

**Stabilisierung periodischer Orbits
im System zweier gekoppelter Oszillatoren durch
zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle**

Bachelorarbeit
(Zweite, aktualisierte Fassung)

von
Konstantin Bubolz

Betreuer und Erstgutachter: Prof. Dr. Bernold Fiedler
Zweitgutachter: PD Dr. Martin Väh

Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
06.06.2013

Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Bernold Fiedler sehr für das interessante und forschungsaktuelle Thema dieser Bachelorarbeit.

Weiterhin bedanke ich mich bei Andreas Radke für das Korrekturlesen und die hilfreichen Hinweise bei der technischen Umsetzung. Daneben gilt Matthias Bosewitz Dank für seine voranbringenden inhaltlichen Kommentare und ich danke auch Dr. Tobias Marxen für seinen mathematisch erfahrenen Beistand. Nicht zuletzt möchte ich mich außerdem sehr herzlich bei Jean Pierre Bassenge für eine umfassende Lektüre bedanken. Sein journalistischer Sachverstand und die zahlreichen Anmerkungen schärften den Blick für einen verbesserten strukturellen Aufbau und verhalfen vielen Passagen zu einer besseren Einordnung und mehr Verständlichkeit.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Hopf-Verzweigung	5
1 Theoretische Grundlagen	5
1.1 Notation	5
1.2 Grundbegriffe gewöhnlicher Differentialgleichungen	6
1.3 Ruhelagen	7
1.4 Stabilität von Ruhelagen	8
1.5 Stabilität periodischer Orbits	10
2 Hopf-Verzweigung in zwei Dimensionen	13
2.1 Zwei einfache Differentialgleichungen	13
2.2 Hopf-Verzweigung in Polarkoordinaten	15
2.3 Hopf-Verzweigung in reellen und komplexen Koordinaten	16
2.4 Satz über die Hopf-Verzweigung in der Ebene	18
3 Delay-Gleichungen und Zentrumsmannigfaltigkeiten	24
3.1 Retardierte Differentialgleichungen	24
3.2 Zentrumsmannigfaltigkeiten	26
II Stabilisierung periodischer Orbits	29
4 Hopf-Normalform und Stabilisierung von Bewegungen	30
4.1 Hopf-Normalform	30
4.2 Stabilisierung periodischer Orbits	31
5 Stabilisierung durch Fiedler et al. (2010)	32
5.1 System aus zwei gekoppelten Hopf-Oszillatoren	32
5.2 Erste erfolgreiche Stabilisierung	33
6 Erweiterter Linearer Ansatz	37
6.1 Nicht-invasive Möglichkeiten	37
6.2 Stabilisierung des Verzweigungspunktes	38

6.3	Superkritische Verzweigung	41
6.4	Subkritische Verzweigung	43
7	Symmetrien	47
7.1	Vergleich	47
7.2	Linearer Ansatz $C_{\frac{T}{2}}$ und erzeugende Symmetrien	48
8	Zusammenfassung	50
9	Diskussion	51
10	Ausblick	52
III	Anhang	53
A	Reduktion auf Poincaré-Normalform	53
A.1	Von $\dot{x} = F(x, \mu)$ nach $\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z}, \mu)$	53
A.2	von $\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z}, \mu)$ zur Poincaré-Normalform	55
B	Fortsetzung des Beweises über die Hopf-Verzweigung	59
B.1	Parameter $\mu = \mu(\epsilon)$ und Periode $T = T(\epsilon)$	59
B.2	Floquet-Exponent $\beta(\epsilon)$	63
C	Ein unzureichender Kontrollansatz	64
	Literaturverzeichnis	67

Einleitung

Der Fliehkraftregler wurde von James Watt 1788 für seine verbesserte Dampfmaschine in den Maschinenbau eingebracht und stellt ein frühes Beispiel einer Rückkopplungskontrolle zur Stabilisierung eines dynamischen Systems dar.

Für einen optimalen Betrieb soll die Arbeitsgeschwindigkeit ω der Dampfmaschine konstant auf dem Wert ω_0 gehalten werden, indem ein Fliehkraftregler die Zufuhr von Dampf regelt (siehe Abb. 1¹). Bewegt sich die Antriebsachse mit einer Geschwindigkeit $\omega < \omega_0$, so ist die Zuleitung weiter geöffnet, mehr Dampf strömt ein und die Geschwindigkeit wird größer. Rotiert sie hingegen mit einer Geschwindigkeit $\omega > \omega_0$, verschließt der Regelmechanismus die Dampfleitung, weniger Dampf strömt ein und die Geschwindigkeit verringert sich. Damit strebt die Maschine zur Geschwindigkeit ω_0 , bei der genau so viel Dampf einströmt, wie für einen Betrieb auf gleichbleibender Geschwindigkeit benötigt wird. Das System befindet sich für $\omega = \omega_0$ also in einem Gleichgewicht.

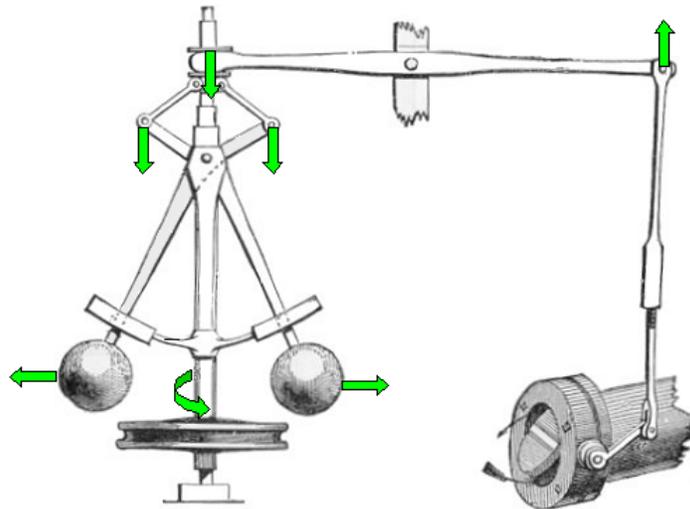


Abbildung 1: Der Fliehkraftregler mit (Kugel-)Gewichten (links) und Ventil für die Dampfzufuhr (rechts). Die grünen Pfeile deuten das Verhalten des Fliehkraftreglers im Fall $\omega > \omega_0$ an. Dreht sich die Maschine schneller, werden die Gewichte durch die Fliehkraft nach oben/außen bewegt und die Hebelwirkung schließt langsam das Ventil.

¹<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fliehkraftregler.PNG>, Zugriff:21.02.2013

Mitte des 19. Jahrhunderts trat im Zusammenhang mit diesem System ein Problem auf, dessen Lösung die mathematische Regelungstechnik begründete (vgl. MacFarlane [20]). Es wurde beobachtet, dass die Arbeitsgeschwindigkeit ω der Maschinen trotz Einsatz eines Fliehkraftreglers nicht den konstanten Wert ω_0 erreicht, sondern periodische Schwankungen um ω_0 aufweist. Die technische Entwicklung hatte zu einer Veränderung der Parameter des dynamischen Systems wie der auftretenden Reibung oder der Masse der Reglerarme geführt, sodass das vorher stabile Gleichgewicht $\omega = \omega_0$ nunmehr instabil wurde und periodische Schwankungen den Betrieb erschwerten. Die grundlegende Arbeit von Wischnegradskii [31], in der die Zusammenhänge der Parameter mit der Stabilität des Gleichgewichtes geklärt werden, wird von Pontryagin [26] in vereinfachter Fassung wiedergegeben. Anhand der entwickelten Kriterien war es danach möglich, auf die richtige Einstellung der Parameter zu achten, um die Maschine bei konstanter Geschwindigkeit $\omega = \omega_0$ arbeiten zu lassen. Ein wegweisendes Werk ist auch Maxwells „On governors“ (1868) [22], das bereits früher die Stabilität der angesprochenen Gleichgewichte mit mathematischen Betrachtungsweisen verbindet.

Die Dampfmaschine ist nur ein Beispiel für das Auftreten periodischer Bewegungen in der Nähe eines Gleichgewichts, wie sie auch in einer Vielzahl anderer dynamischer Systeme in Physik und Biologie vorkommen. Das Abzweigen von periodischen Bewegungen aus einem Gleichgewicht durch Veränderung der Parameter in allgemeinen dynamischen Systemen rückte daher zunehmend in das Interesse der Forschung. Poincarés [25] fundamentale Arbeit wurde von Andronov und Witt [1] aufgenommen und letztlich von Eberhard Hopf [16] derart auf eine große Zahl von Systemen verallgemeinert, dass das Phänomen auch als Hopf-Verzweigung bezeichnet wird. In der Literatur finden sich ebenso die Begriffe Andronov-Hopf-Verzweigung oder Poincaré-Andronov-Hopf-Verzweigung.

Schließlich beschäftigt sich die Kontrolltheorie, hervorgegangen aus dem geschilderten Problem der Dampfmaschine, nicht nur mit der Stabilisierung der (dort angestrebten) Gleichgewichte, sondern widmet sich auch instabilen periodischen Bewegungen. Dazu entwickelte Pyragas [27] 1992 eine Methode der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle, die zunächst nur für eine gewisse Klasse periodischer Bewegungen Erfolg zu versprechen schien. 2007 widerlegten Fiedler et al. [8] diese Vermutung durch die Stabilisierung von instabilen periodischen Bewegungen, die bei einer Hopf-Verzweigung auftreten.

Im ersten Teil dieser Bachelorarbeit gehen wir dem Phänomen der Hopf-Verzweigung nach, wie es im eingangs vorgestellten Beispiel der Dampfmaschine auftritt. Nachdem im ersten Kapitel die benötigten Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen gebündelt werden, gibt Kapitel 2 ein mathematisches Beispiel für periodische Bewegungen in der Nähe eines Gleichgewichts und es wird deren allgemeine Existenz im Satz über die Hopf-Verzweigung in der Ebene bewiesen. Weitere technische Details über die Anwendbarkeit des Satzes in höheren Dimensionen bespricht Kapitel 3. Die eigentliche Leistung von Hopf ist erst mit diesen Mitteln zu beschreiben.

Der zweite Teil ist in Fortsetzung der Untersuchungen von Fiedler et al. ([9], 2010) eine Anwendung der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle nach Pyragas [27] auf instabile periodische Bewegungen bei zwei gekoppelten Oszillatoren. Auf der Grundlage des ersten Teils werden in Kapitel 4 die Normalform eines Hopf-Oszillators motiviert und kurz die mathematischen Mittel einer Stabilisierung von Bewegungen beschrieben. Kapitel 5 führt das betrachtete System von zwei gekoppelten Hopf-Oszillatoren ein und fasst die Ergebnisse aus Fiedler et al. (2010) [9] zusammen. Auf deren Grundlage werden in Kapitel 6 ein neuer, erweiterter Kontrollansatz entwickelt und verbesserte Resultate zur Stabilisierung der auftretenden periodischen Bewegungen bewiesen. Es stellt sich heraus, dass die verwendete Kontrolle dem Ausnutzen zweier Symmetrien entspricht (Kapitel 7). Die Arbeit schließt eine Diskussion der erhaltenen Ergebnisse in den Kapiteln 8-10.

Natürlich gibt diese Bachelorarbeit keine Einführung in die mathematischen Gebiete der Verzweigungs- bzw. Kontrolltheorie, in die Hopf-Verzweigung bzw. Pyragas-Kontrolle einzuordnen sind. Dem interessierten Leser seien zum Thema Verzweigungstheorie zum Beispiel Hale und Koçak [12] oder Plaschko und Brod [24] empfohlen. Knobloch und Kappel [18] stellen die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen mit einleitenden Kapiteln zur Kontrolltheorie vor. Eine grundlegende Einleitung in letztere bietet Bellman [3] Weiterhin folgt unser erstes Beispiel und der Beweis des Satzes über die Hopf-Verzweigung der gelungenen Einführung „Theory and Applications of Hopf Bifurcation“ von Hassard, Kazarinoff und Wan [15]. Etwas früher entstanden ist „The Hopf Bifurcation and Its Applications“ von Marsden und McCracken [21]. Wer mit der Materie vertraut ist, kann das erste Kapitel oder den ganzen ersten Teil überspringen und findet mit dem zweiten Teil eine in sich geschlossene Darstellung aktueller Forschungsarbeit. Die Aufteilung der mathematisch

beweisbaren Erkenntnisse in „Theoreme“ und „Sätze“/„Lemmata“ soll lediglich der strukturellen Übersicht dienen. Für die Beweise der Theoreme wird auf Literatur verwiesen, der Satz über die Hopf-Verzweigung aus Kapitel 2 sowie Lemma 1 und die Sätze 2 und 3 aus Kapitel 6 werden in dieser Arbeit belegt. Die Beweise in Teil II werden dabei zum ersten Mal geführt und orientieren sich an denen von Fiedler et al. (2010) [9].

Teil I

Hopf-Verzweigung

1 Theoretische Grundlagen

Wann eine Bewegung oder eine Bahnkurve innerhalb eines dynamischen Systems als stabil gilt, hängt von den Erwartungen eines Betrachters an den Begriff der Stabilität ab. Nach der Erläuterung notationeller Konventionen für diese Arbeit in Abschnitt 1.1 sowie erster Grundbegriffe der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen in Abschnitt 1.2, folgt Abschnitt 1.3 über Ruhelagen als spezielle „Bewegungen“ eines dynamischen Systems. Übliche Definitionen der Stabilität dieser konstanten Bahnkurven werden in Abschnitt 1.4 gegeben und mit gültigen Sätzen aus der Theorie verknüpft. Eine Verallgemeinerung auf periodische Bahnkurven leistet Abschnitt 1.5. Für die spätere Untersuchung der Stabilität von periodischen Orbits bei der Hopf-Verzweigung sind vor allem Definition 4 und Theorem 4 relevant.

1.1 Notation

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion T , die auf dem Intervall (a, b) definiert ist und reelle Werte annimmt, wird kurz durch $T \in C^2((a, b), \mathbb{R})$ gekennzeichnet. Für eine zeitabhängige Größe $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ wird die Schreibweise \dot{x} gebraucht, um die zeitliche Veränderung von x anzudeuten, das heißt für die Ableitung nach der Zeit: $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$. Wie in der Physik üblich, wird auf das Notieren der Zeitabhängigkeit aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Df steht für die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $Df(x_0)$ bezeichnet die Ableitung/Linearisierung/Jacobi-Matrix der Funktion f an der Stelle x_0 . Ist für eine Funktion $f = f(x, y)$ nur die Ableitung bzgl. einer Variablen/Richtung im Punkt (x_0, y_0) gefragt, so wird dies durch $D_x f(x_0, y_0)$ bzw. $D_y f(x_0, y_0)$ kenntlich gemacht. Für komplexwertige Funktionen übernehmen wir diese Schreibweisen, wobei vor allem verwendet wird, dass die lineare Abbildung (Multiplikation) $\chi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto b \cdot z$ mit $b \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ als lineare, reelle Abbildung $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $z = (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} b & -\operatorname{Im} b \\ \operatorname{Im} b & \operatorname{Re} b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aufgefasst werden kann. Der Abstand zweier Punkte $x_0, x_a \in \mathbb{R}^n$ wird in Anlehnung an „Distanz“ oder engl. „distance“ mit $\operatorname{dist}(x_0, x_a)$ bezeichnet: $\operatorname{dist}(x_0, x_a) = \|x_0 - x_a\|$.

1.2 Grundbegriffe gewöhnlicher Differentialgleichungen

Eine Einführung in die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen bieten (Verweis: Gewöhnliche Differentialgleichungen). Sie beschäftigt sich mit Gleichungen der Form $\dot{x}(t) = F(x(t), t)$, entsprechenden Funktionen $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, und sucht nach Lösungen $x(t)$ als differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die meistens gewisse Anfangsbedingungen $x(0) = x_a$ zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ erfüllen sollen. Wir formulieren nur die für diese Arbeit verwendeten Grundbegriffe.

Einen Spezialfall der angeführten Differentialgleichung bilden lineare Systeme

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1.1)$$

mit Matrizen $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es lässt sich ein sogenanntes Fundamentalsystem $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von (1.1) angeben, sodass jede beliebige Lösung $x(t)$ von (1.1) durch einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ über $x(t) = X(t)c$ beschrieben werden kann. Im Zuge der Floquet-Theorie in Abschnitt 1.5 kommen wir auf (1.1) zurück.

Einen anderen Spezialfall bilden die sogenannten autonomen Systeme

$$\dot{x} = F(x) \quad (1.2)$$

mit einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die nicht mehr explizit von der Zeit abhängt. Die Floquet-Theorie in Abschnitt 1.5 ausgenommen, behandeln wir ausschließlich autonome Differentialgleichungen und fügen später (zeitunabhängige) Parameter hinzu. Ist $x(t)$ eine Lösung von (1.2), so heißt die Menge $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ Orbit/Bahn/Bahnkurve/Trajektorie von $x(t)$.

1.3 Ruhelagen

Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$F(x_0) = 0$$

wird als Ruhelage, Gleichgewicht oder Äquilibrium bezeichnet. Denn die Größen eines Systems, das sich in einer Ruhelage befindet, bleiben nach (1.2) unverändert. Die Entwicklung ist dann einerseits durch den Startwert $x_a = x_0$ eindeutig festgelegt: $x(t) = x_0$. Andererseits lassen sich, auch wenn $x(t)$ für allgemeine Startwerte nicht explizit bestimmt werden kann, mit der Kenntnis der Gleichgewichte qualitative Aussagen über das Verhalten des Systems treffen.

Als Beispiel soll der gedämpfte harmonische Oszillator dienen; ein Massepunkt schwingt an einer festen Stange, deren Masse vernachlässigt werden kann. Die Differentialgleichung für den Auslenkungswinkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ bei Beachtung von Gravitation und Reibung ist

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin(\varphi) + k^2 \dot{\varphi} = 0$$

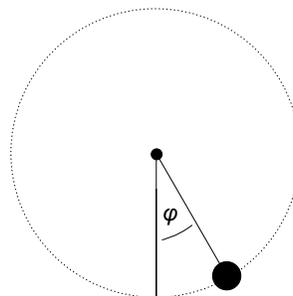


Abbildung 2: Das Pendel als Beispiel eines gedämpften harmonischen Oszillators.

mit den Konstanten ω^2 und k^2 . Diese

Differentialgleichung zweiter Ordnung wird mit Einführen einer zweiten Größe, $v = \dot{\varphi}$ (Winkelgeschwindigkeit), in ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung überführt. ($\dot{v} = \ddot{\varphi}$)

$$\dot{\varphi} = v$$

$$\dot{v} = -\omega^2 \sin(\varphi) - k^2 v$$

Das Pendel wird sich nun im Gleichgewicht befinden, wenn die Gleichungen $\dot{\varphi} = 0$ und $\dot{v} = 0$ erfüllt sind. Das ergibt direkt $v = 0$ und nach Einsetzen $\sin(\varphi) = 0$. Wie zu erwarten war, ist die Lösung $\varphi = 0$ ein Äquilibrium, aber auch die kaum zu beobachtende und schwer realisierbare Position $\varphi = \pi$. Den Unterschied beider Ruhelagen wird der nächste Abschnitt über Stabilität näher erläutern.

1.4 Stabilität von Ruhelagen

Warum wird man die eine Ruhelage nie beobachten? Das Pendel wird selten mit dem exakten Winkel $\varphi = \pi$ ausgelenkt werden. Jede kleinste Abweichung vom Äquilibrium resultiert aber in einer Bewegung weg von der Senkrechten. In diesem Sinne ist das obere Gleichgewicht instabil, während das Pendel bei einem Start in der Nähe von $\varphi = 0$ auch in dessen Umgebung bleiben wird. Folgende zwei Charakterisierungen der Stabilität von Ruhelagen haben sich mit der Zeit als grundlegend herausgestellt und finden sich in unserem Beispiel wieder.

Definition 1. (Stabilität nach Lyapunov)

Die Ruhelage x_0 heißt Lyapunov-stabil, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ existiert, sodass für Startwerte x_a in der δ -Umgebung von x_0 , $x(t)$ in der ϵ -Umgebung von x_0 bleibt: $\text{dist}(x_a, x_0) < \delta(\epsilon) \Rightarrow \text{dist}(x(t), x_0) < \epsilon$.

Definition 2. (Asymptotische Stabilität)

Die Ruhelage x_0 heißt asymptotisch stabil, wenn sie Lyapunov-stabil ist und es ein $\delta > 0$ gibt, sodass jede in der δ -Umgebung von x_0 bei x_a startende Bewegung zur Ruhelage tendiert: $\text{dist}(x_a, x_0) < \delta \Rightarrow x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_0$.

In unserem Pendel-Beispiel ist die untere Ruhelage $\varphi_0 = 0$ Lyapunov-stabil. Denn jede anfängliche Auslenkung φ_a wird $|\varphi(t)| < \varphi_a$ nach sich ziehen und für beliebiges ϵ findet sich also $\delta(\epsilon) = \epsilon$. Die betrachtete Ruhelage ist auch asymptotisch stabil, wobei jedes $\delta < \pi$ ausreicht und das Pendel für Anfangspositionen $|\varphi_a| < \delta < \pi$ mit der Zeit nach $\varphi_0 = 0$ konvergieren wird. Beide Begründungen sollen hier allerdings nur der Veranschaulichung unserer Definitionen dienen und bauen bereits auf der Kenntnis der exakten Pendelbewegung auf. Zum Beispiel hätten wir korrekterweise die Ruhelage $(\varphi_0, v_0) = (0, 0)$ und Startwerte (φ_a, v_a) betrachten müssen. Wir verzichten darauf mit dem Hinweis, am Ende dieses Abschnitts bessere Methoden für einen Beweis an der Hand zu haben.

