt.

Die Bedeutung dieser Vermutung liegt darin, dass die Dynamik von hyperbolischen Diffeomorphismen ausgiebig untersucht worden ist, und, sollte die Vermutung wahr sein, das Komplement der hyperbolischen Diffeomorphismen insofern verstanden wurde, als dass

jeder Diffeomorphismus im Komplement durch einen, der eine homokline Tangente besitzt, angenähert werden kann. Tatsächlich wurde die Vermutung für $k = 1$ von R. Pujals und M. Sambarino in [PS00] bewiesen.

Bisher offen ist die weitergefasste Vermutung von Palis für höher dimensionale Mannigfaltigkeiten M .

Kapitel 4

Appendix: Smales Hufeisen

In diesem Abschnitt möchten wir die Behauptungen aus Kapitel 1.3 formell beweisen. Die in diesem Zusammenhang beschriebenen Resultate wurden erstmals 1960 von Steven Smale untersucht und bewiesen. Die hier aufgeführten Beweise richten sich nach der Vorlesung „Differentialgleichungen II“ von Prof. Dr. Fiedler an der Freien Universität Berlin. Dazu zunächst alle nötigen Definitionen.

Definition 3. Der Shiftraum Wir definieren Σ als den Raum der Folgen über zwei Symbolen, welche beidseits unbeschränkt sind, d.h. $\Sigma := \{s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid s_k \in \{0, 1\}\}$. Auf diesem Raum definieren wir den sogenannten Shift Operator, welcher die gesamte Folge nach links verschiebt:

$$\begin{aligned}\sigma : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ (\sigma(s))_k &= s_{k+1}\end{aligned}$$

Als eine Metrik auf Σ definieren wir $\text{dist}(s, s') := \sum_{k \in \mathbb{Z}} 4^{-|k|} |s_k - s'_k|$.

Mit obiger Metrik gilt insbesondere:

$$\forall n \geq 0 \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass für } s, s' \in \Sigma \text{ mit } \text{dist}(s, s') < \varepsilon \text{ gilt: } \forall 0 \leq |k| \leq n : s_k = s'_k \quad (4.1)$$

In der Tat: sei $n \geq 0$ gegeben, definiere $\varepsilon = \sum_{|k| \geq (n+1)} 4^{-|k|}$. Angenommen $s_k \neq s'_k$ mit $|k| \leq n$, dann gilt $\text{dist}(s, s') \geq 4^{-n}$. Aber

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sum_{|k| \geq (n+1)} 4^{-|k|} \\ &= 4^{-n} \cdot \sum_{|k| \geq (n+1)} 4^{n-|k|} \\ &= 4^{-n} \cdot \sum_{|k| \geq 1} 4^{-|k|} \\ &= 4^{-n} \cdot 2 \cdot \left(\sum_{k \geq 0} 4^{-|k|} - 1 \right) \\ &= 4^{-n} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \\ &< 4^{-n}\end{aligned}$$

Definition 4. Horizontale/Vertikale Streifen Wir betrachten ein Rechteck $R = [0, 1] \times [0, 1]$ und halten ein $\mu \in (0, 1)$ fest.

Wir bezeichnen eine horizontale Kurve in R als den Graph einer Funktion $y = u(x)$, $(x, y) \in R$, wobei gelten muss: $\forall x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 1] : |u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu |x_1 - x_2|$ (d.h. u ist Lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante μ). Eine vertikale Kurve wird entsprechend als der Graph einer Lipschitz stetigen Funktion $x = v(y)$, $(x, y) \in R$ mit Lipschitz-Konstante μ definiert.

Als horizontale bzw. vertikale Streifen bezeichnen wir Teilmengen von R , welche von zwei horizontalen bzw. vertikalen Kurven begrenzt sind, d.h. horizontale Streifen sind gegeben durch horizontale Kurven $u_1 \leq u_2$, $U := \{(x, y) | x \in [0, 1], u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$, vertikale Streifen entsprechend. Wir definieren den Durchmesser eines horizontalen Streifen als $d(U) := \sup_{x \in [0, 1]} (u_2 - u_1)$, den eines vertikalen Streifens entsprechend.