Beim ungedämpften Pendel ist die Ruhelage $\varphi_0 = 0$ Lyapunov-stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Außerdem gibt es Gleichgewichte, die die asymptotische Bedingung von Definition 2 erfüllen, aber nicht Lyapunov-stabil sind, siehe Beispiel 2.4, Paul Glendinning (S. 30) [10]. Äquilibria, die in keinem Sinne stabil sind, werden instabil genannt.

Betrachtet man nun (autonome) lineare Systeme $\dot{x} = A \cdot x$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$, ist der Ursprung immer ein Gleichgewicht. Die Frage nach dessen Stabilität führt dann auf Eigenwerte der Matrix A , denn es gilt folgendes

Theorem 1. *Besitzen alle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$ der Matrix A negativen Realteil, dann ist die Ruhelage $x_0 = 0$ asymptotisch stabil. Existiert ein Eigenwert $\lambda_i \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil, so ist x_0 instabil.*

Im Fall einer Diagonalmatrix $A = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ist das klar, weil die Gleichungen entkoppeln: $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$. Die Lösungen $x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$ mit Konstanten c_i konvergieren genau dann gegen 0, wenn $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ erfüllt ist. Für den allgemeinen Fall einer beliebigen Matrix A ist mehr Theorie notwendig. (vgl. z. B. Arnold [2] oder Knobloch und Kappel [18]) Die Übertragung dieses Stabilitätskriteriums auf allgemeine nicht-lineare Systeme (1.2) erlaubt (bei einer Einschränkung an die Linearisierung) das folgende Theorem von Hartman [14].

Theorem 2. *Ist x_0 Ruhelage und für alle Eigenwerte λ_i der Linearisierung $DF(x_0)$ an der Stelle x_0 gilt $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$, dann existiert lokal in einer Umgebung $U_\epsilon(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 ein stetiger Koordinatenwechsel $y = h(x)$, der die Orbits des nicht-linearen Systems $\dot{x} = F(x)$ auf solche des linearen Systems $\dot{y} = DF(x_0) \cdot y$ abbildet.*

Die einfach zu formulierende Stabilitätsbedingung $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ist demnach von großer Tragweite.

Das zuvor besprochene Beispiel gibt als Funktion $F \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 \sin(\varphi) - k^2 v \end{pmatrix}$ mit Ableitung $DF \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(\varphi_0) & -k^2 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + k^2 \lambda + \omega^2 \cos(\varphi_0)$ und damit $\lambda_{1,2} = -\frac{k^2}{2} \pm \sqrt{\frac{k^4}{4} - \omega^2 \cos(\varphi_0)}$. Für $\varphi_0 = 0$ ist $\frac{k^4}{4} - \omega^2 \cos(\varphi_0) = \frac{k^4}{4} - \omega^2 < \frac{k^4}{4}$ und deswegen in jedem Fall $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ und das Gleichgewicht stabil (vgl. Abb. 3). Die Ruhelage bei $\varphi = \pi$ besitzt dagegen einen positiven, destabilisierenden Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \omega^2} > 0$, denn $\sqrt{\frac{k^4}{4} + \omega^2} > \sqrt{\frac{k^4}{4}} = \frac{k^2}{2}$.

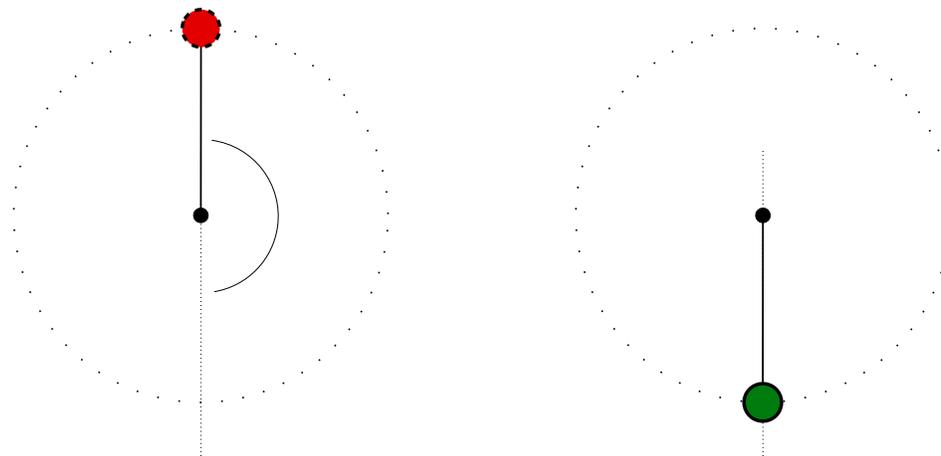


Abbildung 3: Die beiden Ruhelagen für das Pendel. Die Abbildung zeigt links das instabile Gleichgewicht (rot/gestrichelt) und rechts das stabile Gleichgewicht (grün/durchgezogen).

1.5 Stabilität periodischer Orbits

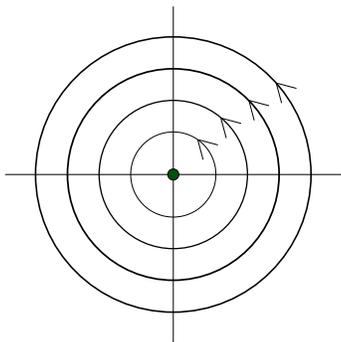


Abbildung 4: Phasenportrait des (unge-dämpften) harmonischen Oszillators. Der Ursprung ist Lyapunov-stabil.

Ruhelagen sind Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Interpretiert man die definierten Stabilitätsbegriffe für die konstanten Lösungen $x_0 = x_0(t)$ in (nicht notwendiger) Abhängigkeit von der Zeit, werden in den Definitionen die Abstände beliebiger Lösungen $x(t)$ von der Lösung $x_0(t)$ betrachtet. Auch für nichtkonstante Lösungen $x^*(t)$ gibt es entsprechende Definitionen. Uns interessieren vor allem periodische Lösungen $x^*(t)$, wie sie zum Beispiel in Abbildung (4) angedeutet

sind. Das Phasenportrait entspricht den Differentialgleichungen $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = 1$. Für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ ergibt sich eine periodische Lösung, die Orbits sind Kreise mit Radius $r = \|x_0\|$. Ähnlich wie die Lyapunov-Stabilität für Ruhelagen gibt es folgende

Definition 3. Eine Lösung $x^*(t, x_a^*)$ mit Anfangswert x_a^* heißt stabil, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ existiert, sodass für x_a und alle Zeiten t gilt: $\text{dist}(x_a, x_a^*) < \delta \Rightarrow \text{dist}(x(t, x_a), x^*(t, x_a^*)) < \epsilon$.

Jeder periodische Orbit aus unserem Beispiel ist wegen der konstanten Winkelgeschwindigkeit $v = \dot{\varphi} = 1$ stabil. Allerdings werden benachbarte Kreisbahnen auch für $t \rightarrow \infty$ einen gewissen Abstand voneinander behalten und erfüllen kein zur asymptotischen Stabilität von Ruhelagen vergleichbares Kriterium. Wir formulieren nun eine Definition der Stabilität periodischer Orbits, mit der wir auch im folgenden Kapitel arbeiten wollen:

Definition 4. (asymptotische orbitale Stabilität)

Sei $x^*(t)$ eine periodische Lösung von (1.2) und $O = \{x^*(t) \subseteq \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ ihr Orbit. $x^*(t)$ heißt asymptotisch orbital stabil, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jede Lösung $x(t)$ mit $\text{dist}(x(t_0), O) < \delta$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $t \geq 0$ gilt $\text{dist}(x(t), O) < \epsilon$ (orbital stabil)
2. $\text{dist}(x(t), O) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ (asymptotisch stabil)

Die beiden Bedingungen stellen insofern eine Verallgemeinerung der Stabilitätsbegriffe für Ruhelagen dar, als wieder der ganze (zeitunabhängige) Orbit betrachtet wird; nur ist O diesmal kein einzelner Punkt, sondern eine geschlossene Bahnkurve im \mathbb{R}^n . Eine Anwendung dieser Definition auf ein Beispiel findet sich in Abschnitt 2.3.

Auch für periodische Orbits gibt es Stabilitätskriterien, die wir für spätere Zwecke anführen wollen. Allerdings hängt bei einer echten Bahnkurve die Stabilität nicht mehr von einem Punkt $x_0 \in O$ und der entsprechenden Linearisierung ab (siehe Theorem 2). Die folgende Herleitung der später verwendeten Kriterien ist eine sehr knappe Darstellung der Floquet-Theorie für lineare Differentialgleichungen der Form

$$\dot{y} = A(t)y \tag{1.3}$$

und (T -)periodischer Koeffizientenmatrix $A(t)$, $A(t+T) = A(t)$. Für Beweise verweisen wir auf Hale [11]. Auf Gaston Floquet selbst geht die Darstellung von Fundamentalmatrizen von (1.3) zurück:

Theorem 3. *Jede Fundamentalmatrix $Y(t)$ des Systems (1.3) besitzt die Form*

$$Y(t) = P(t)e^{Bt}$$

mit einer T -periodischen und differenzierbaren Matrix $P(t)$ und einer konstanten Matrix B .

Die Eigenwerte β_i von B heißen charakteristische oder Floquet-Exponenten, die Eigenwerte ρ_i von $C = e^{BT}$ heißen charakteristische Multiplikatoren des Systems (1.3). Zwischen ihnen besteht eine Beziehung durch $\rho_i = e^{\beta_i T}$. Außerdem gilt die Formel

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = \frac{1}{T} \int_0^T \text{spur } A(s) ds. \quad (1.4)$$

Ist $y(t) = Y(t)c = P(t)e^{Bt}c$ eine T -periodische Lösung von (1.3), dann impliziert $y(t+T) = y(t)$ die Gleichung $e^{BT}c = c$. Demnach ist c ein Eigenvektor der Matrix $C = e^{BT}$ zum Eigenwert $\rho = 1$ (charakteristischen Multiplikator). Also gibt es einen Floquet-Exponenten $\beta = 0$. Mit dieser letzten Motivation von charakteristischen Multiplikatoren periodischer Orbits sind wir bereit für den Satz, der die Floquet-Theorie mit der Stabilität periodischer Lösungen verknüpft.

Theorem 4. Sei $x^*(t)$ eine T -periodische Lösung von (1.2) und entlang dieser die Variationsgleichung gegeben durch

$$\dot{y} = DF(x^*(t))y. \quad (1.5)$$

An die charakteristischen Multiplikatoren von (1.5) stellen wir die Bedingungen

1. $\rho = 1$ tritt einfach auf. (Es gibt genau ein i , $1 \leq i \leq n$, mit $\rho_i = 1$.)
2. Für alle weiteren charakteristischen Multiplikatoren gilt $|\rho_i| < 1$.

Dann ist $x^*(t)$ asymptotisch orbital stabil.

Bemerkung 1. $\rho = 1$ tritt in (1.5) mindestens einmal auf. Denn ist $x^*(t)$ eine periodische Lösung von (1.2), so ist $\dot{x}^*(t)$ eine periodische Lösung von (1.5): $\frac{d}{dt}\dot{x}^*(t) = \frac{d}{dt}F(x^*(t)) = DF(x^*(t)) \cdot \dot{x}^*(t)$. Die zweite Bedingung bedeutet $\text{Re } \beta_i < 0$.

Wie im Fall für Ruhelagen impliziert $\text{Re } \beta_i > 0$ bzw. $|\rho_i| > 1$ Instabilität. Die Anwendung dieses Theorems wird in Abschnitt 2.3 veranschaulicht und ist der Schlüssel, um die Stabilität der entstehenden periodischen Orbits bei der Hopf-Verzweigung zu untersuchen.

2 Hopf-Verzweigung in zwei Dimensionen

Die Verzweigungstheorie beschäftigt sich mit parameterabhängigem Verhalten dynamischer Systeme. Wir schreiben als Erweiterung zu (1.2) dafür

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (2.1)$$

mit dem reellen Parameter $\mu \in \mathbb{R}$. Dabei heißt ein Wert μ_0 Verzweigungspunkt, wenn sich das dynamische Verhalten von (2.1) für $\mu < \mu_0$ und $\mu > \mu_0$ unterscheidet, d.h. die Lösungen wesentliche Unterschiede aufweisen. Das betrifft zum Beispiel die Zahl der Ruhelagen, veränderte Stabilitätseigenschaften und bei der Hopf-Verzweigung die Existenz periodischer Orbits. Zur Vereinfachung tritt bei uns nur $\mu_0 = 0$ als kritischer Wert der Differentialgleichung auf.

Es gibt Verzweigungen in einer Dimension (siehe Abschnitt 2.1) und die Hopf-Verzweigung ist ein Beispiel einer Bifurkation in zwei Dimensionen. Viele vereint die Tatsache, dass am Verzweigungspunkt μ_0 für ein oder mehrere Eigenwerte $\operatorname{Re} \lambda = 0$ gilt und sich mit Überschreiten des Verzweigungspunktes die Zahl der positiven und negativen Realteile ändert. Nachdem in den Abschnitten 2.2 und 2.3 eine vereinfachte Form der Hopf-Verzweigung analysiert wird, folgt in Abschnitt 2.4 der allgemeine Satz über die Hopf-Verzweigung mit Beweis. Dabei spielen die beiden Eigenwerte $\lambda = \pm i\omega_0$ am Verzweigungspunkt eine entscheidende Rolle. Wenn wir uns später auf (2.1) beziehen, meinen wir eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

2.1 Zwei einfache Differentialgleichungen

Wir beginnen mit zwei grundlegenden Differentialgleichungen. $\dot{\varphi} = 1$ hat mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = \varphi_0$ die Lösung $\varphi(t) = t + \varphi_0$ und ist lange nicht so interessant wie die Differentialgleichung

$$\dot{r} = r \cdot (\mu + c \cdot r^2) \quad (2.2)$$

mit reellem Parameter μ , $c = \pm 1$ und $\varphi, r \in \mathbb{R}_+$. Wir betrachten zunächst den Fall $c = +1$. Die Ruhelage $r = 0$ besteht für jedes μ , während nur für negative Wahl des Parameters ein weiteres Gleichgewicht bei $r = \sqrt{-\mu}$ entsteht. Für verschiedene Vorzeichen von μ gibt es also unterschiedliche Entwicklungen mit der Zeit, wie in Abbildung (5) gezeigt wird. Die für $\mu < 0$ stabile Ruhelage $r = 0$ übernimmt bei $\mu = 0$ die Instabilität der zweiten und wird beim Übergang zu $\mu > 0$ destabilisiert.

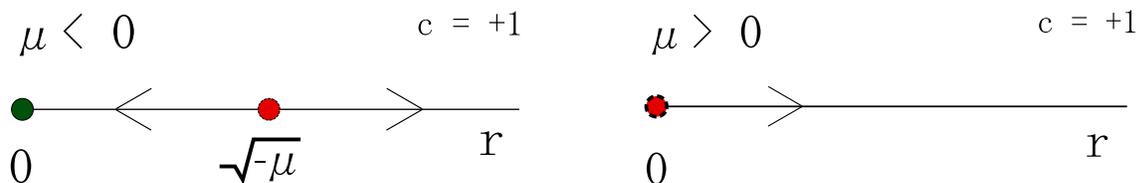


Abbildung 5: In Abhängigkeit vom Parameter μ gibt es verschiedene asymptotische Entwicklungen des Systems. Sie sind durch Pfeile angedeutet.

Jede in beliebiger Nähe von $r = 0$ startende Bewegung wird sich von dieser entfernen. (Beachte das Vorzeichen von \dot{r} .)

Bei Änderung der Gleichung (2.2) zu $\dot{r} = r \cdot (\mu - r^2)$, also $c = -1$, gibt es ein Gleichgewicht für $\mu \leq 0$ und ein weiteres für $\mu > 0$, diesmal $r = \sqrt{\mu}$, allerdings sind die Stabilitätseigenschaften genau umgekehrt. Das Äquilibrium im Ursprung für $\mu < 0$ ist stabil und verliert die Stabilität beim Übergang zu positivem Parameter an die zweite Ruhelage. (siehe Abb. (6)) Die beiden Verzweigungen werden etwas kompakter in Abbildung (7) dargestellt.

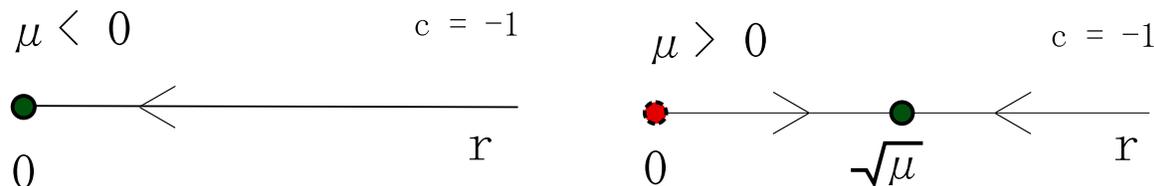


Abbildung 6: Die Ruhelage bei $\sqrt{|\mu|}$ ist hier im Gegensatz zu vorher stabil.

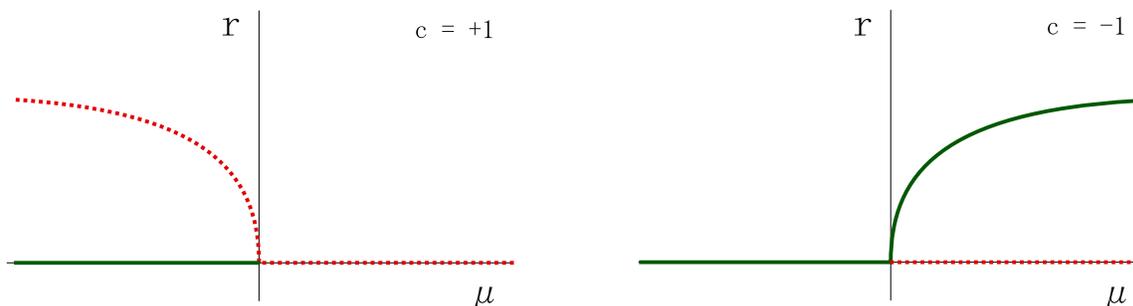


Abbildung 7: Die Ruhelage $r = 0$ wird bei $\mu = 0$ destabilisiert. Von diesem Punkt zweigen in beiden Fällen Ruhelagen ab, deren Stabilitätseigenschaften genau entgegengesetzt zu $r = 0$ sind. Sie existieren jeweils nur zu einer Seite von $\mu = 0$. Stabilität ist durchgezogen (und grün), Instabilität gepunktet (und rot) angedeutet.

2.2 Hopf-Verzweigung in Polarkoordinaten

r und φ können ohne weiteres als Polarkoordinaten, das heißt Radius und Winkel in der Ebene, aufgefasst werden. Die Differentialgleichung für φ führt zu einer konstanten Winkelgeschwindigkeit und der Ursprung $(0|0)$ hat identische Stabilitätseigenschaften wie der Ursprung im Eindimensionalen. In der Gleichung für den Radius führt die andere Ruhelage bei $r = \sqrt{|\mu|}$ zu einem periodischen Orbit, welcher ebenfalls die Stabilität seines eindimensionalen Gegenstücks aufnimmt.

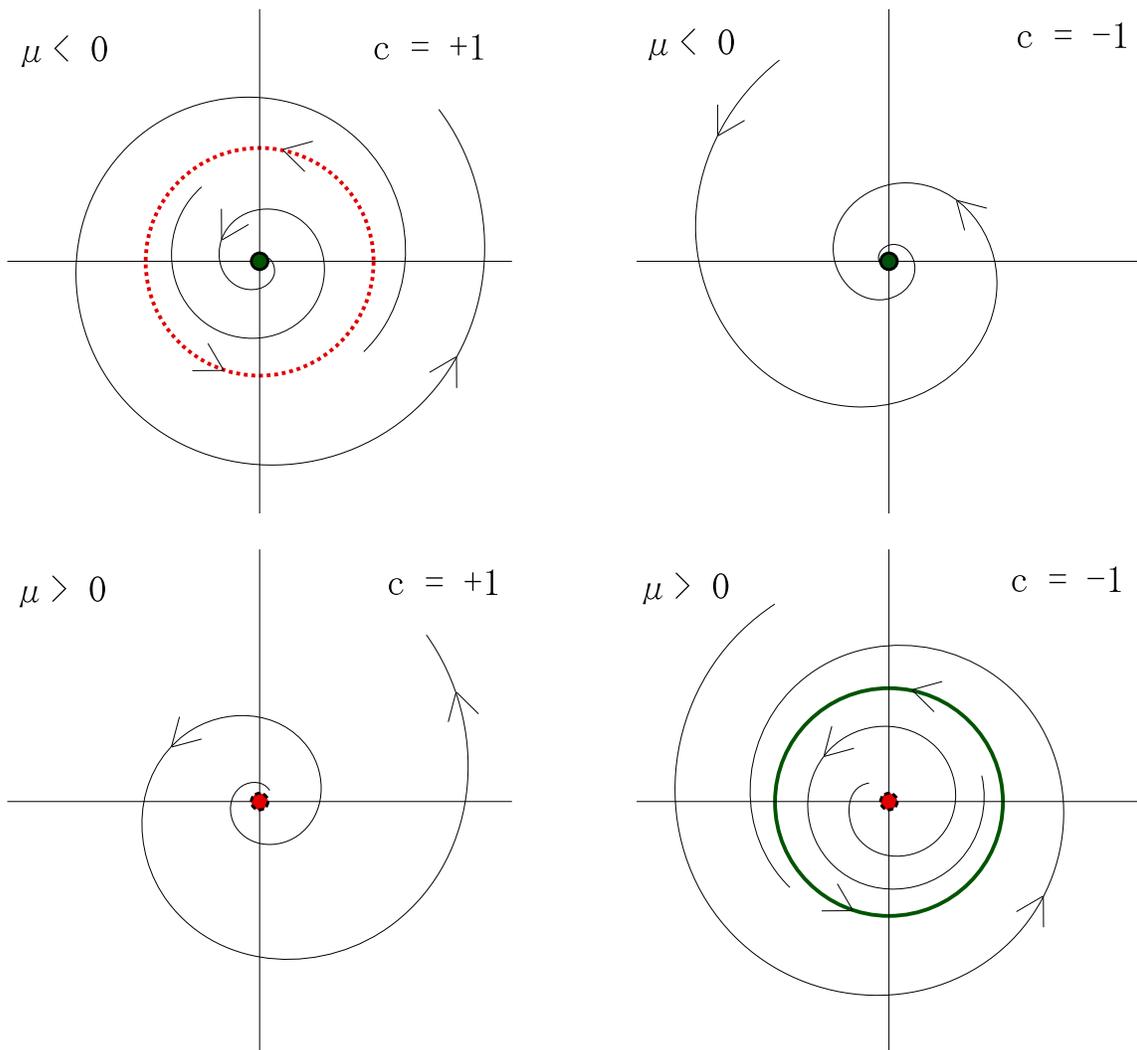


Abbildung 8: Wie in einer Dimension ist der Ursprung $r = 0$ für $\mu < 0$ stabil und für $\mu > 0$ instabil. Die periodischen Orbits haben zum Ursprung entgegengesetzte Stabilitätseigenschaften. Sie sind im subkritischen Fall (links) instabil und im superkritischen Fall (rechts) stabil.

Abbildung (8) zeigt die Dynamik eines Systems, das eine Hopf-Verzweigung durchläuft. So wie in Abbildung 7 die Ruhelagen im Punkt $\mu = 0$ von $r = 0$ abzweigen, zweigen bei der Hopf-Verzweigung die periodischen Lösungen im selben Punkt ab. Da sie im Fall $c = -1$ über (lat. super) und im Fall $c = +1$ unter (lat. sub) dem Wert $\mu = 0$ anzutreffen sind, werden die beiden Fälle auch als super- und subkritische Hopf-Verzweigung bezeichnet. Die Stabilitätseigenschaften werden im nächsten Abschnitt durch eine beispielhafte Anwendung von Theorem 4 für das betrachtete System belegt, bevor in Abschnitt 2.4 durch den Satz über die Hopf-Verzweigung gezeigt wird, warum auch für allgemeine Systeme die Abbildungen 7 und 8 im Wesentlichen das Verhalten bei einer Hopf-Verzweigung wiedergeben. Die Stabilisierung periodischer Orbits kann deshalb auch unter dem folgenden Gesichtspunkt motiviert werden:

In der superkritischen Verzweigung verliert der Ursprung zwar seine Stabilität an die periodischen Orbits, aber das System wird sich trotzdem in dessen Nähe einfinden und bleibt beherrschbar. In der subkritischen Verzweigung hingegen wird sich die Stabilität des Ursprungs für $\mu < 0$ nie zeigen, wenn wir außerhalb der periodischen Bahn mit einer Bewegung starten (vgl. Abb. 8). Um auch in diesem Fall das dynamische System zu kontrollieren, ist eine Stabilisierung der instabilen periodischen Orbits erforderlich. Diesem Problem widmen wir uns im zweiten Teil der Bachelorarbeit.

2.3 Hopf-Verzweigung in kartesischen Koordinaten und komplexe Darstellung

In kartesischen Koordinaten lässt das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_2 \pm x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \mu x_2 \pm x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}\tag{2.3}$$

erst einmal keine schnellen Schlüsse zu, führt aber mithilfe der komplexen Variable $z = x_1 + ix_2$ auf eine prägnante Form:

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 &= \mu x_1 - x_2 \pm x_1(x_1^2 + x_2^2) + i(x_1 + \mu x_2 \pm x_2(x_1^2 + x_2^2)) \\ &= \mu(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) \pm (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2) \\ &= \mu z + iz \pm z|z|^2 \\ &= (\mu + i \pm |z|^2)z\end{aligned}$$

Dass es sich hierbei um das gleiche, zuvor in Polarkoordinaten betrachtete System handelt, wird durch den Ansatz $z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ und Aufteilung der komplexen Differentialgleichung in Real- und Imaginärteil klar: Aus $\dot{z} = \dot{r}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}re^{i\varphi} = (\mu + i \pm r^2)re^{i\varphi}$ folgt

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r \cdot (\mu \pm r^2) \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}$$

Die Normalform $\dot{z} = f(z) := (\mu + i \pm |z|^2)z$ in komplexer Form (mit leichter Änderung) wird im zweiten Teil dieser Arbeit verwendet, um die auftretenden Gleichungen und Untersuchungen übersichtlicher zu gestalten. Dabei ist immer im Hinterkopf zu behalten, dass diese eine Gleichung in einer Variablen das eingangs vorgestellte zwei-dimensionale System darstellt.

Beispielhaft für die Anwendung von Theorem 4 nehmen wir $\mu = 1$ an und wählen das negative Vorzeichen:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = F_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = F_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Die Darstellung in Polarkoordinaten liefert sofort als Lösung $r(t) = 1$ und $\varphi(t) = t$ für den Anfangspunkt $(r_0, \varphi_0) = (1, 0)$, was der 2π -periodischen Lösung $x^*(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ für (2.4) entspricht. Wir bilden die Ableitung

$$\left. \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right|_{x^*(t)} = \begin{pmatrix} -2\cos(t)^2 & -1 - 2\cos(t)\sin(t) \\ 1 - 2\cos(t)\sin(t) & -2\sin(t)^2 \end{pmatrix} =: A(t)$$

und betrachten $\dot{y} = A(t)y$. Ein Floquet-Exponent β_1 ist 0 (Bemerkung 1) und der

zweite berechnet sich aus (1.4) durch

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{spur}(A(s)) \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -2(\cos(s)^2 + \sin(s)^2) \, ds \\ &= -2\end{aligned}$$

Also sind die charakteristischen Multiplikatoren $\rho_1 = 1$ und $\rho_2 = e^{-2 \cdot 2\pi} < 1$ und der periodische Orbit ist, wie es Abbildung (8) suggeriert, asymptotisch orbital stabil.

Die spezielle Differentialgleichung (2.3) setzt der nächste, zentrale Abschnitt in einen allgemeineren Zusammenhang.

2.4 Satz über die Hopf-Verzweigung in der Ebene

Die Linearisierung von (2.3) in der Ruhelage $x_0 = (0, 0)$ ist gegeben durch die Matrix $A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$. Deren Eigenwerte $\lambda(\mu) = \mu \pm i$ überqueren die imaginäre Achse bei $\lambda(0) = \pm i$ wegen $\lambda'(0) = 1$. Diese Eigenschaften der Eigenwerte lassen sich allgemeiner formulieren und dass periodische Orbits im System (2.1) unter diesen Bedingungen auch dann in der Nähe des Verzweigungspunktes $\mu = 0$ existieren, ist die Aussage des zentralen Satzes dieses ersten Teils der Bachelorarbeit. Einen ersten Beweis im \mathbb{R}^n lieferte Eberhard Hopf [16], wir beweisen den Satz in zwei Dimensionen und folgen dafür zu großen Teilen Hassard, Kazarinoff und Wan [15]. Dabei spielt die Poincaré-Normalform von (2.1) eine wichtige Rolle. An ihr werden wir belegen, dass periodische Orbits existieren (Abschnitt 2.4.2) und klären, wann diese stabil/instabil sind (Abschnitt 2.4.3). Der ansonsten lange Beweis, in dem der Einfluss des Parameters μ deutlich wird und die Periode und der Floquet-Exponent berechnet werden, wird in den Anhängen A und B zu Ende geführt.

2.4.1 Satz über die Hopf-Verzweigung

Satz 1. Wir betrachten das System (2.1) unter den Voraussetzungen

1. $F(0, \mu) = 0$ in einer Umgebung von $\mu = 0$, d.h. $x = 0$ ist Ruhelage für jedes $\mu \in I$ und ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $0 \in I$.

2. F ist in einer Umgebung von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ $L + 2$ -mal stetig differenzierbar in x und μ , $L \geq 2$.

3. Die Linearisierung $A(\mu) = D_x F(0, \mu)$ besitzt ein Paar von komplex konjugierten Eigenwerten λ und $\bar{\lambda}$,

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu),$$

für die $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0) > 0$ erfüllt sind. Die Eigenwerte überqueren bei $\mu = 0$ also die imaginäre Achse fern der Null durch $\lambda(0) = i\omega_0$.

Dann besitzt (2.1) periodische Lösungen in der Nähe des Verzweigungspunktes $\mu = 0$: Es existiert ein $\epsilon_P > 0$ und eine Funktion $\mu \in C^{L+1}((0, \epsilon_P), \mathbb{R})$,

$$\mu(\epsilon) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \mu_{2j} \epsilon^{2j} + O(\epsilon^{L+1}), \quad (2.5)$$

sodass (lokal in x) für jedes $\epsilon \in (0, \epsilon_P)$ genau eine periodische Lösung

$$p_\epsilon(t) = \epsilon \cdot e^{\frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t} + O(\epsilon^{L+2}) \quad (2.6)$$

für $\mu = \mu(\epsilon)$ existiert. Die Periode $T(\epsilon)$ von $p_\epsilon(t)$ ist eine Funktion $T \in C^{L+1}((0, \epsilon_P), \mathbb{R})$,

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \tau_{2j} \epsilon^{2j} \right) + O(\epsilon^{L+1}). \quad (2.7)$$

Die beiden Floquet-Exponenten der periodischen Lösung $p_\epsilon(t)$ sind 0 und eine Funktion $\beta \in C^{L+1}((0, \epsilon_P), \mathbb{R})$,

$$\beta(\epsilon) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \beta_{2j} \epsilon^{2j} + O(\epsilon^{L+1}). \quad (2.8)$$

Insbesondere ist für $\mu_2 \neq 0$ die Funktion $\mu(\epsilon)$ lokal umkehrbar und die periodische Lösung $p_\epsilon(t)$ kann als $p(t, \mu)$ parametrisiert werden. $p(t, \mu)$ ist dann stabil für $\beta_2 < 0$ und instabil im Fall $\beta_2 > 0$.

Bemerkung 2. Damit periodische Lösungen zu einer Seite von $\mu = 0$ existieren, reicht es, einen nicht verschwindenden Koeffizienten $\mu_{2j} \neq 0$ zu finden. Die Annahme $\mu_2 \neq 0$ vereinfacht lediglich die später nötigen Rechenschritte. Sie ist in vielen praktischen Fällen erfüllt. Außerdem reicht in den Voraussetzungen bei 1. die Bedingung $F(0, 0) = 0$ anstelle der ganzen Umgebung für μ , weil $A(0) = D_x F(0, 0)$ invertierbar ist und die Gleichung $F(x, \mu) = 0$ deswegen implizit eine eindeutige Ruhelage $x_0 = x_0(\mu)$ in einer Umgebung garantiert. Zur gestellten Voraussetzung fehlt dann nur noch eine lokale Koordinatentransformation, auf die verzichtet wurde, um explizit berechenbare Ergebnisse zu erzielen.

2.4.2 Existenz periodischer Lösungen

Der Beweis des Satzes führt über die Poincaré-Normalform (2.9) von (2.1). Der Weg bis dahin unter den genannten Voraussetzungen ist technischer Natur und wird in Anhang A ausgeführt. In Anwendungen des formulierten Satzes auf allgemeine Systeme (2.1) muss zunächst auf die Gleichungen (A.2) und (A.6) zurückgegriffen werden, um dann die folgenden Resultate zu verwenden.

Die Poincaré-Normalform von (2.1) in zwei Dimensionen ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\mu)x + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} B_j(\mu)x \|x\|^{2j} + O(\|x\| \cdot \|(x, \mu)\|^{L+1}) \\ &= f(x, \mu) \in C^{L+2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

mit Matrizen

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix}, \quad \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$$

und

$$B_j(\mu) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} c_j(\mu) & -\operatorname{Im} c_j(\mu) \\ \operatorname{Im} c_j(\mu) & \operatorname{Re} c_j(\mu) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor.$$

In komplexer Schreibweise ist diese wiederum verkürzt durch

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} c_j(\mu)z |z|^{2j} + O(|z| \cdot |(z, \mu)|^{L+1})$$

auszudrücken, wobei $z = x_1 + ix_2$ sein soll. In Abschnitt 2.3 haben wir ein Beispiel einer Poincaré-Normalform bereits kennengelernt.

Die Substitution $x =: \epsilon y$ mit $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ führt auf das System

$$\dot{y} = A(\mu)y + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \epsilon^{2j} B_j(\mu)y|y|^{2j} + O(|y| \cdot |(\epsilon y, \mu)|^{L+1}), \quad (2.10)$$

das auch für $\epsilon = 0$ gültig ist; die rechte Seite $g(y, \epsilon, \mu) = \frac{\dot{x}}{\epsilon} = \frac{f(\epsilon y, \mu)}{\epsilon}$ ist noch $L+1$ -mal differenzierbar.

Sei $y = y(t, \epsilon, \mu)$ die Lösung von (2.10) zum Startwert $y(0) = (1, 0)^T$. Im Fall $\epsilon = \mu = 0$ ist das System (2.10) linear und die Lösung einfach $y = y(t, 0, 0) = e^{i\omega_0 t}$ mit Periode $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Im Fall $\epsilon = 0$ und $\mu \neq 0$ ist das System nicht mehr linear,

$$\dot{y} = A(\mu)y + O(|y| \cdot \mu^{L+1}),$$

aber für kleine μ garantiert der Satz von Picard-Lindelöf die Existenz der Lösung $y(t, 0, \mu)$ auf jeden Fall solange, bis die positive y_1 -Achse das erste Mal nach der Zeit $t = T_0(\mu)$ getroffen wird (siehe Abb. (9)). Es gilt

$$T_0(\mu) = \frac{2\pi}{\omega(\mu)} + O(\mu^{L+1}),$$

$y(t, \epsilon, \mu) \in C^{L+1}$, $y(T_0(\mu), 0, \mu) = [e^{\frac{2\pi\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}} + o(\mu^{L+1})] \cdot (1, 0)^T$ und mit (2.10) auch

$$\dot{y}(T_0(\mu), 0, \mu) = (\alpha(\mu), \omega(\mu))^T e^{\frac{2\pi\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}} + o(\mu^{L+1}).$$

Da in einer Umgebung der Null $\omega(\mu) > 0$ gilt, kann mithilfe des Satzes über implizite Funktionen die Gleichung $y_2(t, \epsilon, \mu) = 0$ implizit für $t = T(\epsilon, \mu)$ gelöst werden. Dabei

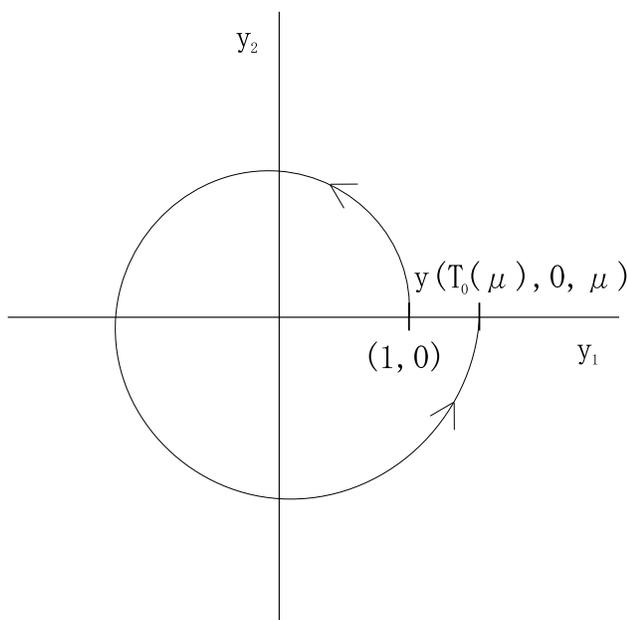


Abbildung 9: Für den Startwert $y = (1, 0)$ kehrt die entsprechende Lösung zur positiven y_1 -Achse zurück und schneidet bei $y(T_0(\mu), 0, \mu)$.

gilt $T(0, \mu) = T_0(\mu)$ und $T \in C^{L+1}$. Definiere $I(\epsilon, \mu) := y_1(T(\epsilon, \mu), \epsilon, \mu)$. Auch I ist für kleine ϵ und μ $L+1$ -mal differenzierbar und es gilt $I_\mu(0, 0) = \frac{2\pi\alpha'(0)}{\omega_0}$. Wieder ist der vorige Satz anwendbar und liefert für ein $\epsilon_p > 0$ eine Funktion $\mu = \mu(\epsilon) \in C^{L+1}((0, \epsilon_p), \mathbb{R})$ mit $I(\epsilon, \mu(\epsilon)) \equiv 1$ (und für später $\mu(0) = 0$; siehe (B.3)). Damit ist die Existenz einer Familie von periodischen Lösungen $x(t) = \epsilon y(t)$ in Abhängigkeit von $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$ für das System $\dot{x} = F(x, \mu)$ in Poincaré-Normalform bewiesen.

Die Beweise der Reihendarstellung (2.5), (2.7) und (2.8) von Parameter $\mu(\epsilon)$, Periode $T(\epsilon)$ und Floquet-Exponent $\beta(\epsilon)$ der gefundenen periodischen Bewegungen sind im Anhang B ausgeführt. Das dort bewiesene Lemma 1 klärt außerdem die Darstellung (2.6) der periodischen Lösung.

Die Annahme $\mu_2 \neq 0$ bedeutet wegen (B.4b) für die Poincaré-Normalform konkret $Re\ c_1 \neq 0$. Bei negativem μ_2 ($Re\ c_1 > 0$) existieren periodische Orbits wegen $\mu_0 = \mu_1 = 0$ für $\mu < 0$ und bei positivem μ_2 ($Re\ c_1 < 0$) entsprechend für $\mu > 0$. Das Vorzeichen von $Re\ c_1$ spielt die Rolle von $c = \pm 1$ in den Abschnitten 2.1 bis 2.3. Da für den Radius r der Orbits $r = |p_\epsilon(t)| \approx \epsilon$ gilt und die lokale Umkehrung von $\mu(\epsilon)$ durch $\epsilon \approx \sqrt{\mu}$ charakterisiert werden kann, folgt $r \approx \sqrt{\mu}$ und die Abbildungen (7) bleiben qualitativ für die allgemeine Verzweigung erhalten. Dass (8) ebenso sinnvoll die Stabilität der abzweigenden periodischen Lösungen abbilden, zeigt der folgende Abschnitt. Die Charakterisierungen sub- und superkritisch bleiben deswegen erhalten.

2.4.3 Stabilität der periodischen Orbits

Wir wollen die Stabilität der periodischen Orbits $x(t, \epsilon) = \epsilon y(t, \epsilon, \mu(\epsilon))$ untersuchen. Wie in Abschnitt 2.3 wenden wir Theorem 4 an und benötigen neben 0 den zweiten Floquet-Exponenten

$$\beta(\epsilon) = \frac{1}{T(\epsilon)} \int_0^{T(\epsilon)} \text{spur } A(s, \epsilon) ds$$

der Poincaré-Normalform (2.9). Im Abschnitt B.2 wird die Darstellung

$$\beta(\epsilon) = 2\text{Re } c_1(0)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

berechnet. Die Annahme $\mu_2 \neq 0$ impliziert $\text{Re } c_1(0) \neq 0$ (siehe (B.4b)) und verschafft Aufschluss über die Stabilität der periodischen Orbits. Denn für kleine ϵ ist $\beta(\epsilon) < 0$ erfüllt, wenn

$$\text{Re } c_1(0) < 0 \tag{2.11}$$

gilt und das ist unser Stabilitätskriterium, weil damit $\rho < 1$ gültig ist. Im Fall $\text{Re } c_1(0) > 0$ sind die Orbits instabil. Falls dieses Kriterium wegen $\text{Re } c_1(0) = 0 (= \mu_2)$ fehlschlägt, müssen Terme höherer Ordnung in Betracht gezogen werden (siehe auch Hassard, Kazarinoff und Wan [15], S. 44).