Die in Kapitel 1.3, in der Abbildung 1.2 vorgestellte Hufeisen-Abbildung betrachten wir nun ausschließlich als Abbildung zwischen zwei horizontalen und zwei vertikalen Streifen (zuvor waren das die horizontalen Streifen A und C und die vertikalen Streifen deren Bilder geschnitten mit R). Dazu formulieren wir folgende Voraussetzungen:

Sei $f : U_0 \cup U_1 \rightarrow V_0 \cup V_1$ ein Homöomorphismus wobei U_0, U_1 disjunkte horizontale und V_0, V_1 disjunkte vertikale Streifen sind. Wir fordern weiterhin,

- (a) dass U_0 auf V_0 und U_1 auf V_1 abgebildet wird, sowie dass die horizontalen Kurven, welche U_0 und U_1 begrenzen, auf die vertikalen Kurven abgebildet werden, welche V_0 und V_1 begrenzen.
- (b) dass ein $0 < \eta < 1$ existiert, so dass für einen horizontalen Streifen $U \subseteq U_0 \cup U_1$ gilt: Für $a \in \{1, 2\}$ ist $\tilde{U}_a := f^{-1}(U \cap V_a) = f^{-1}(U) \cap U_a$ wieder ein vertikaler Streifen, für dessen Durchmesser gilt $d(\tilde{U}_a) \leq \eta d(U)$, d.h. die Urbilder horizontaler Streifen sind wieder horizontale Streifen mit geringerem Durchmesser. Sei nun $V \subseteq V_0 \cup V_1$ ein vertikaler Streifen, dann muss gelten: Für $a \in \{1, 2\}$ ist $\tilde{V}_a := f(V \cap U_a) = f(V) \cap U_a$ wieder ein vertikaler Streifen, für dessen Durchmesser gilt $d(\tilde{V}_a) \leq \eta d(V)$, d.h. die Bilder vertikaler Streifen sind wieder vertikale Streifen mit geringerem Durchmesser.

Voraussetzung (b) gibt uns eine horizontale Kontraktion und eine vertikale Expansion durch f . Insbesondere erfüllen die Abbildungen f aus Kapitel 1.3, sowie $\varphi_{+\delta}$ eingeschränkt auf das dort definierte Rechteck, diese Voraussetzungen. Wir definieren weiterhin die maximal invariante Menge auf R unter f , $\Lambda := \{z \in R \mid \forall k \in \mathbb{Z} : f^k(z) \in U_0 \cup U_1\}$, d.h. die Menge aller Punkte in R , welche unter beliebig häufigen Vorwärts- oder Rückwärtsiterationen auf den horizontalen Streifen liegen. Damit formulieren wir nun die Behauptung aus Kapitel 1.3 als Satz:

Satz 5. Sei f ein Homöomorphismus wie oben beschrieben, welcher die Voraussetzungen (a) und (b) erfüllt. Dann existiert ein Homöomorphismus $h : \Sigma \rightarrow \Lambda$, so dass das Diagramm in Abbildung 4.1 kommutiert.

Beweis. (von Satz 5)

Schritt 1: Konstruktion und Bijektivität von h Sei $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine beliebige Folge in Σ . Wir möchten zeigen, dass es genau einen Punkt $z \in \Lambda$ gibt, so dass $f^{-k}(z) \in U_{s_{-k}} \forall k \geq 0$ und

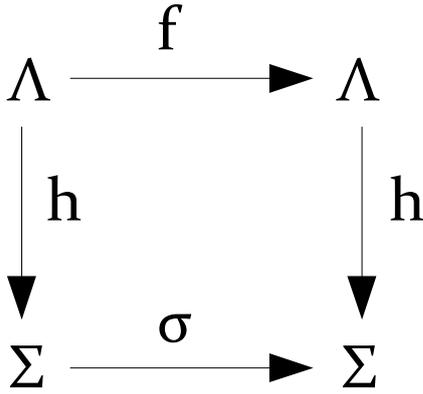


Abbildung 4.1: Diagram zur Equivalenz von der Abbildung f auf Λ zum Shift auf zwei Symbolen.

$$f^k(z) \in V_{s_k} \forall k \geq 0.$$

Wir werden dies zeigen, indem wir zunächst beweisen, dass alle Punkte, deren k -te Rückwärtsiterierte im s_{-k} -ten horizontalen Streifen liegt, auf einer horizontalen Kurve liegen. Genauso liegen die Punkte, deren k -te Vorwärtsiterierte im s_k -ten vertikalen Streifen liegt, auf einer vertikalen Kurve. Den (eindeutigen) Schnittpunkt dieser zwei Kurven nennen wir z .