Mit den Gleichungen (A.2), (A.6), (B.4a), (B.4b), (B.5) und (2.11) stehen ausreichende Mittel bereit, jede Hopf-Verzweigung (mit den genannten Voraussetzungen) in zwei Dimensionen auf die Gestalt ihrer periodischen Orbits zu untersuchen. Warum sich diese zweidimensionalen Ergebnisse auf noch allgemeinere Systeme anwenden lassen, motiviert das nächste Kapitel.

3 Retardierte Differentialgleichungen und Zentrums-mannigfaltigkeiten

Das Phänomen der Hopf-Verzweigung in zwei Dimensionen wurde im vorigen Kapitel bewusst mit großer Genauigkeit studiert. Dieses Kapitel soll die weiteren Zutaten für die Betrachtungen im zweiten Teil der Arbeit vorstellen. Die benötigte Theorie zu retardierten Differentialgleichungen füllt ganze Bücher und wir verweisen deswegen für eine ausführliche Behandlung auf Bellman und Cook [4], Hale und Verduyn Lunel [13] oder Diekmann et al. [7]. Zentrums-mannigfaltigkeiten als Hilfsmittel der nichtlinearen Differentialgleichungen werden ebenso von Hale und Verduyn Lunel [13] und Diekmann et al. [7] behandelt und für eine grundlegende Auseinandersetzung empfehlen wir die Einführung von Carr [6]. In den beiden folgenden Abschnitten wollen wir trotzdem motivieren, wie und warum sich die erhaltenen Ergebnisse über die Hopf-Verzweigung auf komplexere Differentialgleichungen übertragen lassen.

3.1 Retardierte Differentialgleichungen

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen findet unter anderem Anwendung in Modellen für dynamische Prozesse, in denen die Änderung \dot{x} einer Größe x vom aktuellen Zeitpunkt t abhängt: $\dot{x}(t) = F(x(t))$. Beim Modellieren einiger Phänomene ist es aber sinnvoll, manchmal unabdingbar, anzunehmen, die Änderung einer Größe würde auch von Zeitpunkten bzw. Zuständen in der Vergangenheit beeinflusst. Als Beispiel aus der Biologie soll die Entwicklung einer Population dienen. (vgl. Diekmann et al. [7])

Ist $x(t)$ die Anzahl der ausgewachsenen Individuen und $\tau > 0$ die Zeit, die der Nachwuchs braucht, um erwachsen zu werden, dann wird $\dot{x}(t)$ von der Geburtenzahl zum Zeitpunkt $t - \tau$ abhängen. Definieren wir näher r als (konstante) Geburtenrate und μ als (konstante) Sterberate, so lässt sich die Entwicklung der Erwachsenen durch die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + rx(t - \tau) \tag{3.1}$$

beschreiben. Denn die Zahl der Geburten $rx(t - \tau)$ bestimmt mit einer Verzögerung von τ den Anstieg der Anzahl erwachsener Individuen. An diesem Beispiel einer Delay-Differentialgleichung soll die im zweiten Teil dieser Arbeit notwendige

Theorie kurz motiviert und mit der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen in Beziehung gesetzt werden.

Wir vergleichen das System (3.1) mit der linearen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -\mu x(t)$ mit dem Anfangswert $x(0) = x_a \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Soll für das System (3.1) ebenso ein „Anfangswert“ festgelegt werden, erzwingt die Zeitverzögerung, gleich für das ganze Zeitintervall $[-\tau, 0]$ einen Wert $x_a(t)$ vorzugeben. Erst mit dieser Funktion $x_a : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine eindeutige Lösung von (3.1) möglich. Die Einführung des Delay-Terms macht also aus einem eindimensionalen Problem ein unendlichdimensionales. Das spiegelt sich auch in den Stabilitätsanalysen der Ruhelage $x_0 = 0$ wider. Der Exponentialansatz $x(t) = x_a e^{\lambda t}$ führt im gewöhnlichen Fall auf die charakteristische Gleichung $\lambda + \mu = 0$ und die eindeutige Lösung $x(t) = x_a \cdot e^{-\mu t}$. Auch für lineare Delay-Differentialgleichungen ist dieser Ansatz sinnvoll und führt nach Einsetzen in (3.1) auf eine charakteristische Gleichung:

$$\lambda = -\mu + r e^{-\lambda \tau} \quad (3.2)$$

Diese ist aufgrund des exponentiellen Terms nicht mehr so leicht zu behandeln wie sonst die charakteristischen Polynome in λ . (3.2) hat unendlich viele Lösungen und die Ruhelage ist wieder stabil, wenn für alle Eigenwerte $Re \lambda < 0$ gilt. In Betracht der unendlich vielen Eigenwerte lässt sich, mit dem Ziel einer Stabilisierung, folgendes positives Resultat beweisen: Die charakteristische Gleichung (3.2) besitzt nur endlich viele Lösungen λ mit $Re \lambda \geq 0$ ². Tatsächlich lässt sich für (3.2) die Stabilitätsbedingung $\frac{r}{\mu} < 1$ entwickeln (siehe Diekmann et al. [7]) und die Population stirbt für $t \rightarrow \infty$ sinnvollerweise genau dann aus, wenn mehr Individuen sterben, als geboren werden.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Parametern einer charakteristischen Gleichung wie oben ausnutzen, um die dort betrachtete Ruhelage zu stabilisieren. Dafür schaffen wir zunächst die Situation $Re(\lambda) \leq 0$ und nutzen dann die Theorie über Zentrumsmanigfaltigkeiten.

²Das gilt auch für alle charakteristischen Gleichungen $\sum_{j=0}^m a_j \lambda^j + e^{-\lambda \tau} \cdot \sum_{j=0}^n b_j \lambda^j = 0$ mit $m > n$.

3.2 Zentrumsmannigfaltigkeiten

Die Einführung einer Zeitverzögerung in der Differentialgleichung hat uns unendlich viele Eigenwerte beschert. In Kapitel 2 haben wir zwei Eigenwerte $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ in Abhängigkeit von μ verfolgt, und das waren auch schon alle. Es stellt sich also die Frage, ob es in höherdimensionalen dynamischen Prozessen auch eine Hopf-Verzweigung gibt und welchen Wert unsere Ergebnisse in Anbetracht der Fülle von existierenden Eigenwerten noch besitzen. Die Antwort fällt auch hier trotz der komplexeren Struktur der Differentialgleichungen positiv aus und begründet sich in der Theorie über Zentrumsmannigfaltigkeiten. Wir werden wie zuvor die Theorie nur in groben Zügen andeuten und verweisen vor allem auf Carr [6] für eine ausführliche Einführung mit Beweisen und Anwendungsbeispielen. Die folgende Motivation im endlichdimensionalen Fall folgt ebenfalls Carr [6] und stellt noch keine Mittel für die Behandlung des Systems in Teil 2 dieser Arbeit bereit. Dazu sei auf Diekmann et al. [7], Fiedler et al. (2007) [8], Just et al. [17] und Schöll und Schuster [30] verwiesen.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x} = F(x) \tag{3.3}$$

mit $F(0) = 0$. Besitzt die Jacobi-Matrix $DF(0)$ keinen Eigenwert mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$, kann über die Stabilität der Ruhelage $x = 0$ entschieden werden. (siehe Abschnitt 1.3) Existieren aber solche kritischen Eigenwerte, ist dafür eine genauere Analyse des Systems notwendig. An diesem Punkt kommt die Zentrumsmannigfaltigkeit ins Spiel. Bevor wir sie jedoch genauer benennen, eine allgemeine

Definition 5. Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **lokale invariante Mannigfaltigkeit** der Differentialgleichung (3.3), wenn zu jedem $x_a \in S$ eine Zeit $T(x_a) > 0$ existiert, sodass die Lösung $x(t)$ von (3.3) mit $x(0) = x_a$ in S verläuft. Ist für jedes x_a die Wahl $T = \infty$ möglich, so heißt S invariante Mannigfaltigkeit.

Für ein Beispiel nehmen wir das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Die Matrix A besitze ausschließlich Eigenwerte mit Realteil null und B habe nur Eigenwerte mit negativem Realteil. Die Funktionen f und g sind

zweimal differenzierbar und erfüllen $f(0,0) = 0 = g(0,0)$, $Df(0,0) = 0 = Dg(0,0)$.

Im linearen Fall $f = g = 0$ sind die Mengen $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x = 0\}$, kurz $\{x = 0\}$, und $C = \{y = 0\}$ invariante Mannigfaltigkeiten. C heißt auch Zentrumsmannigfaltigkeit und im allgemeinen (nichtlinearen) Fall gibt es folgende

Definition 6. Eine (lokale) invariante Mannigfaltigkeit C von (3.4) heißt (lokale) Zentrumsmannigfaltigkeit, wenn sie (lokal) durch eine differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$ beschrieben werden kann: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid y = h(x)\} = \{y = h(x)\}$.

Im linearen Fall können für die Stabilität der Ruhelage $(x,y) = (0,0)$ beide Gleichungen separat betrachtet werden, weil sie entkoppeln. Die Matrix B ermöglicht eine stabile Ruhelage, womit die Gleichung $\dot{x} = Ax$ eine endgültige Entscheidung liefert. Es ist also lediglich das Verhalten des linearen Systems auf der Zentrumsmannigfaltigkeit $y = 0$ zu studieren. Im allgemeinen nichtlinearen Fall gelten folgende Sätze.

Theorem 5. *Es existiert eine lokale Zentrumsmannigfaltigkeit C für das System (3.4), $C = \{(x, h(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \|x\| < \delta\}$, $h \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. (C bzw. h sind im Allgemeinen nicht eindeutig.)*

Die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit wird beschrieben durch das System

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)). \quad (3.5)$$

Das (asymptotische) Verhalten dieses Systems bestimmt das Verhalten des gesamten Systems (3.4), besagt

Theorem 6. (a) *Die Ruhelage $u = 0$ von (3.5) sei stabil (instabil). Dann ist die Ruhelage $(x,y) = (0,0)$ von (3.4) stabil (instabil).*

(b) *Die Ruhelage $u = 0$ von (3.5) sei stabil. Ist $(x(t), y(t))$ eine Lösung von (3.4), die in einer genügend kleinen Umgebung $U_\epsilon(0,0) \ni (x_0, y_0)$ startet, dann existiert eine Lösung $u(t)$ von (3.5), sodass für $t \rightarrow \infty$ und eine Konstante γ gilt:*

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ y(t) &= h(u(t)) + O(e^{-\gamma t}). \end{aligned}$$

Natürlich muss eine Zentrumsmannigfaltigkeit erst einmal berechnet oder zumindest bis zu einem gewissen Grad approximiert werden, aber der große Vorteil liegt in der Dimensionsreduktion von $n+m$ auf n . Es sind Erweiterungen von Satz 2(b) insofern möglich, als das System (3.5) nicht nur für stabile Ruhelagen das Verhalten von Lösungen $(x(t), y(t))$ bestimmt. So kann für $n = 2$ und beliebiges m das dominierende System (3.5) eine Verzweigung mit Eigenwerten $\lambda = \pm i\omega_0$ durchlaufen und unsere Ergebnisse zur zweidimensionalen Hopf-Verzweigung sind voll verwertbar. Um diese auch für den Fall $n > 2$ und $m \in \mathbb{N}$ (oder $m = \infty$ für Delay-Differentialgleichungen) anwenden zu können, ist lediglich folgende zusätzliche Bedingung an die Eigenwerte λ_i zu stellen:

$$\lambda_i \neq \lambda = \pm i\omega_0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z} : \lambda_i \neq m\lambda.$$

(vgl. Diekmann et al. [7] oder Hale und Verduyn Lunel [13])

Teil II

Stabilisierung von instabilen periodischen Orbits bei gekoppelten Oszillatoren

Die periodischen Orbits der subkritischen Hopf-Verzweigung sind instabil mit einem reellen Floquet-Multiplikator $\rho > 1$. Bis 2007 galt es als bewiesen, dass instabile periodische Orbits mit einer ungeraden Anzahl an Floquet-Multiplikatoren $\rho_i > 1$ nicht durch eine zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle nach Pyragas [27] zu stabilisieren seien (vgl. Nakajima [23]). Dann lieferten Fiedler et al. [8] einen Gegenbeweis, indem sie eine erfolgreiche Kontrolle des genannten Orbits entwickelten. In der Folge ergaben sich neue Anwendungsmöglichkeiten der Pyragas-Kontrolle und Fiedler et al. [9] studierten 2010 zwei gekoppelte Oszillatoren (5.1). Alle auftretenden periodischen Orbits wurden unter gewissen Bedingungen stabilisiert, siehe dazu auch die Theoreme 7 und 8.

Wir erläutern zunächst die Normalform eines Oszillators, der eine Hopf-Verzweigung durchläuft, und was eine Stabilisierung von periodischen Orbits ausmacht (Kap. 4). Es werden in Kapitel 5 das System gekoppelter Hopf-Oszillatoren und die auftretenden periodischen Lösungen bei Fiedler et al. [9] vorgestellt und Abschnitt 5.2 ist den bewiesenen Stabilisierungs-Theoremen 7 und 8 gewidmet. Aufbauend auf diesen Ergebnissen und den entsprechenden Beweisen wird in Kap. 6 der Kontrollansatz verallgemeinert. Neue Ergebnisse zur Stabilisierung periodischer Orbits sind die Sätze 2 und 3.

4 Hopf-Normalform und Stabilisierung periodischer Orbits

4.1 Hopf-Normalform

In diesem Teil der Arbeit ist das grundlegende dynamische System

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (\mu + i)z + \gamma z|z|^2 \\ &= f(z, \mu, \gamma)\end{aligned}\tag{4.1}$$

mit $z \in \mathbb{C}$ und Parametern $\mu \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C}$. Es ist ein Spezialfall der Poincaré-Normalform (2.9), wobei $\lambda(\mu) = \mu + i$ und $c_1(\mu) \equiv \gamma$ gesetzt werden können. Wenn wir $\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma \neq 0$ annehmen, sagt uns Teil I, dass (4.1) bereits die wichtigsten Größen der Hopf-Verzweigung bei $\mu = 0$ festlegt und wir werden im Folgenden von (4.1) als Hopf-Normalform sprechen. Zur Abkürzung schreiben wir $\dot{z} = f(z)$ und nennen einen Oszillator, der durch (4.1) und die entsprechenden periodischen Orbits beschrieben wird, Hopf-Oszillator.

Durch Vernachlässigung höherer Terme der Poincaré-Normalform vereinfachen sich unsere Ergebnisse (2.5), (2.7), (2.8) und (B.7). Die Gleichung $\dot{z} = f(z)$ beschreibt also einen Oszillator, der für $\mu \cdot \operatorname{Re} \gamma < 0$ periodische Orbits

$$z(t) = r \cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{T}t\right)$$

durchläuft. Dabei sind r und T (letzteres nach Einsetzen der Lösung in (4.1)) gegeben durch

$$r = \sqrt{-\frac{\mu}{\operatorname{Re} \gamma}}\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{1 + r^2 \operatorname{Im} \gamma} \\ &= \frac{2\pi}{1 - \mu \frac{\operatorname{Im} \gamma}{\operatorname{Re} \gamma}}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Die periodischen Orbits der subkritischen Hopf-Verzweigung für $\operatorname{Re} \gamma > 0$ sind instabil mit einem Floquet-Exponenten $\beta > 0$.

4.2 Stabilisierung periodischer Orbits

Eine Stabilisierung von instabilen Lösungen $z(t)$ des Systems (4.1) besteht aus dem Entwerfen eines Kontrollterms u , sodass $z(t)$ ebenso Lösung von $\dot{z} = f(z) + u$ ist, und zwar stabile Lösung. Wir nutzen eine auf Pyragas [27] zurückgehende, nicht-invasive zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle $u = u(z(t), z(t - \tau), b)$ mit $\tau > 0$ und $b \in \mathbb{C}$. (4.1) wird erweitert zu

$$\dot{z} = f(z) + b(z(t - \tau) - z(t)) \quad (4.4)$$

und weil für die periodischen Orbits $z(t - T) = z(t)$ gilt, bleiben diese bei der Wahl von $\tau = T$ erhalten. Auf den Orbits verschwindet der Kontrollterm, $u = 0$, und die Kontrolle greift nur ein, sobald die periodischen Bahnen verlassen. Sie ist also nicht-invasiv in Bezug auf die zu stabilisierenden Orbits. Man beachte, dass $b \in \mathbb{C}$ als Kontrollparameter frei gewählt werden kann.

5 Stabilisierung durch Fiedler et al. (2010)

Einen Beweis zur Stabilisierung der instabilen periodischen Orbits bei der subkritischen Hopf-Verzweigung mit der genannten Kontrolle zeigen Fiedler et al. 2007 [8] und widerlegen damit gleichzeitig die Vermutung, Orbits mit einer ungeraden Anzahl an Floquet-Multiplikatoren $\rho_i > 0$ könnten nie durch eine Pyragas-Kontrolle stabilisiert werden. Die Beweisidee bildet das Grundgerüst für die Sätze 2 und 3 und wird in Abschnitt 5.2 skizziert.

5.1 System aus zwei gekoppelten Hopf-Oszillatoren

Uns interessiert in Fortsetzung der Ergebnisse von Fiedler et al. [8], [9] das folgende System zweier gekoppelter Hopf-Oszillatoren:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2)\end{aligned}\tag{5.1}$$

f ist die vorgestellte Hopf-Normalform (4.1) und $a \in \mathbb{R}_+$ gibt die Stärke der Kopplung an.

Durch Einführen neuer Koordinaten $z_{\pm} = \frac{1}{2}(z_1 \pm z_2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{z}_+ &= \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) \\ \dot{z}_- &= \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)) - 2az_-.\end{aligned}$$

Die weitere Untersuchung dieses Systems geschieht in den wegen $f(-z) = -f(z)$ invarianten Unterräumen $Z_- = \{(z_+, z_-) \mid z_+ = 0\}$ und $Z_+ = \{(z_+, z_-) \mid z_- = 0\}$. Bei Bewegungen in Z_- sind z_1 und z_2 genau um π phasenverschoben, $z_1 = -z_2$, und bilden Gegen-Phase-Schwingungen; in Z_+ schwingen beide synchron in Phase. Die Dynamik in Z_- und Z_+ wird wieder durch die Hopfnormalform beschrieben: In Z_+ gilt sogar

$$\dot{z}_+ = f(z_+),\tag{5.2}$$

während im Vergleich dazu in Z_- die Gleichung

$$\dot{z}_- = f(z_-) - 2az_- = (\mu - 2a + i + \gamma|z_-|^2)z_-$$

Diese Pyragas-Kontrolle erlaubt eine Stabilisierung der periodischen Orbits $z_-(t)$ und Fiedler et al. [9] erhalten folgende Ergebnisse:

Theorem 7. *Betrachte das System (5.1) mit der Kopplungskonstanten*

$$0 < a < \frac{1}{\pi}$$

im superkritischen Fall $\operatorname{Re} \gamma < 0$. Dann gibt es eine streng monoton fallende analytische Funktion $b_ : (0, \frac{1}{\pi}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a < b_*(a)$ und Grenzwerten $b_*(0) = \infty$, $b_*(\frac{1}{\pi}) = \frac{1}{\pi}$, sodass für reelle Kontrollen b ,*

$$a < b < b_*(a),$$

die periodischen Orbits $z_-(t) \neq 0$, $z_+ \equiv 0$ von (5.1) durch die nicht-invasive zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle (5.3) mit Zeitverzögerung

$$\tau = \frac{1}{2}T_-$$

in der Nähe des Verzweigungspunktes $\mu = 2a$ der Gegen-Phase-Schwingungen stabilisiert werden.

Theorem 8. *Betrachte (5.1) im subkritischen Fall $\operatorname{Re} \gamma > 0$ wieder mit der Kopplungskonstanten*

$$0 < a < \frac{1}{\pi}.$$

Dann existiert eine stetige, streng monoton steigende Funktion $\eta : (0, \frac{1}{\pi}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit Grenzwerten $\eta(0) > 0$ und $\eta(\frac{1}{\pi}) = \infty$, sodass unter der Bedingung

$$|\operatorname{Im} \gamma| > \eta(a) \cdot \operatorname{Re} \gamma \tag{5.4}$$

Stabilisierung möglich ist: Für jedes Paar (a, γ) , das (5.4) erfüllt, gibt es ein Gebiet von Kontrollen $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von (a, γ) , sodass die nicht-invasive zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle (5.3) mit $\tau = \frac{1}{2}T_-$ die periodischen Orbits $z_-(t) \neq 0$, $z_+ \equiv 0$ in der Nähe von $\mu = 2a$ stabilisiert.

Die Beweisideen werden nun im Hinblick auf die Sätze 2 und 3 vorgestellt. Als geometrischer Hintergrund sind vor allem die Abbildungen (11) und (12) zu beachten.

Eine nicht-invasive Kontrolle im Ansatz (5.3) wird durch eine Wahl von $\tau = \frac{1}{2}T_- + nT_-$ mit $n \in \mathbb{N}$ sichergestellt. Damit bleibt der Kontrollparameter $b \in \mathbb{C}$ zunächst frei wählbar und es wird eine Region $B \subseteq \mathbb{C}$ gesucht, in der jedes $b \in B$ den Ursprung $z_- = z_+ = 0$ stabilisiert. Mit einer geeigneten Wahl von $b \in B$ übergibt dann dieser stabilisierte Ursprung seine Stabilität an die periodischen Orbits von Z_- .

Für die Stabilitätsanalyse ist der erste Schritt die Linearisierung des Systems im Ursprung $z_- = z_+ = 0$. Diese Linearisierung entkoppelt in z_- und z_+ und ergibt zwei charakteristische Gleichungen $\chi_{\pm}(\lambda_{\pm}, b, \mu, \tau) = 0$ für Eigenwerte λ_{\pm} , wobei es sich um Funktionen $\chi_{\pm} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ handelt. Für festes $\mu = 2a$ und Delay $\tau(2a) = \pi$ am Verzweigungspunkt wird jetzt eine Stabilitätsregion $B \subset \mathbb{C}$ gesucht, d.h. für $b \in B$ sollen die Gleichungen $\chi_{\pm} = 0$ bis auf den Hopf-Eigenwert $\lambda_- = i$ nur Lösungen λ_{\pm} mit $Re \lambda_{\pm} < 0$ besitzen. (siehe Abbildung (11)) Zuletzt ist in der λ - τ -Ebene für solch ein dann fest gewähltes b sicherzustellen, dass der stabile Ursprung seine Stabilität an die periodischen Orbits übergibt. (siehe Abbildung (12))

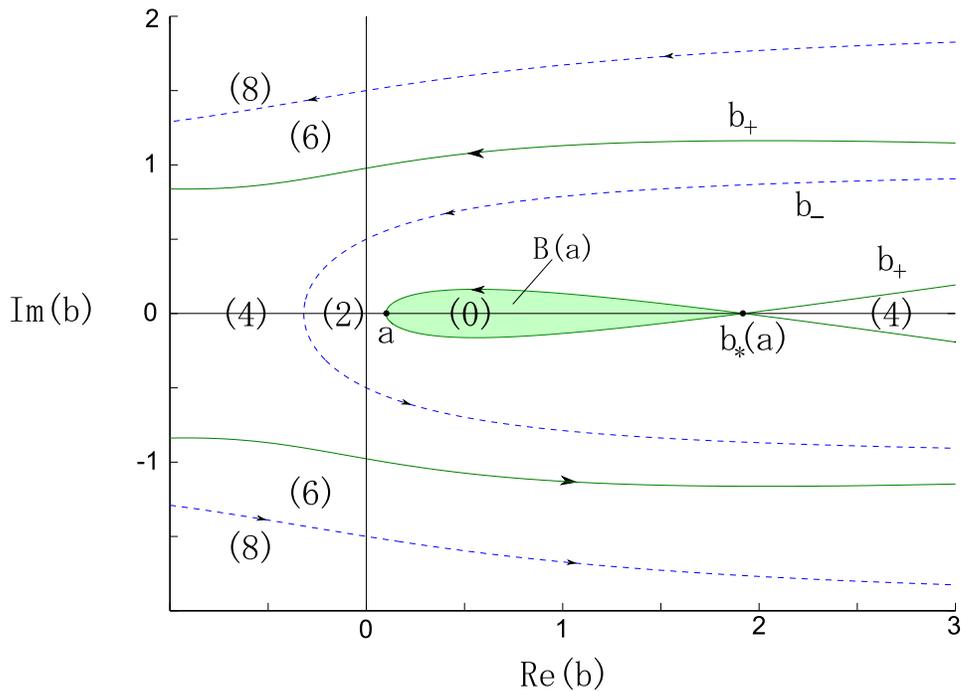


Abbildung 11: Die Stabilitätsregion $B(a)$ ist grün hervorgehoben. Sie ist das Gebiet komplexer Parameter b , für die bei $(\mu, \tau(\mu)) = (2a, \pi)$ keine Eigenwerte der Linearisierung in $z = 0$ mit positivem Realteil existieren. Die jeweilige Anzahl ist in runden Klammern angedeutet. $a = 0, 1$.

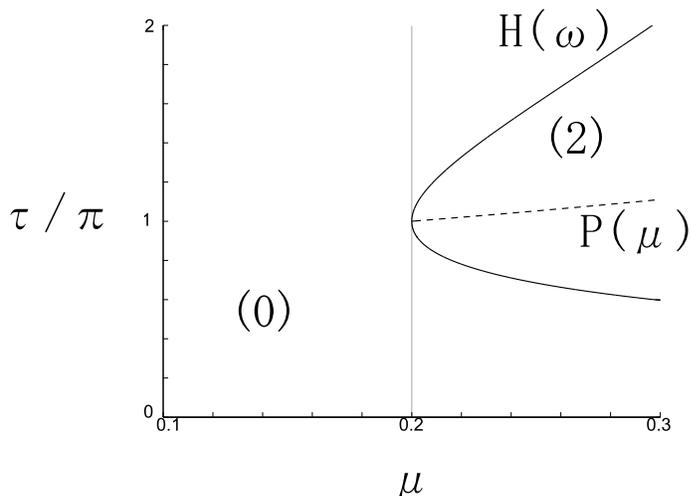


Abbildung 12: Illustration der Situation von Theorem 7 (superkritische Verzweigung). Die Anzahl der instabilen Eigenwerte im Ursprung $z = 0$ ist in runden Klammern angedeutet. Die durchgezogene Kurve beschreibt die Kurve $H(\omega)$ der Hopf-Verzweigungen von Eigenwerten $\lambda = \pm i\omega$ für Parameter (μ, τ) und trennt stabile und instabile Region. Die gestrichelt gezeichnete Kurve zeigt den Einsatz der nicht-invasiven Verzögerungszeit $\tau = P(\mu)$ ab dem Verzweigungspunkt, sie wird auch als Pyragas-Kurve bezeichnet. Mit einem geeigneten $b \in B(a)$ wurde der Ursprung stabilisiert und die Pyragas-Kurve im instabilen Bereich impliziert, dass er für $\mu > 2a$ und angeschalteter Kontrolle seine Stabilität in der superkritischen Hopf-Verzweigung an die periodischen Orbits übergibt. $a = 0, 1, b = 1$.

6 Erweiterter Linearer Ansatz

Wir verallgemeinern in diesem Kapitel den Kontrollansatz (5.3) und werden zwei neue Sätze zur Stabilisierung der periodischen Gegen-Phase-Orbits in z_- beweisen, die für beliebige Kopplungskonstanten $a \in \mathbb{R}_+$ gültig sind. Dazu stellen wir in Abschnitt 6.1 zunächst für das allgemeine System Bedingungen auf, um eine nicht-invasive Kontrolle zu garantieren und entkoppelte charakteristische Gleichungen zu erhalten. Die unterm Strich gewonnenen Freiheitsgrade nutzen wir in Abschnitt 6.2 zur Vergrößerung des Stabilitätsbereichs $B \subseteq \mathbb{C}$. Die Abschnitte 6.3 bzw. 6.4 geben in der Folge eine Verbesserung der Theoreme 7 und 8, weil vor allem auf die Einschränkung $0 < a < \frac{1}{\pi}$ verzichtet werden kann.

6.1 Nicht-invasive Möglichkeiten

Mit den beschriebenen Ideen aus [9] lässt sich ein allgemeinerer Ansatz für die Stabilisierung der gegenphasigen Schwingungen fassen. Dazu erlauben wir für das Feedback in dem System der gekoppelten Oszillatoren zunächst eine reelle Linearkombination der Signale $z_1(t)$, $z_1(t-\tau)$, $z_2(t)$, $z_2(t-\tau)$ in beiden Gleichungen, was auf das System

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z_1) + a(z_2 - z_1) \\ f(z_2) + a(z_1 - z_2) \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1(t-\tau) \\ z_2 \\ z_2(t-\tau) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

mit $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \in M(2, 4, \mathbb{R})$ führt. Um die bekannten Ideen für die Stabilisierung der Gegen-Phase-Schwingungen anwenden zu können, ergeben sich Bedingungen an die Einträge c_{ij} . Zum einen soll in den Koordinaten z_{\pm} die Linearisierung entkoppeln, wodurch folgende vier Gleichungen gelten müssen:

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{21} &= c_{13} + c_{23} &=: s_1 \\ c_{12} + c_{22} &= c_{14} + c_{24} &=: s_2 \\ c_{11} - c_{21} &= -(c_{13} - c_{23}) &=: d \\ c_{12} - c_{22} &= -(c_{14} - c_{24}) &=: d_2 \end{aligned}$$

Außerdem muss die Steuerung in $\dot{z}_- = f(z_-) - 2az_- + b(dz_- + d_2z_-(\tau))$ verschwinden, was $d_2 = \pm d$ erzwingt. Dabei erlaubt „+“ eine nicht-invasive Wahl der Verzögerungszeit

$$\tau_n = \frac{T_-}{2} + nT_- \quad (6.2)$$

bei natürlichem n , „-“ hingegen

$$\tau_n = nT_-.$$

Für diese ganzzahligen und halbzahligen Möglichkeiten sind nun jeweils folgende Matrizen von Interesse:

$$C_{T/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_1 + d & s_2 + d & s_1 - d & s_2 - d \\ s_1 - d & s_2 - d & s_1 + d & s_2 + d \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$C_T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_1 + d & s_2 - d & s_1 - d & s_2 + d \\ s_1 - d & s_2 + d & s_1 + d & s_2 - d \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Für jede Wahl von s_1 , s_2 und d bilden $C_{T/2}$ und C_T mit geeigneter Wahl des Delays τ nicht-invasive Kontrollen und ermöglichen eine weitere Untersuchung von zwei unabhängigen charakteristischen Gleichungen wie zuvor in [9]. Dabei werden sich weitere Einschränkungen an die Parameter aufbauen, um zunächst die Stabilisierung des Verzweigungspunktes und letztendlich der periodischen Orbits in z_- zu erreichen.

6.2 Stabilisierung des Verzweigungspunktes

Die Linearisierung von (6.1) in den Koordinaten z_{\pm} im Ursprung ergibt

$$\begin{aligned} \dot{z}_+ &= (\mu + i)z_+ + b(s_1z_+ + s_2z_+(t - \tau)) \\ \dot{z}_- &= (\mu - 2a + i)z_- + b \cdot d(z_- \pm z_-(t - \tau)) \end{aligned} \quad (6.5)$$

und damit sind die beiden charakteristischen Gleichungen

$$\chi_+(\lambda, b, \mu, \tau) = \mu + i + b(s_1 + s_2e^{-\tau\lambda}) - \lambda \quad (6.6a)$$

$$\chi_-(\lambda, b, \mu, \tau) = \mu - 2a + i + b \cdot d(1 \pm e^{-\tau\lambda}) - \lambda. \quad (6.6b)$$

Im Verzweigungspunkt $\mu = 2a$ mit der Wahl von $\tau = \tau_n$ lassen sich die Gleichungen $\chi_{\pm} = 0$ unabhängig voneinander nach b auflösen und ergeben zwei Funktionen $b_+(\lambda)$ und $b_-(\lambda)$.

Zählen wir in Abhängigkeit von b durch $E(b)$ die Lösungen λ von (6.6a) und (6.6b) mit positivem Realteil (in reeller Dimension), ist die Beobachtung wichtig, dass $E(0) = 2$ gilt; χ_+ steuert den Eigenwert $\lambda_+ = 2a + i$ bei und in χ_- existiert nur der Hopf-Eigenwert $\lambda_- = i^3$. Unser Ziel ist, eine Region $B \subseteq \mathbb{C}$ mit $E(b) = 0$ zu finden. $E(b)$ kann sich aus Gründen der Stetigkeit aber nur ändern, wenn ein Eigenwert λ als Lösung von $\chi_{\pm} = 0$ die imaginäre Achse kreuzt.

Es sind also die kritischen Eigenwerte $\lambda \in i\mathbb{R} = \{i(1 + 2\omega) \in \mathbb{C} \mid \omega \in \mathbb{R}\}$ genauer zu untersuchen. $\lambda = (1 + 2\omega)i$ führt auf die Kurven

$$b_+(\omega) = \frac{2\omega i - 2a}{s_1 + s_2 e^{-\tau_n(1+2\omega)i}} \quad (6.7a)$$

$$b_-(\omega) = \frac{\omega}{d}(\cot(\tau_n\omega) + i), \quad (6.7b)$$

weil die Wahl von τ_n das Vorzeichen \pm in (6.6b) wieder ausgleicht. (Siehe zum Beispiel Abbildungen (11) und (14).) Da die komplex differenzierbaren Funktionen $b_{\pm}(\lambda)$ die reelle Orientierung erhalten, bewirkt eine Überquerung der Kurve $b_{\pm}(\omega)$ von ihrer linken auf die rechte Seite eine Erhöhung von $E(b)$. (Die Kurven sind „verformte“ imaginäre Achsen.) Da die Punkte $b_{\pm}(0)$ für $\lambda = i\omega = 0$ endlich viele Ausnahmen bilden, ändert sich $E(b)$ an jeder Kurve durch Hopfeigenwerte $i\omega \neq 0$ um 2.

Für die Untersuchung der Kurven b_+ und b_- kann ohne Einschränkung $d = -1$ gesetzt werden; denn an der Lage der Kurven zueinander ändert sich qualitativ nichts für alle Tripel $\alpha \cdot (d, s_1, s_2)$ mit reellem $\alpha \neq 0$. Spezifizieren wir weiter $\tau_n = \frac{T_-}{2} = \tau_0 = \pi$, also $n = 0$ (siehe (6.2) und (6.3)), ist die in Abbildung (13) separat dargestellte Kurve

$$b_-(\omega) = -\omega(\cot(\tau_n\omega) + i) \quad (6.8a)$$

identisch mit der in Abbildung (11) eingezeichneten b_- -Kurve aus [9]. Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ bleibt der (in Abb. (13) markierte) Bereich mit $E(b) = 2$ qualitativ erhalten und wird nunmehr von $b_-(\omega)$ für die Werte $\omega \in (-\frac{\pi}{\tau_n}, \frac{\pi}{\tau_n})$ umschlossen. Damit ist der Einfluss von s_1 und s_2 auf b_+ bei der Suche nach Stabilitätsbereichen zu studieren. Ein einfacher Spezialfall für b_+ wird durch $s_1 = -2, s_2 = 0$ erreicht:

$$b_+(\omega) = a + i(-\omega). \quad (6.8b)$$

³Einem komplexen Eigenwert von $\chi_{\pm} = 0$ entsprechen zwei konjugiert komplexe des ursprünglichen Systems (6.5). Durch den Exponentialansatz $z(t) = e^{\lambda t}$ bzw. $z(t) = e^{\lambda^* t}$ gehen auf dem Weg zu χ_{\pm} die konjugierten „verloren“.

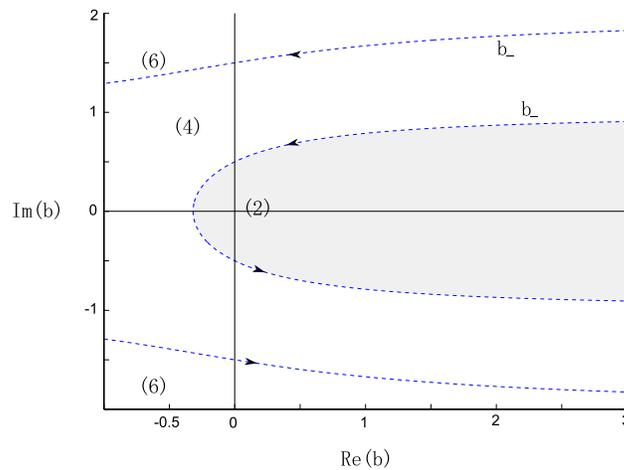


Abbildung 13: Der Punkt $b = 0$, in dem die Kontrolle verschwindet, ist instabil. (siehe auch (10)) Die Kurve $b_-(\omega)$ trennt zunächst Gebiete mit jeweils konstantem $E(b)$, diese Anzahl von Eigenwerten mit positivem Realteil ist in Klammern angedeutet. Das grau markierte Innere von b_- lässt einen Stabilitätsbereich mit $E(b) = 0$ zu, wenn die zu untersuchende b_+ -Kurve durch s_1 und s_2 geeignet gewählt wird. $n = 0$.

Diese Senkrechte verläuft von oben nach unten und ergibt einen Stabilitätsbereich $B \subseteq \mathbb{C}$ zu ihrer Linken. (siehe Abbildung (14))

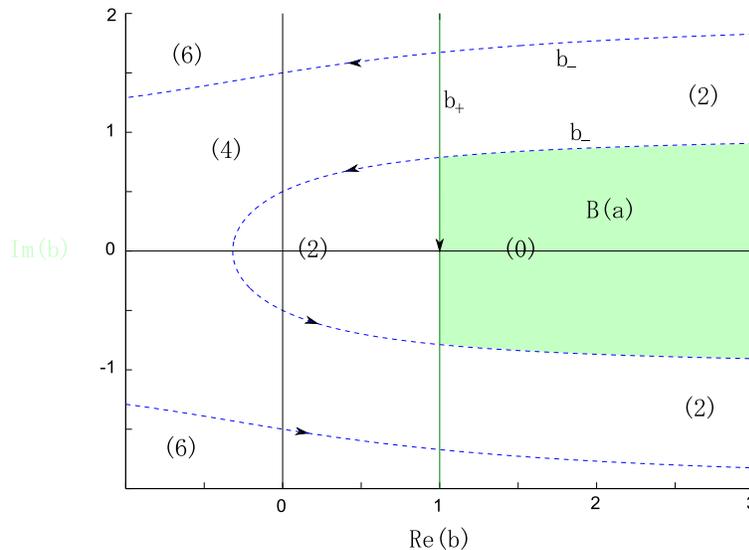


Abbildung 14: Die Stabilitätsregion $B(a)$ ist grün hervorgehoben. Sie wird von den Kurven $b_-(\omega)$ und $b_+(\omega)$ so umschlossen, dass für alle $b \in B(a)$ kein instabiler Eigenwert der Linearisierung in $z = 0$ existiert. Die Anzahlen dieser Eigenwerte sind in runden Klammern angedeutet. Die Darstellung bezieht sich auf den Verzweigungspunkt $(\mu, \tau(\mu)) = (2a, \tau_n(2a))$. $a = 1$, $n = 0$.

Das gefundene Gebiet stellt eine echte Vergrößerung von $B(a)$ aus Fiedler et al. [9] dar und wird in den folgenden Abschnitten verbesserte Möglichkeiten der Stabilisierung ergeben. Wir verzichten deshalb auf eine genauere Analyse der b_+ -Kurven und kommen darauf in der Diskussion zurück.

6.3 Superkritische Verzweigung

In [9] war die Stabilisierung des Verzweigungspunktes für die Stabilität der entstehenden periodischen Orbits in z_- nach $\mu = 2a$ bereits ausreichend, und so ist es auch hier der Fall.

Satz 2. *Betrachte das System (5.1) und sei $a \in \mathbb{R}_+$. Die instabilen periodischen Orbits der superkritischen Hopf-Verzweigung für $\operatorname{Re} \gamma < 0$ in Z_- in der Nähe vom Verzweigungspunkt $\mu = 2a$ werden durch Hinzufügen der nicht-invasiven Kontrolle $C_{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\tau = \tau_n(\mu) = \frac{T_-(\mu)}{2} + n \cdot T_-(\mu)$ und reellem $b > a$ (gemäß (6.1)) für alle $n \in \mathbb{N}$ stabilisiert.*

Beweis. Die Kontrollmatrix ergibt sich durch Wahl von $(s_1, s_2, d) = (-2, 0, -1)$. Nach Abschnitt 6.1 bleiben die zu stabilisierenden Orbits des Systems (5.1) mit dieser Kontrollmatrix und $\tau_n = \frac{T_-}{2} + nT_-$ erhalten. Abschnitt 6.2 klärt dann für diese Parameter die Stabilisierung des Ursprungs $z_+ = z_- = 0$ für $\mu < 2a$ und $b \in B$, speziell $b > a$. Das folgende Argument, das die Übergabe der Stabilität des Ursprungs an die periodischen Orbits beweist, gleicht dem aus [9] für $n = 0$ und wird hier noch einmal entwickelt. Es gibt keine kritischen Stellen im Beweis, an denen ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ Probleme bereitet.

In den charakteristischen Gleichungen (6.6a) und (6.6b) bleibt mit der getroffenen, festen Wahl von $b > a$ im Verzweigungspunkt $\mu = 2a$, $\tau(\mu) = \frac{T_-(2a)}{2} + nT_-(2a) = \pi + n \cdot 2\pi$ von den kritischen Eigenwerten λ_{\pm} mit $\operatorname{Re} \lambda_{\pm} \geq 0$ nur noch der Hopfeigenwert $\lambda = i$ als Lösung von

$$\chi_-(\lambda, b, \mu, \tau_n) = \mu - 2a + i - b(1 + e^{-\tau_n \lambda}) - \lambda = 0 \quad (6.9)$$

Eine Auflösung dieser Gleichung nach μ und τ_n der Form $(\mu, \tau_n) = (\mu(\lambda), \tau_n(\lambda))$ ist explizit (global) nicht möglich, allerdings garantiert der Satz über implizite Funktionen lokal eine solche um die Lösung $(\lambda, b, \mu, \tau_n) = (i, b, 2a, \pi + n \cdot 2\pi)$ von (6.9). Denn $D_{\mu, \tau} \chi_-(i, b, 2a, \tau_n) = (1, -ib) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ oder, aufgefasst als lineare Abbildung nach

\mathbb{R}^2 , $D_{\mu,\tau}\chi_{-}(i, b, 2a, \tau_n) = \begin{pmatrix} 1 & Im\,b \\ 0 & -Re\,b \end{pmatrix} =: A$ ist invertierbar mit $\det(A) = -Re\,b \neq 0$.