Definiere also $\bar{U}_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-n}} := \{p \in R \mid f^k(p) \in U_{s_k} \text{ für } -n \leq k \leq 0\}$. Bei dieser Notation ist zu beachten, dass der jeweils k -te Index angibt, in welchem Streifen sich die k -te Rückwärtsiterierte von p befinden muss und nicht immer das k -te Folgenglied von s .

Es ist $\forall k: \bar{U}_{s_k} = U_{s_k}$, also ist \bar{U}_{s_k} ein horizontaler Streifen. Weiterhin gilt per Definition

$$\bar{U}_{s_{-1}, \dots, s_{-n}} = \{p \in R \mid f^{k+1}(p) \in U_{s_k} \text{ für } -n \leq k \leq -1\}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & f^{-1}(\bar{U}_{s_{-1}, \dots, s_{-n}}) \\ &= \{f^{-1}(p) \in R \mid f^{k+1}(p) \in U_{s_k} \text{ für } -n \leq k \leq -1\} \\ &= \{p \in R \mid f^k(p) \in U_{s_k} \text{ für } -n \leq k \leq -1\} \end{aligned}$$

Das heißt

$$\bar{U}_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-n}} = \bar{U}_{s_0} \cap f^{-1}(\bar{U}_{s_{-1}, \dots, s_{-n}}) = \bar{U}_{s_0} \cap f^{-1}(\bar{U}_{s_{-1}} \cap f^{-1}(\bar{U}_{s_{-2}, \dots, s_{-n}})) = \dots$$

Induktiv können wir also wegen Voraussetzung **(b)** zeigen, dass $\bar{U}_{s_0, \dots, s_{-n}}$ (für beliebiges n) ein horizontaler Streifen ist, dessen Durchmesser abgeschätzt werden kann durch

$$\begin{aligned} & d(\bar{U}_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-n}}) \\ & \leq \eta d(\bar{U}_{s_{-1}, \dots, s_{-n}}) \\ & \leq \dots \\ & \leq \eta^n \end{aligned}$$

Definiere nun $\bar{U}^n := \bigcap_{i=0}^n \bar{U}_{s_0, \dots, s_{-i}}$. Für jedes n ist \bar{U}^n ein horizontaler Streifen und es gilt $\bar{U}^0 \supseteq \bar{U}^1 \supseteq \bar{U}^2 \supseteq \dots$, wobei der Durchmesser von \bar{U}^n für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Die Kurven, welche die oberen und unteren Grenzen dieser Streifen bilden, konvergieren gegen Lipschitzstetige Kurven. Da der Durchmesser gegen 0 geht, konvergieren sie gegen die gleiche Lipschitzstetige Kurve $\bar{u}(s)$.

Umgekehrt definieren wir $\bar{V}_{s_1, \dots, s_n} := \{p \in R \mid f^k p \in V_{s_k} \text{ für } 1 \leq k \leq n\}$. Es lässt sich wiederum zeigen, dass dies vertikale Streifen sind und dass mit $\bar{V}^n := \bigcap_{i=1}^n \bar{V}_{s_1, \dots, s_i}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}^n =: \bar{v}(s)$ ist eine vertikale Kurve.

Für einen Schnittpunkt $(x, y) \in R$ der Kurven $\bar{v}(s)$ und $\bar{u}(s)$ gilt: $x = (\bar{v}(s) \circ \bar{u}(s))(x)$ und $y := \bar{u}(s)(x)$. Dessen Existenz und Eindeutigkeit erhalten wir durch Banachs Fixpunktsatz, da $(\bar{v}(s) \circ \bar{u}(s))$ wegen der Lipschitzstetigkeit mit Lipschitzkonstante $\mu < 1$ eine Kontraktion ist.