Die entsprechende bijektive Funktion auf einer Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von i sei $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto h(\lambda) = (\mu(\lambda), \tau_n(\lambda))^T$, speziell $h(i) = (\mu(i), \tau_n(i))^T = (2a, \pi + n \cdot 2\pi)^T$. Die Ableitung von h an der Stelle i ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Dh(i) &= -(D_{\mu,\tau}\chi_{-}(i, b, 2a, \tau_n))^{-1} \cdot D_{\lambda}\chi_{-}(i, b, 2a, \tau_n) \\ &= \frac{1}{Re\,b} \begin{pmatrix} -Re\,b & -Im\,b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\tau_n Re\,b - 1 & \tau_n Im\,b \\ -\tau_n Im\,b & -\tau_n Re\,b - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Re\,b} \begin{pmatrix} \tau_n |b|^2 + Re\,b & Im\,b \\ -\tau_n Im\,b & -\tau_n Re\,b - 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{Im\,b=0}{=} \begin{pmatrix} \tau_n Re\,b + 1 & 0 \\ 0 & -\tau_n - \frac{1}{Re\,b} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Zu betrachten sind wie sonst die Eigenwerte $\lambda \in i\mathbb{R}$ und mithilfe der Einschränkung $H = h|_{i\mathbb{R}} : U \cap i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\omega \mapsto H(\omega) := h(i\omega)$ ergibt sich in der $\mu - \tau$ -Ebene die Kurve der Hopfverzweigungen (Hopf-Kurve) als Graph von H in der Nähe von $(\mu, \tau) = (2a, \tau_n) = (2a, \pi + n \cdot 2\pi)$. Die Tangente für $\omega = 1$ am Punkt $(2a, \tau_n)$ ist ebenfalls durch den zitierten Satz gegeben als $H'(1) = Dh(i) \cdot (0, 1)^T = (0, -\tau_n - \frac{1}{Re\,b})^T$ (siehe Abbildung (15)). Wir berechnen die Orientierung der Hopf-Kurve $H(\omega)$ über die erweiterte Funktion $h(\lambda)$ und $\det(Dh(i)) = -\frac{1}{Re\,b} \cdot |-\tau_n b - 1|^2 < 0$. Daraus folgt, dass h die Orientierung umkehrt und sich, nicht wie sonst rechts, sondern links der Hopf-Kurve der instabile Parameterbereich für den Ursprung befindet (Siehe Abbildung (15)): Vom Punkt $(2a, \tau_n)$ aus führt jeder Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^2$ in den instabilen Bereich, für den $\det(H'(1), v) > 0$ gilt.

Betrachten wir nun die in der nicht-invasiven Kontrolle tatsächlich realisierte Zeitverzögerung $\tau = \tau_n(\mu) = T_{-}(\mu) \cdot (\frac{1}{2} + n) = \frac{2\pi}{1 - (\mu - 2a)\frac{Im\,\gamma}{Re\,\gamma}} \cdot (\frac{1}{2} + n)$, kann sie ebenfalls als Kurve $P(\mu) = (\mu, \tau_n(\mu))^T$ (Pyragas-Kurve) in der $\mu - \tau$ -Ebene aufgefasst werden. (Siehe Abbildung (15)) Es gilt einerseits natürlich $P(2a) = (2a, \pi + n \cdot 2\pi)^T = H(1) = h(i)$ und andererseits hat die Pyragas-Kurve die Tangente $P'(2a) = (1, \tau'_n(\mu))^T = (1, \tau_n \frac{Im\,\gamma}{Re\,\gamma})^T =: v$. (Siehe Abbildung (15)) Wegen

$$\det(H'(1), v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\tau_n - \frac{1}{Re\,b} & \tau_n \frac{Im\,\gamma}{Re\,\gamma} \end{vmatrix} = \tau_n + \frac{1}{Re\,b} > 0$$

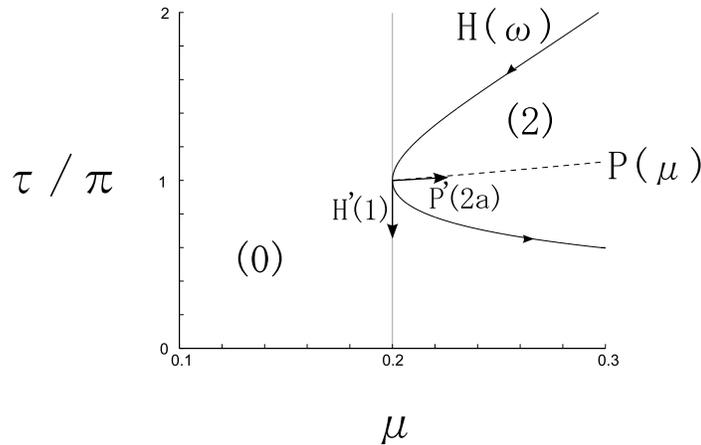


Abbildung 15: Identisch zu Abbildung (12) für $n = 1$! Die Hopf-Kurve $H(\omega)$ trennt stabilen und instabilen Bereich für Paare (μ, τ) in der Nähe vom Verzweigungspunkt $(2a, \tau_n)$ bei fest gewähltem $b \in B(a)$. Damit die periodischen Orbits der superkritischen Verzweigung stabil sind, muss der Ursprung instabil sein, die Pyragas-Kurve $P(\mu)$ der angewendeten Kontrolle also in den instabilen Bereich hineinverlaufen. Das lokale Argument dafür nutzt die Tangenten $H'(1)$ und $P'(2a)$, die hier nur qualitativ wiedergegeben werden. $a = 0.1$, $b = 1$, $n = 0$, $\text{Re } \gamma = -1$, $\text{Im } \gamma = -1$

resultiert für $\mu > 2a$ ein instabiler Ursprung $z_- = z_+ = 0$, der für $\mu < 2a$ aber stabil ist und seine Stabilität am Verzweigungspunkt $\mu = 2a$ der natürlichen superkritischen Verzweigung entsprechend an die für $\mu > 2a$ existierenden periodischen Orbits übergibt. \square

6.4 Subkritische Verzweigung

Auch im subkritischen Fall ist eine Stabilisierung möglich, jedoch reicht ein reelles $b \in B$ nicht mehr aus.

Satz 3. Betrachte das System (5.1) und sei $a \in \mathbb{R}_+$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine stetige, streng monoton steigende Funktion $\zeta_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit Grenzwerten $\zeta_n(0) = \frac{2}{\pi}$ und $\lim_{a \rightarrow \infty} \zeta_n(a) = \infty$, sodass für alle Paare (a, γ) , die die Bedingung

$$|\text{Im } \gamma| > \zeta_n(a) \cdot \text{Re } \gamma \quad (6.11)$$

erfüllen, folgendes gilt: Die instabilen periodischen Orbits der subkritischen Hopf-Verzweigung für $\text{Re } \gamma > 0$ in Z_- bei $\mu = 2a$ werden durch Hinzufügen der nicht-

invasiven Kontrolle $C_{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\tau = \tau_n(\mu) = \frac{T_-(\mu)}{2} + n \cdot T_-(\mu)$

und b aus einem offenen Gebiet $G \subseteq B \setminus \mathbb{R}$ (gemäß (6.1)) stabilisiert.

Beweis. Die Beweise für die Nicht-Invasivität und die Stabilisierung des Ursprungs im subkritischen Fall für $\mu > 2a$ sind identisch zum superkritischen Fall und wurden in den Abschnitten 6.1 und 6.2 geliefert. Das Argument aus dem letzten Kapitel lässt sich auch bis auf einen kleinen, aber wesentlichen Unterschied wiederholen: In der subkritischen Verzweigung entstehen die periodischen Orbits für fallendes μ und dieser Richtungsänderung kann in der Tangente der Pyragas-Kurve durch $v := -P'(2a)$ Rechnung getragen werden.

Dann ist $H'(1) = Dh(i) \cdot (0, 1)^T = \frac{1}{Re b}(Im b, -\tau_n Re b - 1)$ (siehe (6.10) ohne $Im b = 0$), $v = -(1, \tau_n \frac{Im \gamma}{Re \gamma})^T$ und damit wird

$$\begin{aligned} \det(H'(1), -P'(2a)) &= -\frac{1}{Re b} \begin{vmatrix} Im b & 1 \\ -\tau_n Re b - 1 & \tau_n \frac{Im \gamma}{Re \gamma} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\tau_n}{Re b} (Im b \frac{Im \gamma}{Re \gamma} + Re b + \frac{1}{\tau_n}) > 0 \end{aligned}$$

genau dann erfüllt, wenn $Re b + \frac{1}{\tau_n} < -Im b \frac{Im \gamma}{Re \gamma}$ gilt. Abhängig von $Im \gamma$ ist b für eine Realisierung dieser Ungleichung und eine erfolgreiche Kontrolle (wegen $Re b > a > 0$) so zu wählen, dass $Im b \cdot Im \gamma < 0$ gegeben ist. Da der Bereich B (siehe Abb. (14)) symmetrisch zur reellen Achse ist, ist dies in beiden Fällen $Im \gamma \geq 0$ gleichermaßen möglich und wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $Im \gamma < 0$ (und $Im b > 0$). Die Ungleichung

$$\frac{Re b + \frac{1}{\tau_n}}{Im b} < -\frac{Im \gamma}{Re \gamma} \quad (6.12)$$

wäre für die größte Menge von Parametern γ erfüllt, wenn das Infimum

$$\zeta_n(a) := \inf_{b \in B(a) \cap \{Im b > 0\}} \frac{Re b + \frac{1}{\tau_n}}{Im b} = 1 / \sup_{b \in B(a) \cap \{Im b > 0\}} \frac{Im b}{Re b + \frac{1}{\tau_n}}$$

angenommen würde. $\frac{Im b}{Re b + \frac{1}{\tau_n}}$ ist die Steigung der Geraden durch die Punkte $-\frac{1}{\tau_n}$ und b (siehe Abb. (16)) der komplexen Ebene und wird auf \bar{B} maximal für $b = (Re b, Im b) = (a, -\tilde{\omega})$, wobei $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_n(a)$ die eindeutige Lösung von

$$-\tilde{\omega} \cdot \cot(\tau_n \tilde{\omega}) = a \quad (6.13)$$

im Intervall $[-\pi \frac{1}{\tau_n}, -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau_n}]$ ist (siehe (6.8a)). $\zeta_n(a) = \frac{a + \frac{1}{\tau_n}}{-\tilde{\omega}(a)}$ ist nicht nur stetig in

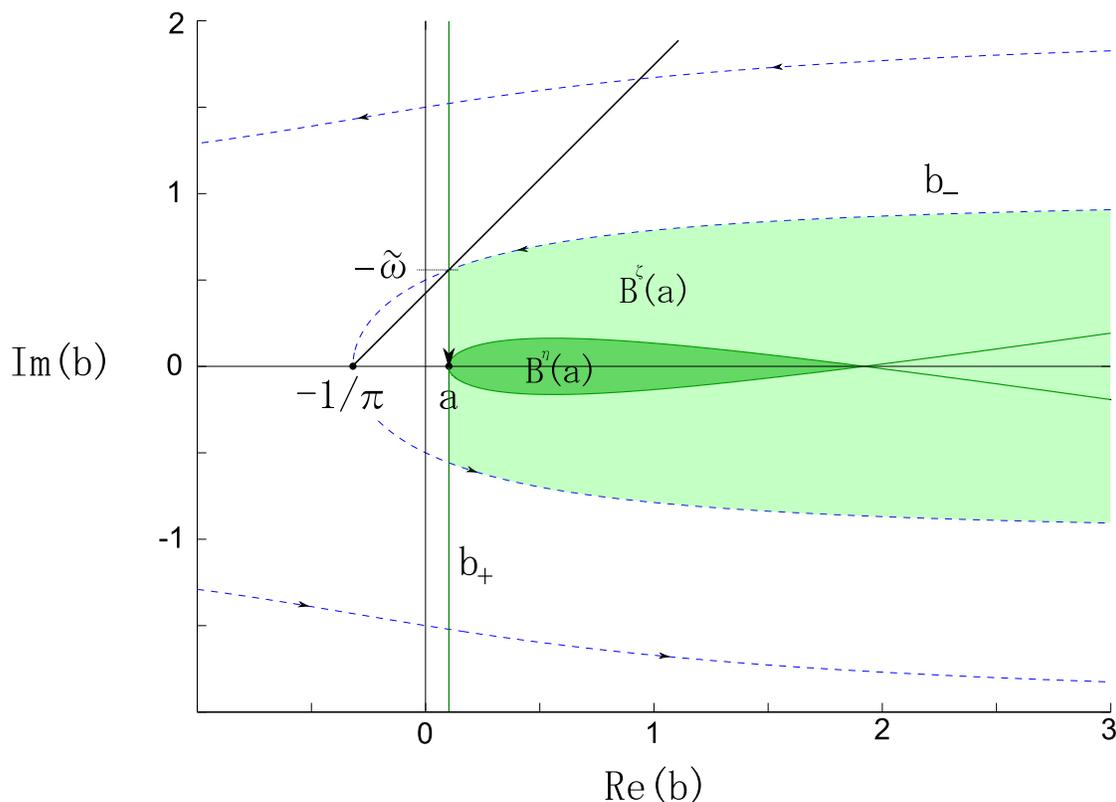


Abbildung 16: Der schwarz gezeichnete Strahl führt durch die Punkte $(-\frac{1}{\pi}, 0)$ und $(a, -\tilde{\omega}(a))$ und berührt das Gebiet $B(a) = B^\zeta(a)$ aus Satz 3 im zweiten. Seine Steigung $1/\zeta_n(a)$ ist das Supremum aller Steigungen von Strahlen, die durch $B(a)$ verlaufen. Außerdem zeigen die grün markierten Bereiche die echte Vergrößerung $B^n(a) \subset B^\zeta(a)$ an. $a = 0.1$, $n = 0$.

a , weil $\tilde{\omega}$ stetig von a abhängt, sondern auch differenzierbar; es kann aus (6.13) implizit $\tilde{\omega}'(a) = -1/(\cot(\tau_n \tilde{\omega}) - \tau_n \tilde{\omega}(1 + \cot^2(\tau_n \tilde{\omega})))$ berechnet werden. Für die strenge Monotonie von $\zeta_n(a)$ ist dann $\zeta_n'(a) > 0$, d.h. $-\tilde{\omega}(a) + (a + \frac{1}{\tau_n})\tilde{\omega}'(a) > 0$, zu zeigen. Da der Nenner von $\tilde{\omega}'(a)$ positiv ist, kann die Ungleichung mithilfe von (6.13) und $1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2}$ zurückgeführt werden auf $|\sin(\tau_n \tilde{\omega})| < |\tau_n \tilde{\omega}|$. Das eingeführte $\zeta_n(a) = \frac{a + \frac{1}{\tau_n}}{-\tilde{\omega}(a)}$ ist also stetig und streng monoton steigend und führt mit der Ungleichung (6.12) auf die einschränkende Bedingung (6.11). Ist sie erfüllt, so gibt es $\epsilon > 0$ mit $\zeta_n(a) + \epsilon = \frac{|\operatorname{Im} \gamma|}{\operatorname{Re} \gamma}$ und das Gebiet $G \subseteq B \setminus \mathbb{R}$ definiert sich durch $G = \{b \in B \mid \frac{\operatorname{Re} b + \frac{1}{\pi}}{\operatorname{Im} b} - \zeta_n(a) < \epsilon\}$. \square

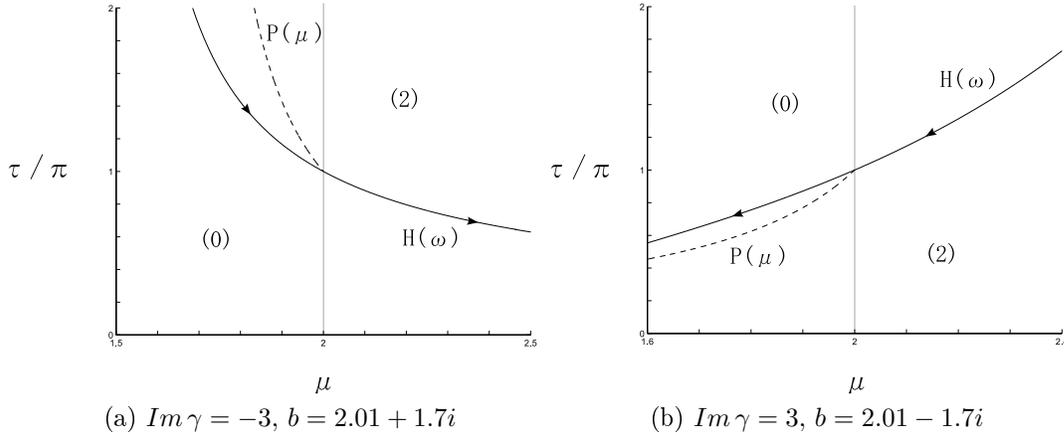


Abbildung 17: Wie im superkritischen Fall erreichen wir Stabilisierung der periodischen Orbits durch die richtige Lage der Pyragas-Kurve $P(\mu)$ (vgl. Abb. (15)). Die Tangentsituation Bedarf aufgrund des unterschiedlichen Verlaufs der Hopf-Kurve $H(\omega)$ für $Im \gamma \geq 0$ einer Fallunterscheidung. $a = 1, Re \gamma = 1$

Bezeichnen wir mit $B^\eta(a)$ den Bereich zulässiger Kontrollen in Theorem 8 und mit $B^\zeta(a)$ den aus Satz 3, dann bedeutet die echte Vergrößerung von B^η zu B^{ζ_0} bei $\tau_0 = \frac{T_-}{2}$ die Beziehung $B^\eta \subset B^{\zeta_0}$ (siehe Abb. (16)). Da die Funktion $\eta(a)$ in [9] als Vorbild für $\zeta_n(a)$ ebenso (für $Im \gamma < 0$) durch $\eta(a) := 1/\sup_{b \in B^\eta(a) \cap \{Im b > 0\}} \frac{Im b}{Re b + \frac{1}{\pi}}$ definiert ist, ergibt sich daraus der Vergleich

$$\eta(a) > \zeta_0(a).$$

Der allgemeine Ansatz bietet also auch im subkritischen Fall eine echte Verbesserung der einschränkenden Bedingung (6.11) für $\tau_0 = T_-/2$.

7 Symmetrien

Die Kontrolle (5.3) in Fiedler et al. [9] ist nicht-invasiv auf den periodischen Gegen-Phase-Orbits in Z_- , weil eine Symmetrie der z_- -Lösungen für halbzahlige Delays ausgenutzt wird. Die allgemeine Kontrolle aus Kapitel 6 wurde zunächst aus geometrischer Sicht (b_{\pm} -Kurven, vgl. (6.7a), (6.7b), Abb. (14)) auf ein größeres Gebiet zulässiger Kontrollparameter $b \in B$ untersucht und es wurden geeignete Parameter s_1 und s_2 für die Kontrolle (6.3) gefunden. Auch die getroffene Wahl dieser freien Parameter s_1 und s_2 lässt sich vom Standpunkt der Symmetrien der periodischen Bewegungen betrachten. Wir vergleichen den allgemeinen Ansatz (6.1) auf dieser Ebene nochmals mit dem Ansatz (5.3) aus Fiedler et al. [9] und grenzen gleichzeitig gegen andere Symmetrien ab, die sich in (6.1) nicht mit einer festen Verzögerungszeit τ vereinen lassen.

7.1 Vergleich

Der lineare Ansatz (5.3) aus [9] findet sich im erweiterten wieder, indem die Parameter auf $s_1 = -1$, $s_2 = 1$ und $d = -1$ gesetzt werden. Die Kontrolle in (5.3) ist aufgrund der Symmetrie

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_2\left(t - \frac{T_-}{2}\right) \\ z_2(t) &= z_1\left(t - \frac{T_-}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.1)$$

nicht-invasiv auf den periodischen Orbits in Z_- (siehe Abschnitt 5.1). Beachtet man außerdem

$$\begin{aligned} z_1(t) &= -z_1\left(t - \frac{T_-}{2}\right) \\ z_2(t) &= -z_2\left(t - \frac{T_-}{2}\right), \end{aligned} \quad (7.2)$$

so entspricht der nicht-invasive Ansatz

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + b\left[(z_2(\tau) - z_1) - \frac{1}{2}(z_1(\tau) + z_1 + z_2(\tau) + z_2)\right] \\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b\left[(z_1(\tau) - z_2) - \frac{1}{2}(z_1(\tau) + z_1 + z_2(\tau) + z_2)\right] \end{aligned} \quad (7.3)$$

genau den Parametern $s_1 = -2$, $s_2 = 0$, $d = -1$ aus Kapitel 6. Er ermöglicht eine Stabilisierung der instabilen periodischen Orbits für alle $a \in \mathbb{R}_+$ (siehe Abschnitte 6.3 und 6.4).

Die einfache Symmetrie

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(t - T_-) \\ z_2(t) &= z_2(t - T_-) \end{aligned} \quad (7.4)$$

kann ausgenutzt werden, um durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + b(z_1(t - \tau) - z_1) \\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b(z_2(t - \tau) - z_2) \end{aligned} \quad (7.5)$$

die synchronen Lösungen der subkritischen Verzweigung in Z_+ zu stabilisieren (siehe Fiedler et al. [9]), weil sich $\dot{z}_+ = f(z_+) + b(z_+(t - \tau) - z_+)$ ergibt (siehe (4.4)). Trotzdem letztere Kontrolle auch für Z_- geeignet wäre, gehört sie zur Klasse der Kontrollen mit $\tau_n = nT_-$ und lässt sich bei einer festen Verzögerungszeit nicht mit (7.1) und (7.2) bzw. $\tau_n = \frac{T_-}{2} + nT_-$ zusammen einsetzen. Im Gegensatz zu (7.1) scheitert (7.4) auch bereits bei der Stabilisierung des Verzweigungspunktes $\mu = 2a$ (Beweis siehe Anhang).

7.2 Linearer Ansatz $C_{\frac{T}{2}}$ und erzeugende Symmetrien

Mit den Symmetrie-Überlegungen lässt sich der Aufbau der Kontrollmatrix

$$C_{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_1 + d & s_2 + d & s_1 - d & s_2 - d \\ s_1 - d & s_2 - d & s_1 + d & s_2 + d \end{pmatrix}$$

auf eine sinnvollere Basis stellen. Die Matrizen diesen Formats bilden wegen der drei freien Parameter s_1 , s_2 und d einen dreidimensionalen linearen Unterraum der reellen 2×4 -Matrizen. Eine Basis dieses Unterraums wird durch die Symmetrien (7.1) und (7.2) gegeben. Dabei steuert die erste Symmetrie die Basis-Kontrollmatrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bei und die zweite die beiden Matrizen

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Ansatz (7.3) ist die Kontrolle die lineare Kombination $M_1 - \frac{1}{2}M_2 - \frac{1}{2}M_3$ der drei Basismatrizen. Im Allgemeinen lässt sich $C_{T/2}$ schreiben als

$$C_{T/2} = \frac{1}{2}(s_2 - s_1) \cdot M_1 + \frac{1}{2}(s_2 + d) \cdot M_2 + \frac{1}{2}(s_1 - d) \cdot M_3$$

und in Abschnitt 6.2 wurde klar, dass bis auf eine Skalierung des Stabilitätsbereichs im zweidimensionalen affinen Unterraum mit $d = -1$ nach geeigneten Kontrollen

$$\begin{aligned} C_{T/2} &= \frac{1}{2}(s_2 - s_1) \cdot M_1 + \frac{1}{2}s_2 \cdot M_2 + \frac{1}{2}s_1 \cdot M_3 + \frac{1}{2}(M_3 - M_2) \\ &= \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 \end{aligned}$$

gesucht wird. Die Koordinaten $(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}(s_2 - s_1, s_2 - 1, s_1 + 1)$ geben den Einfluss der jeweiligen Symmetrie bzw. Basis-Kontrollmatrix an.

Auf der Grundlage dieser Betrachtungsweise des linearen Kontrollansatzes (6.1) lassen sich die unterschiedlichen Ergebnisse von Fiedler et al. [9] (Theoreme 7 und 8) und Kapitel 6 dieser Arbeit (Sätze 2 und 3) erklären. Die erfolgreiche Stabilisierung in [9] nutzt ausschließlich Symmetrie (7.1), damit also M_1 , und ist der eindimensionale Spezialfall $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$. Das Einbeziehen von Symmetrie (7.2) ergibt mehr Möglichkeiten eines nicht-invasiven Kontrollterms und in der Folge haben wir mit der Wahl von $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ die Beweise zur Stabilisierung der periodischen Gegen-Phase-Orbits auf eine größere Zahl von gekoppelten Hopf-Oszillatoren ausgeweitet.

8 Zusammenfassung

Im zweiten Teil dieser Bachelorarbeit wurde das System

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2)\end{aligned}$$

gekoppelter Hopf-Oszillatoren in Hopf-Normalform $f(z) = (\mu + i + \gamma|z|^2)z$ betrachtet und die Stabilisierung gewisser instabiler periodischer Orbits untersucht. Sie entstehen in einer Hopf-Verzweigung bei $\mu = 2a$ und sind durch einen Phasenunterschied π der Oszillatoren z_1 und z_2 gekennzeichnet. Die erfolgreiche Stabilisierung durch Fiedler et al. [9] für Kopplungskonstanten $0 < a < \frac{1}{\pi}$ bildete dabei die Grundlage für die Entwicklung eines linearen Kontrollansatzes

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z_1) + a(z_2 - z_1) \\ f(z_2) + a(z_1 - z_2) \end{pmatrix} + b \cdot C \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1(t - \tau) \\ z_2 \\ z_2(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad C \in \text{Mat}(2 \times 4, \mathbb{R}).$$

Es wird mit diesem für alle Kopplungskonstanten $a \in \mathbb{R}_+$ und der Wahl $\tau = \frac{T_-}{2} + n \cdot T_-$ als Verzögerungszeit ein unbeschränktes Gebiet $B \subseteq \mathbb{C}$ für Kontrollparameter $b \in \mathbb{C}$ erreicht. Wird im superkritischen Fall ein reelles $b > a$ gewählt und im subkritischen Fall ($b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) die Einschränkung $|\text{Im } \gamma| > \zeta_n(a) \cdot \text{Re } \gamma$ (6.11) an die Beschaffenheit des Hopf-Oszillators beachtet, können alle periodischen Gegen-Phase-Schwingungen in der Nähe von $\mu = 2a$ stabilisiert werden.

9 Diskussion

Im Vergleich zum Kontrollansatz aus Fiedler et al. [9] können wir uns von der Bedingung $0 < a < \frac{1}{\pi}$ an die Kopplungskonstante lösen und erreichen eine verbesserte Einschränkung im subkritischen Fall. Es sind außerdem nicht nur $\tau = \frac{T_-}{2}$, sondern alle Verzögerungszeiten $\tau = \frac{T_-}{2} + n \cdot T_-$ für eine erfolgreiche Stabilisierung geeignet. Es wurde dagegen nicht untersucht, inwiefern diese allgemeinen Verzögerungszeiten im ursprünglichen Ansatz aus Fiedler et al. [9] für eine Stabilisierung in Frage kommen, und der Vergleich beider Kontrollterme geschieht nur für $\tau = \frac{T_-}{2}$.

Kapitel 7 zeigt auf, dass mit dem unabhängigen Ausnutzen der Symmetrien (7.1) und (7.2) alle Kontrollmöglichkeiten durch Matrizen $C_{T/2}$ (siehe (6.3)) ausgeschöpft sind, wenn es keine Einschränkung an $|b|$ gibt. Dann ist unsere Wahl der Kontrolle bzw. der b_+ -Kurve (6.8b) insofern optimal, als immer ein geeigneter Kontrollparameter mit $|b| > a$ zur Verfügung steht. Trotzdem haben wir nicht alle b_+ -Alternativen (6.7a) im Detail studiert. Die Kontrollmatrizen C_T sind bis auf einen Spezialfall (7.5) nicht beachtet worden.

Es ist noch anzumerken, dass die Annahme entkoppelnder charakteristischer Gleichungen $\chi_{\pm} = 0$ bei der Herleitung der linearen, nicht-invasiven Kontrollen $C_{T/2}$ und C_T allein die analytische Behandlung vereinfacht. Wird ausschließlich auf die Nicht-Invasivität geachtet, steigt der Freiheitsgrad von hier drei, den Parametern s_1, s_2, d , auf dann sieben Variablen der c_{ij} .

10 Ausblick

Die verloren geglaubten instabilen periodischen Orbits mit ungerader Anzahl an Floquet-Multiplikatoren $|\rho_i| > 1$ stehen erst seit der Arbeit von Fiedler et al. von 2007 [8] wieder auf dem Plan der Stabilisierung durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle, wie sie Pyragas 1992 [27] einführte. Der zweite Teil der Bachelorarbeit soll auf dieser Grundlage und ausgehend von den Ergebnissen aus 2010 (vgl. Fiedler et al. [9]) einen Beitrag dazu leisten, die doch bestehenden Möglichkeiten der Stabilisierung zu erkennen. Isabelle Schneider verallgemeinert in ihrer Bachelorarbeit [28] den Kontrollansatz auf ein System von (drei) symmetrisch gekoppelten Oszillatoren (siehe auch [29]) und Matthias Bosewitz verwendet für das hier vorgestellte System in seiner Bachelorarbeit [5] einen Kontrollterm, der mehr Verzögerungszeiten zulässt und die bestehende Beschränkung in der subkritischen Verzweigung angeht. Letztere kann auch auf der Grundlage dieser Arbeit Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein. Aufbauend auf unserem linearen Ansatz können zum Beispiel die bisher nicht kompatiblen halb- und ganzzahligen Möglichkeiten der Zeitverzögerung miteinander kombiniert werden, indem mit zwei verschiedenen Delays gearbeitet wird. Oder wir lassen der Kontrollmatrix mehr Freiheiten und nutzen, nach Mehraufwand bei den charakteristischen Gleichungen, freie Parameter für zusätzliche Möglichkeiten der Stabilisierung.

Diese Bachelorarbeit demonstriert, wie in der Entwicklung wirkungsvoller Kontrollen für dynamische Systeme weitere Schritte gegangen werden können. Deren Anwendung in physikalischen und biologischen Systemen steht noch bevor und wird mit Interesse verfolgt werden. Dass zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle Gegenstand aktueller, fächerübergreifender Forschung ist, zeigt auch der 2011 eingerichtete Sonderforschungsbereich 910: "Kontrolle selbstorganisierender nichtlinearer Systeme: Theoretische Methoden und Anwendungskonzepte" der Deutschen Forschungsgemeinschaft, an dem die Freie Universität Berlin durch Prof. Dr. Bernold Fiedler in der Arbeitsgruppe A4: "Design selbstorganisierender räumlicher und zeitlicher Muster" beteiligt ist.

Teil III

Anhang

A Reduktion zweidimensionaler Systeme auf Poincaré-Normalform

Wir betrachten das System (2.1) mit den gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt 2.4. Es folgen in diesem technischen und deswegen ausgegliederten Abschnitt zwei Koordinatenwechsel $x = x(z)$ und $z = z(\xi)$, die (2.1) in Poincaré-Normalform (2.9) transformieren. Das Zwischenergebnis wird die komplexe Gleichung $\dot{z} = \lambda(\mu)z + g(z, \bar{z}, \mu)$ sein. Der Beweis für die Umformung bis dahin ist angelehnt an Kuznetsov [19], danach folgen wir wieder den Ausführungen von Hassard, Kazarinoff und Wan [15].

A.1 Von $\dot{x} = F(x, \mu)$ nach $\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z}, \mu)$

In der Gleichung (2.1) spalten wir von unserer $L + 2$ -mal differenzierbaren Funktion $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ den linearen Teil ab und schreiben

$$\dot{x} = A(\mu)x + G(x, \mu)$$

mit $G = o(\|x\|)$. Die Eigenwerte der Matrix $A(\mu)$ sind nach Voraussetzung $\lambda(\mu) = \lambda_1(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ und $\lambda_2(\mu) = \alpha(\mu) - i\omega(\mu) = \lambda(\bar{\mu})$ mit $\lambda(0) = i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Sei nun $q(\mu) \in \mathbb{C}^2$ ein Eigenvektor von $A(\mu)$ zum Eigenwert $\lambda(\mu)$, d.h. $A(\mu)q(\mu) = \lambda(\mu)q(\mu)$ ($q(0) = (i, 1)^T$). Da die Matrix A reell ist, ist $q(\bar{\lambda})$ ein Eigenvektor zum zweiten Eigenwert $\lambda(\bar{\mu})$ und (q, \bar{q}) bildet eine Basis des \mathbb{C}^2 . Die transponierte Matrix $A^T(\mu)$ hat dieselben Eigenwerte und so sei $p(\mu) \in \mathbb{C}^2$ ein Eigenvektor zu ihrem Eigenwert $\lambda(\bar{\mu})$. Es gilt $\langle p, \bar{q} \rangle = 0^4$, denn aus

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle$$

⁴Mit den eckigen Klammern werde das Standardskalarprodukt $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$ auf \mathbb{C}^2 bezeichnet.

folgt

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \cdot \langle p, \bar{q} \rangle = 0$$

und für kleine μ ist $\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \neq 0$ wegen $\omega(\mu) > 0$ erfüllt. Unter anderem muss für den zweiten Basisvektor q dann $\langle p(\mu), q(\mu) \rangle \neq 0$ gelten und p lässt sich bezüglich q normieren.

$$\langle p(\mu), q(\mu) \rangle = 1$$

Lokal gibt es außerdem für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige komplexe Zahl z , die die Gleichung

$$\begin{aligned} x &= zq(\mu) + \bar{z}q(\bar{\mu}) \\ &= 2\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(q) - 2\operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}(q) \end{aligned} \tag{A.1}$$

erfüllt, weil die Basis (q, \bar{q}) von \mathbb{C}^2 eine Basis $(\operatorname{Re}(q), \operatorname{Im}(q))$ von \mathbb{R}^2 induziert. Mit der gegebenen Orthogonalität und einem normierten Vektor p kann z aus (A.1) bestimmt werden:

$$z = \langle p(\mu), x \rangle$$

Die komplexe Variable erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + \langle p(\mu), G(zq(\mu) + \bar{z}q(\bar{\mu}), \mu) \rangle$$

und diese hat die gewünschte Form mit

$$g(z, \bar{z}, \mu) := \langle p(\mu), G(zq(\mu) + \bar{z}q(\bar{\mu}), \mu) \rangle. \tag{A.2}$$

Diese Funktion g ist wie G $L + 2$ -mal differenzierbar.

A.2 von $\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z}, \mu)$ zur Poincaré-Normalform

Wir werden zeigen, dass jedes System unter den oben genannten Bedingungen

$$\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z}, \mu) \quad (\text{A.3})$$

mit

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{i+j=2}^{L+1} g_{ij}(\mu) \frac{z^i \bar{z}^j}{i!j!} + O(|z|^{L+2})$$

und

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu).$$

durch eine Transformation der Form

$$\begin{aligned} z &= \xi + \chi(\xi, \bar{\xi}, \mu) \\ &= \xi + \sum_{i+j=2}^{L+1} \chi_{ij}(\mu) \frac{\xi^i \bar{\xi}^j}{i!j!} \end{aligned}$$

auf die Poincaré-Normalform

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda(\mu)\xi + \sum_{j=1}^{[\frac{L}{2}]} c_j(\mu)\xi|\xi|^{2j} + O(|\xi| \cdot |(\xi, \mu)|^{L+1}) \\ &= \lambda(\mu)\xi + \Phi(\xi, \bar{\xi}, \mu) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

zurückgeführt werden kann.

Wir starten zunächst unter der Annahme, durch eine Transformation (A.7) mit $\chi_{ij} = 0$ bei $i = j + 1$ werde (A.4) erreicht. Es werden sich daraus Gleichungen für die Koeffizienten $\chi_{ij}(\mu)$ und $c_j(\mu)$ ergeben und im Nachhinein werden wir rechtfertigen, dass Φ die gewünschte Form hat.

Aus (A.7) folgt durch Ableitung nach der Zeit $\dot{z} = \dot{\xi} + \chi_{\xi}\dot{\xi} + \chi_{\bar{\xi}}\dot{\bar{\xi}}$ und mithilfe von (A.3) und (A.4) ausgeschrieben

$$\lambda\xi\chi_{\xi} + \bar{\lambda}\bar{\xi}\chi_{\bar{\xi}} - \lambda\chi = g(\xi + \chi, \bar{\xi} + \bar{\chi}) - (\Phi + \chi_{\xi}\Phi + \chi_{\bar{\xi}}\bar{\Phi}) \quad (\text{A.5})$$

Taylorentwicklung und Koeffizientenvergleich im großen Stil gewährleisten wieder die induktive Berechnung der $\chi_{ij}(\mu)$. Auf der linken Seite der Gleichung (A.5) steht $\sum_{i+j=2}^{L+1} \chi_{ij} \cdot (i\lambda + j\bar{\lambda} - \lambda) \frac{\xi^i \bar{\xi}^j}{i!j!}$. Die ersten Koeffizienten χ_{20} , χ_{11} und χ_{02} von Ordnung $i+j=2$ können aus (A.5) gewonnen werden, weil die rechte Seite bis zur 2. Ordnung nur g -Terme aufweist. Aus dem Vergleich

$$\lambda \chi_{20} \frac{\xi^2}{2} + \bar{\lambda} \chi_{11} \xi \bar{\xi} + (2\bar{\lambda} - \lambda) \chi_{02} \frac{\bar{\xi}^2}{2} = g_{20} \frac{\xi^2}{2} + g_{11} \xi \bar{\xi} + g_{02} \frac{\bar{\xi}^2}{2}$$

folgt

$$\chi_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad \chi_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad \chi_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$$

Mit diesen Ergebnissen folgt nach einem Vergleich der $\xi^2 \bar{\xi}$ -Koeffizienten ($\chi_{21} = 0$)

$$c_1(\mu) = \frac{g_{20} g_{11} (2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}$$

und speziell für $\mu = 0$

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} (g_{20} g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Diese Koeffizienten, die den Induktionsanfang für alle weiteren legen, reichen für die Betrachtungen im Abschnitt 2.4 bereits aus. Wir begnügen uns deswegen mit der Tatsache, dass auf der rechten Seite von Gleichung (A.5) bis zur Ordnung $k = 3, \dots, L+1$ nur χ_{ij} mit $i+j < k$ auftreten, die rekursive Berechnung der χ_{ij} also durchgeführt werden kann. Dabei sichert $\chi_{j+1,j} = 0$ eine gleichzeitige Bestimmung der $c_j(\mu)$ wie für c_1 . Aus dieser induktiven Berechnung folgt auch, dass die χ_{ij} ausschließlich von g_{kl} mit $k+l \leq i+j$ abhängen und in die Gleichungen der c_j nur g_{kl} mit $k+l \leq 2j+1$ eingehen. Da die ursprüngliche Funktion g in allen drei Variablen $L+2$ -mal differenzierbar ist, sind es die g_{kl} mindestens $L+2 - (k+l)$ -mal in μ . Deshalb gilt für die errechneten Koeffizienten $\chi_{ij} \in C^{L+2-(i+j)}$ und $c_j \in C^{L+1-2j}$ bezüglich μ . Mit diesem Wissen über die Differenzierbarkeit der χ_{ij} ist folgende Definition der Transformation

$\chi(\xi, \bar{\xi}, \mu)$ sinnvoll:

$$\begin{aligned}\chi(\xi, \bar{\xi}, \mu) &= \sum_{i+j=2}^{L+1} \left(\sum_{k=0}^{L+1-(i+j)} \chi_{ij}^{(k)}(0) \frac{\mu^k}{k!} \right) \frac{\xi^i \bar{\xi}^j}{i!j!} \\ &= \sum_{i+j+k=2}^{L+1} \frac{\chi_{ij}^{(k)}(0) \xi^i \bar{\xi}^j \mu^k}{i!j!k!}\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

Das ist nicht dieselbe Transformation wie am Anfang, aber durch das Vernachlässigen der $o(|\mu|^{L+2-(i+j)})$ -Terme der zuvor berechneten $\chi_{ij}(\mu)$ ist χ als Polynom beliebig oft differenzierbar und wird am Ende die gleiche Normalform (A.4) entstehen lassen. Dafür folgt nun der Nachweis der Existenz und genügenden Differenzierbarkeit einer Funktion Φ , die Gleichung (A.5) erfüllt.