Für die Bijektivität von h bleibt noch zu zeigen, dass h^{-1} injektiv ist: Seien $s, s' \in \Sigma$, $s \neq s'$, d.h. $\exists k \in \mathbb{Z}$, so dass $s_k \neq s'_k$. Daraus folgt aber, dass die k -te Iterierte von den Punkten $p := h^{-1}(s)$ und $p' := h^{-1}(s')$ in unterschiedlichen Streifen liegen und somit gelten muss: $p \neq p'$.

Insbesondere wurde gezeigt, dass tatsächlich das k -te Folgenglied der Folge s der Position der k -ten Iterierten von p entspricht und somit der Shift Operator σ und f auf ihren jeweiligen Räumen genau die gleiche Funktion erfüllen.

Stetigkeit von h Wir müssen zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass gilt: $\text{dist}(s, s') < \delta \rightarrow \|h(s) - h(s')\|_R < \varepsilon$. Als Norm auf R wählen wir $\|(x, y)\|_R := x + y$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest. Wegen 4.1 wissen wir, dass wir durch die Wahl von δ erzwingen können, dass s und s' auf den ersten n Folgengliedern, für beliebig große n , (in beide Richtungen) übereinstimmen. Damit wissen wir, dass sowohl $p = h(s)$ als auch $p' = h(s')$ auf dem horizontalen Streifen \bar{U}^n und auf dem vertikalen Streifen \bar{V}^n liegen, deren Durchmesser für große n beliebig klein werden, d.h. auch p und p' liegen beliebig nah beieinander.

Stetigkeit von h^{-1} Es genügt zu zeigen, dass für jede abgeschlossene Teilmenge C von Σ gilt, dass $h(C)$ abgeschlossen ist. Wegen 4.1 gilt, dass jede abgeschlossene Teilmenge von Σ kompakt ist, d.h. $h(C)$ ist kompakt wegen Stetigkeit von h . Damit ist $h(C)$ ebenfalls abgeschlossen. □

Damit ist also gezeigt, dass eine Abbildung f wie oben beschrieben konjugiert zum Shift auf zwei Symbolen ist. Daraus folgen die bereits in Kapitel 1.3 formulierten Behauptungen:

Satz 6. Eigenschaften von Hufeisen-Abbildungen Sei f wie oben definiert und erfülle (a) und (b). Dann besitzt $f|_{\Lambda} \dots$

- (1) ... periodische Orbits beliebiger minimaler Periode.
- (2) ... eine überabzählbare Menge nicht-periodischer Orbits.
- (3) ... dichte Orbits.
- (4) ... Sensibilität in den Startwerten. Wie in Kapitel 1.3 beschrieben, ist damit gemeint, dass es für einen beliebigen Punkt $p \in \Lambda$ einen beliebig nahen Punkt $p' \in \Lambda$ gibt, so dass $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f^n(p) - f^n(p')\|_R = 0$ aber $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f^n(p) - f^n(p')\|_R = \mu > 0$.

Beweis. (von Satz 6) Da wir in Satz 5 gezeigt haben, dass $f|_\Lambda$ zum Shift σ auf Σ konjugiert ist, zeigen wir (1) bis (4) nur für σ .

- (1) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige vorgegebene Periode. Wähle dann eine Folge $s(n)$ nach folgender Vorschrift:

$$(s(n))_k := \begin{cases} 0 & k \pmod n \neq 0 \\ 1 & k \pmod n = 0 \end{cases}$$

Damit gilt $\sigma^n(s(n)) = s(n)$ aber für $m \neq n$ ist $0 = (\sigma^m(s(n)))_n \neq (s(n))_n = 1$, somit ist tatsächlich n die minimale Periode.

- (2) Wir können die reellen Zahlen leicht mit Σ identifizieren, indem wir für jede Ziffer jeweils 4 Folenglieder verwenden um diese binär zu representieren und indem wir alle Folenglieder mit Index kleiner 0 als Vorkomma- und die Folenglieder mit Index größer oder gleich 0 als Nachkomma-Stellen interpretieren. Σ ist also überabzählbar. Die periodischen Orbits sind jedoch abzählbar, indem wir z.B. die Folenglieder einer Periode mit vorgestellter 1 als binäre Darstellung der Nummer dieses Orbits interpretieren. Also muss die Menge der nicht-periodischen Orbits überabzählbar sein.
- (3) Konstruiere eine Folge s wie folgt. Sei s_k für $k < 0$ beliebig. Für $k > 0$ enthalte k nacheinander alle endlichen Folgen über zwei Symbolen:

$$s = \dots 0 1 00 01 10 11 000 001 010 \dots$$

Sei nun s' und $\varepsilon > 0$ beliebig, fest. Damit $\text{dist}(\sigma^k(s), s') < \varepsilon$ gilt, genügt es, dass die ersten $n = n(\varepsilon)$ Folenglieder (in beide Richtungen) übereinstimmen (vgl. 4.1). $(s'_{-n}, s'_{-(n-1)}, \dots, s'_0, \dots, s'_n)$ bildet eine endliche Folge. Diese ist per Definition in s enthalten, sie beginne bei dem Folenglied mit Index l . Wähle dann $k = l - n$, dann stimmen $\sigma^k(s)$ und s' auf den ersten n Folengliedern in beide Richtungen überein. Damit ist gezeigt, dass der Orbit von s unter σ beliebig dicht an jede andere Folge herankommt.

- (4) Sei s' und $\varepsilon > 0$. Wähle $s_k = s'_k$ auf den ersten $n = n(\varepsilon)$ Folgengliedern, so dass $\text{dist}(s, s') < \varepsilon$. Davon ausgehend wähle:

$$s_k \begin{cases} \neq s'_k & (k-n) = 2^l \text{ für ein } l \in \mathbb{N} \\ = s'_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Abschnitte, in denen $s_k = s'_k$ gilt, immer größer werden, gibt es für beliebig kleine $\delta > 0$ ein $m = m(\delta)$, so dass $\text{dist}(\sigma^m(s), \sigma^m(s')) < \delta$. Aber es gilt ebenfalls, dass $\text{dist}(\sigma^k(s), \sigma^k(s')) > 1$ falls $(k-n) = 2^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$.

□

Literaturverzeichnis

- [HK91] J. Hale and H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, 1991.
- [New74] S. Newhouse. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology* 13, 1974.
- [New79] S. Newhouse. The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms. *Math. I.H.E.S.* 50, 1979.
- [Nit71] Z. Nitecki. *Differentiable dynamics: an introduction to the orbit structure of diffeomorphisms*. M.I.T. Press, 1971.
- [PS00] E. R. Pujals and M. Sambarino. Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms. *Annals of Mathematics* 151, 2000.
- [PT95] J. Palis and F. Takens. *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*. Cambridge University Press, 1995.
- [Sma67] S. Smale. *Differentiable dynamical systems*. Bulletin of the American Mathematical Society, 1967.
- [SY09] E. Sander and J. A. Yorke. Period-doubling cascades galore. *arXiv:0903.3618*, 2009.
- [SY10] E. Sander and J. A. Yorke. Connecting period-doubling cascades to chaos. *arXiv:1002.3363v*, 2010.
- [YA83] J. A. Yorke and K. T. Alligood. Cascades of period-doubling bifurcations: A prerequisite for horseshoes. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 1983.

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich ehrenwörtlich:

1. dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel *Homokline Tangenten und Kaskaden periodenverdoppelnder Verzweigungen* ohne fremde Hilfe angefertigt habe;
2. dass ich die Übernahme wörtlicher Zitate aus der Literatur sowie die Verwendung der Gedanken anderer Autoren an den entsprechenden Stellen innerhalb der Arbeit gekennzeichnet habe;
3. dass ich meine Bachelorarbeit bei keiner anderen Prüfung vorgelegt habe.

Ich bin mir bewusst, dass eine falsche Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Ort, Datum

Unterschrift