Mit dem Auftrennen von Φ und ξ in Real- und Imaginärteil kann Gleichung (A.5) auch durch eine reellwertige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in die Form $F(\text{Re}\Phi, \text{Im}\Phi, \text{Re}\xi, \text{Im}\xi, \mu) = 0$ gebracht werden, um schließlich den Satz über implizite Funktionen anzuwenden. Denn F ist (mindestens einmal) differenzierbar, erfüllt $F(0, 0, 0, 0, 0) = 0$ und die Ableitung in „ Φ -Richtung“ an der Stelle $(0, 0, 0, 0, 0)$ ist invertierbar,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \text{Re}F}{\partial \text{Re}\Phi} & \frac{\partial \text{Re}F}{\partial \text{Im}\Phi} \\ \frac{\partial \text{Im}F}{\partial \text{Re}\Phi} & \frac{\partial \text{Im}F}{\partial \text{Im}\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es existiert demnach eine eindeutige Funktion $\Phi = \Phi(\xi, \bar{\xi}, \mu)$, die in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$ (mindestens einmal) differenzierbar ist und $\Phi(0, 0, 0) = 0$ und (A.5) erfüllt. Betrachten wir den ganzen Satz bei fixiertem μ , ist Φ sogar $L+2$ -mal differenzierbar, weil es g und χ nach Voraussetzung bzw. Definition sind. Für jedes feste μ kann deshalb Φ in eine Taylorreihe

$$\Phi(\xi, \bar{\xi}, \mu) = \sum_{i+j=0}^{L+1} \Phi_{ij}(\mu) \frac{\xi^i \bar{\xi}^j}{i!j!} + o(|\xi|^{L+2})$$

entwickelt werden. Nun kann (A.5) herangezogen werden, um die Koeffizienten $\Phi_{ij}(\mu)$ zu berechnen. Da keine konstanten und linearen Terme auftreten, folgt sofort $\Phi_{00} = \Phi_{10} = \Phi_{01} = 0$. Die anfangs berechneten $\chi_{ij}(\mu)$ ergaben genau die gewünschten Koeffizienten 0 bzw. c_j in der Entwicklung von Φ . Setzen wir $\chi_{ij}(\mu) = \sum_{k=0}^{L+1-(i+j)} \chi_{ij}^{(k)}(0) \frac{\mu^k}{k!} + O(|\mu|^{L+2-(i+j)})$ in (A.5) ein und beachten, dass $\Phi_{ij}(\mu)$ genau von den ersten Termen

abhängt, folgt $0 = \frac{\Phi_{ij}(\mu)}{i!j!} + O(|\mu|^{L+2-(i+j)})$ oder

$$\Phi_{ij}(\mu) = O(|\mu|^{L+2-(i+j)}) \quad (\text{A.8})$$

im Fall $i \neq j+1$, $2 \leq i+j \leq L+1$. Für die restlichen Koeffizienten gilt entsprechend $c_j(\mu) = \frac{\Phi_{j+1,j}(\mu)}{(j+1)!j!} + O(|\mu|^{L+2-(2j+1)})$ bzw.

$$\Phi_{j+1,j}(\mu) = (j+1)!j! c_j(\mu) + O(|\mu|^{L+1-2j}) \quad (\text{A.9})$$

bei $1 \leq j \leq [\frac{L}{2}]$. Den Weg zur Poincaré-Normalform (A.4) schließt letztlich die Beobachtung ab, dass aus (A.8), (A.9) und $\xi^i \bar{\xi}^j = O(|\xi|^{i+j})$ für alle i und j (in beiden Fällen) die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mu) \xi^i \bar{\xi}^j &= O(|\xi| \cdot |(\xi, \mu)|^{L+1}) \\ \Phi_{j+1,j}(\mu) \xi^i \bar{\xi}^j &= (j+1)!j! c_j(\mu) \xi |\xi|^{2j} + O(|\xi| \cdot |(\xi, \mu)|^{L+1}) \end{aligned}$$

gelten. Mit der Transformation (A.7) wird Gleichung (A.3) also in die Poincaré-Normalform (A.4) gebracht. Da der Koordinatenwechsel χ polynomiell in jeder Größe und deswegen beliebig oft differenzierbar ist, ist die rechte Seite der Normalform (A.4) $L+2$ -mal differenzierbar.

B Fortsetzung des Beweises über die Hopf-Verzweigung

B.1 Parameter $\mu = \mu(\epsilon)$ und Periode $T = T(\epsilon)$

Es ist von Interesse, wie sich die gefundenen periodischen Lösungen in der Nähe von $\mu = 0$ entwickeln. Da sowohl $\mu = \mu(\epsilon)$ also auch $T = T(\epsilon) = T(\epsilon, \mu(\epsilon))$ genügend oft in ϵ differenzierbar sind, können die Taylorreihen analysiert werden. Dazu betrachten wir zunächst das System

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + z \sum_{j=1}^M c_j(\mu)(z\bar{z})^j \quad (\text{B.1})$$

Es befindet sich für die komplexe Variable z (und beliebiges $M \geq 1$) in Poincaré-Normalform; $\lambda(0) = i\omega_0$ und $c_j(\mu) \in \mathbb{C}$ gelten wie vorher. (B.1) ist rotationsinvariant, d.h. ist $z(t)$ eine Lösung, so ist für alle Winkel $\phi \in [0, 2\pi]$ auch $z(t) \cdot e^{i\phi}$ eine Lösung. Die existierenden periodischen Lösungen müssen demnach Kreise mit Mittelpunkt in $z = 0$ als Orbits besitzen, weil sich die Trajektorien für verschiedene ϵ und ϕ nicht schneiden. Dieses Argument lässt sich aus (B.1) über die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(z\bar{z}) = \dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}} = 2z\bar{z} \cdot [Re \lambda(\mu) + \sum_{j=1}^M Re c_j(\mu) (z\bar{z})^j]$$

stützen. Die rechte Seite ist null für $z = 0$ oder $Re \lambda(\mu) + \sum_{j=1}^M Re c_j(\mu) (z\bar{z})^j = 0$. Ist die zweite Gleichung erfüllt, folgt $|z|^2 = z\bar{z} \equiv \epsilon^2$ für ein $\epsilon \geq 0$. Setzen wir das wiederum in die erfüllte Gleichung ein und außerdem $\mu = \mu(\epsilon)$, ergibt sich

$$Re \lambda(\mu(\epsilon)) + \sum_{j=1}^M Re c_j(\mu(\epsilon)) \epsilon^{2j} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Aus dieser Gleichung können die Koeffizienten μ_j der Taylorreihe

$$\mu(\epsilon) = \sum_{j=1}^M \mu_j \epsilon^j + O(\epsilon^{M+1}) \quad (\text{B.3})$$

über eine Taylor-Entwicklung nach ϵ gewonnen werden.

$$0 = \alpha''(0) \sum_{j=1}^M \mu_j \epsilon^j + \frac{\alpha''(0)}{2} \left(\sum_{j=1}^M \mu_j \epsilon^j \right)^2 + \dots \\ + \operatorname{Re} c_1(0) \epsilon^2 + \operatorname{Re} c_1'(0) \left(\sum_{j=1}^M \mu_j \epsilon^j \right) \epsilon^2 + \dots + \operatorname{Re} c_2(0) \epsilon^4 + \dots$$

Ein Koeffizientenvergleich in linearer Ordnung liefert $\alpha'(0)\mu_1 = 0$ und wegen der Generalvoraussetzung $\alpha'(0) > 0$ also

$$\mu_1 = 0. \quad (\text{B.4a})$$

Zur Ordnung $o(\epsilon^2)$ entsteht die Gleichung $\alpha'(0)\mu_2 + \frac{\alpha''(0)}{2}\mu_1 + \operatorname{Re} c_1(0) = 0$, demnach berechnet sich

$$\mu_2 = -\frac{\operatorname{Re} c_1(0)}{\alpha'(0)}. \quad (\text{B.4b})$$

Im Weiteren gilt $\mu_{2n+1} = 0$ und μ_{2n} kann induktiv aus den vorhergehenden erhalten werden.

Für die Berechnung der Koeffizienten von $T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{i=0}^M \tau_i \epsilon^i + O(\epsilon^{M+1})$ wird (B.1) mithilfe von (B.2) auf die Form

$$\dot{z} = iz \cdot \operatorname{Im}[\lambda(\mu) + \sum_{j=1}^M c_j(\mu) \epsilon^{2j}]$$

gebracht. Die periodische Lösung

$$z = \epsilon \cdot e^{\frac{2\pi it}{T(\epsilon)}}$$

erfüllt dann $\frac{2\pi}{T(\epsilon)} = \operatorname{Im}[\lambda(\mu(\epsilon)) + \sum_{j=1}^M c_j(\mu(\epsilon)) \epsilon^{2j}]$ und es kann

$$2\pi = \left[\frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{i=0}^M \tau_i \epsilon^i + O(\epsilon^{M+1}) \right] \cdot \\ \cdot \left[\omega_0 + \omega'(0)\mu_1 \epsilon + \frac{\omega''(0)\mu_1 + \omega'(0) \cdot 2\mu_2}{2} \epsilon^2 + \operatorname{Im} c_1(0) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right]$$

herangezogen werden. Ein Vergleich der beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 1 \\ \tau_1 &= 0 \\ \tau_2 &= -\frac{1}{\omega_0}[\omega'(0)\mu_2 + \text{Im } c_1(0)]\end{aligned}\tag{B.5}$$

und weitere Koeffizienten können wieder induktiv bestimmt werden.

Die obige Betrachtung der vereinfachten Differentialgleichung (B.1) rechtfertigt folgendes Lemma:

Lemma 1. *Gegeben sei die Poincaré-Normalform*

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \lambda(\mu)z + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} c_j(\mu)z|z|^{2j} + O(|z| \cdot |(z, \mu)|^{L+1}) \\ &= f(z, \bar{z}, \mu),\end{aligned}\tag{B.6}$$

wobei die Funktion $f \in C^{L+2}$ in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ definiert ist. Die periodische Lösung $z(t, \mu)$ von (B.6) mit $z(0, \mu) = \epsilon$ und Periode $T(\epsilon)$ hat dann die Form

$$z(t, \mu) = \epsilon \cdot e^{\frac{2\pi i t}{T(\epsilon)}} + O(\epsilon^{L+2}),\tag{B.7}$$

während für

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[\sum_{j=0}^L \tau_j \epsilon^j \right] + O(\epsilon^{L+1})\tag{B.8}$$

und

$$\mu(\epsilon) = \sum_{j=0}^L \mu_j \epsilon^j + O(\epsilon^{L+1})\tag{B.9}$$

die bereits berechneten Gleichungen (B.4a), (B.4b) und (B.5) gelten.

Beweis. Mit der Variablentransformation $\tau = \frac{t}{T(\epsilon)}$ und $z = \epsilon \cdot e^{2\pi i \tau} \eta$ wird Gleichung (B.6) in den Variablen (τ, η) zu

$$2\pi i \eta + \frac{d\eta}{d\tau} = T(\epsilon)\eta \left[\lambda(\mu) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} c_j(\mu)(\eta\bar{\eta})^j \epsilon^{2j} \right] + O(\epsilon^{L+1}).\tag{B.10}$$

Da f genügend oft differenzierbar ist, ist es auch die Lösung η , die wieder dargestellt werden kann als

$$\eta = \sum_{j=0}^L \eta_j \epsilon^j + O(\epsilon^{L+1}). \quad (\text{B.11})$$

Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir $\eta_0(0) = 1$ und $\eta_i(0) = 0$, $1 \leq i \leq L$. Durch Substitution von (B.11) in (B.10) folgt, wiederum nach einem Koeffizientenvergleich, sogar $\eta_0 \equiv 1$ und $\eta_i \equiv 0$, $1 \leq i \leq L$ unabhängig von τ : Zu $O(1)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\pi i \eta_0 + \frac{d\eta_0}{d\tau} &= 2\pi i \eta_0 \\ \Leftrightarrow \frac{d\eta_0}{d\tau} &= 0, \end{aligned}$$

also $\eta_0 \equiv 1$. In linearer Ordnung besteht die Gleichung

$$\begin{aligned} 2\pi i \eta_1 + \frac{d\eta_1}{d\tau} &= 2\pi i \eta_1 + d_1 \\ \Leftrightarrow \frac{d\eta_1}{d\tau} &= d_1, \end{aligned}$$

mit einer von ϵ unabhängigen Konstante d_1 . Daraus folgt

$$\eta_1 = d_1 \tau + d_2$$

mit einer weiteren Konstanten d_2 . Weil $z(t, \mu)$ $T(\epsilon)$ -periodisch ist, ist $\eta(\tau, \mu)$ 1-periodisch und so ist es auch der Koeffizient η_1 . Das ist jedoch nur für $d_1 = 0$ gegeben. $\eta_1 \equiv 0$ folgt nun aus $d_2 = \eta_1(0) = 0$. Durch dieselbe Prozedur für $2 \leq i \leq L$ folgt induktiv $\eta_i \equiv 0$.

Damit ist $\eta(\tau) = 1 + O(\epsilon^{L+1})$ gezeigt und somit auch, dass $z(t, \mu)$ wirklich die Form (B.7) hat. Wenn diese Lösung in (B.6) eingesetzt wird, entsteht unter Beachtung von $|z| = \epsilon + O(\epsilon^{L+2}) \in O(\epsilon)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{T(\epsilon)} z &= \lambda(\mu) z + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} c_j(\mu) z (\epsilon + O(\epsilon^{L+2}))^{2j} + O(\epsilon^{L+1}) \\ \Leftrightarrow 0 &= z \left[\lambda(\mu) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} c_j(\mu) \epsilon^{2j} - \frac{2\pi i}{T(\epsilon)} \right] + O(\epsilon^{L+1}). \end{aligned}$$

Bis zur Ordnung $O(\epsilon^L)$ sind aber

$$\lambda(\mu) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} c_j(\mu) \epsilon^{2j} - \frac{2\pi i}{T(\epsilon)} = 0$$

zwei Gleichungen für Real- und Imaginärteil, die im motivierenden Beispiel ($M := \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$) für die Bestimmung der Koeffizienten in (B.9) und (B.8) gedient haben. Die Werte (B.4a), (B.4b) und (B.5) gelten demnach auch für die allgemeine Form der Poincaré-Normalform. Damit ist die behauptete Gestalt der Taylorentwicklungen und der periodischen Orbits bewiesen. \square

B.2 Floquet-Exponent $\beta(\epsilon)$

Die Stabilität der periodischen Orbits $x(t, \epsilon) = \epsilon y(t, \epsilon, \mu(\epsilon))$ kann durch Berechnung des zweiten, nicht-trivialen Floquet-Exponenten

$$\beta(\epsilon) = \frac{1}{T(\epsilon)} \int_0^{T(\epsilon)} \text{spur } A(s, \epsilon) ds$$

der Poincaré-Normalform (2.9) untersucht werden. $A(t, \epsilon) = \frac{\partial f(x(t, \epsilon))}{\partial x}$ und $T(\epsilon)$ sind $L + 1$ -mal differenzierbar, sodass wir auch β in eine Taylorreihe bzgl. ϵ entwickeln können; für ein erstes Ergebnis genügen die Terme bis $O(\epsilon^3)$. (2.9) schreibt sich bis zur gewünschten Ordnung als

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - \omega x_2 + [(Re c_1)x_1 - (Im c_1)x_2](x_1^2 + x_2^2) + O(\epsilon^4) \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + \alpha x_2 + [(Re c_1)x_2 - (Im c_1)x_1](x_1^2 + x_2^2) + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\text{spur} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x(t, \mu(\epsilon))} = 2\alpha(\mu(\epsilon)) + 4[Re c_1(\mu(\epsilon))] \epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Die ersten Terme sind unabhängig von der Zeit und deswegen gilt $\beta(\epsilon) = 2\alpha(\mu(\epsilon)) + 4[Re c_1(\mu(\epsilon))] \epsilon^2 + O(\epsilon^3)$. Eine letzte Entwicklung von $\alpha(\mu(\epsilon))$ und $Re c_1(\mu(\epsilon))$ nach ϵ (siehe frühere Entwicklungen) liefert

$$\beta(\epsilon) = 2Re c_1(0) \epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

C Ein unzureichender Kontrollansatz

Die Symmetrie (7.4) mit nicht-invasivem Kontrollansatz (7.5) reicht für eine Stabilisierung der synchronen Schwingungen in Z_+ aus. In diesem ausgegliederten Teil beweisen wir ein negatives Resultat über die Schwäche von (7.5) als nicht-invasive Kontrolle in Z_- . Dabei werden wir wieder anhand der b_{\pm} -Kurven argumentieren und die Chance nutzen, abseits des roten Fadens Abschnitt 6.2 und den Weg von $\chi_{\pm} = 0$ zu $b_{\pm}(\omega)$ durch elementare Ausführungen zu stützen.

Satz 4. *Für die Hopf-Verzweigung in Z_- bei $\mu = 2a$ bleibt der Ursprung $z_- = z_+ = 0$ für jede zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle der Form (7.5), $b \in \mathbb{C}$, $\tau_n = nT_-$, instabil mit $E(b) \geq 2$.*

Beweis. Der Ansatz (7.5) entspricht einer Matrix C_T mit $s_1 = -1$, $s_2 = 1$, und $d = -1$. Wir übernehmen die charakteristischen Gleichungen (6.6a) und (6.6b) und setzen ein:

$$\begin{aligned}\chi_+(\lambda, b, 2a, \tau_n) &= 2a + i + b(-1 + e^{-\tau_n \lambda}) - \lambda = 0 \\ \chi_-(\lambda, b, 2a, \tau_n) &= i - b(1 - e^{-\tau_n \lambda}) - \lambda = 0.\end{aligned}$$

Wie in 6.2 ist die reelle Dimension instabiler Eigenwerte $E(0) = 2$. Aus $\lambda = i(1 + \omega)$ und $\tau_n = nT_- = 2\pi n$ ergeben sich Kurven

$$\begin{aligned}b_+(\omega) &= \frac{i\omega - 2a}{e^{-i2n\pi\omega} - 1} \\ b_-(\omega) &= \frac{i\omega}{e^{-i2n\pi\omega} - 1}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}e^{-i2n\pi\omega} - 1 &= (e^{-in\pi\omega})^2 - 1 \\ &= (\cos(n\pi\omega) - i\sin(n\pi\omega))^2 - 1 \\ &= \cos^2(n\pi\omega) - \sin^2(n\pi\omega) - 2i\sin(n\pi\omega)\cos(n\pi\omega) - 1 \\ &= -2\sin(n\pi\omega) \cdot (\sin(n\pi\omega) + i\cos(n\pi\omega))\end{aligned}$$

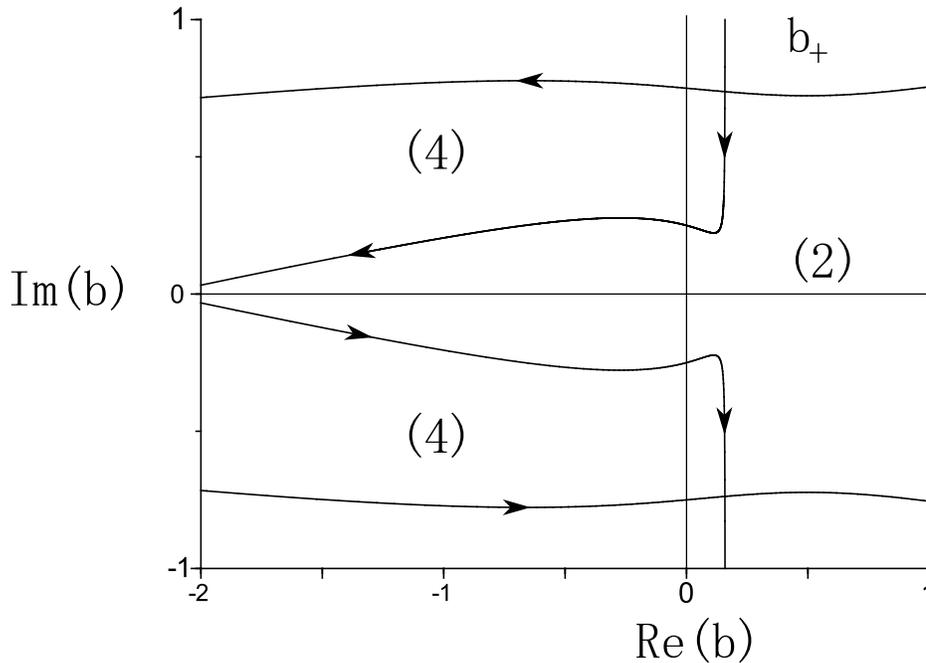


Abbildung 18: Vom Ursprung aus gesehen kann kein b_+ -Kurvenabschnitt von der rechten auf die linke Seite überquert werden. Es ist keine Stabilisierung möglich.

folgt

$$b_+(\omega) = a - \frac{\omega}{2} \cot(n\pi\omega) + i\left(-\frac{\omega}{2} - a \cot(n\pi\omega)\right)$$

$$b_-(\omega) = -\frac{\omega}{2}(\cot(n\pi\omega) + i)$$

Die Lage der b_+ -Kurve ist in Abbildung (18) dargestellt. b_- ist schon bekannt und es geht wieder darum, einen Bereich zu finden, in dem $E(b) = E_+(b) + E_-(b) = 0$ gilt. Anschaulich gesprochen ist das nicht möglich, weil b_+ den Ursprung stets links liegen lässt. Der Beweis dazu fängt mit der Beobachtung von Singularitäten für Real- und Imaginärteil bei $\omega = \frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ an. Im Folgenden wird von jedem Kurvenabschnitt $b_+ : (\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ gezeigt, dass er die komplexe Ebene in zwei unbeschränkte Zusammenhangskomponenten teilt und der Ursprung entsprechend der Orientierung von $b_+(\omega)$ immer in der linken Hälfte liegt. Wegen $b_+(-\omega) = \overline{b_+(\omega)}$ genügt es, $\omega > 0$ zu betrachten. Dabei behandeln wir erst $k \geq 1$ und zum Schluss das Intervall $(0, \frac{1}{n})$.

Sei also $\frac{k}{n} < \omega < \frac{k+1}{n}$ mit $k \geq 1$ und $Re b_+(\omega) = a - \frac{\omega}{2} \cot(n\pi\omega)$:

$$\lim_{\omega \searrow \frac{k}{n}} a - \frac{\omega}{2} \cot(n\pi\omega) = -\infty \quad (C.1)$$

$$\lim_{\omega \nearrow \frac{k+1}{n}} a - \frac{\omega}{2} \cot(n\pi\omega) = \infty \quad (C.2)$$

$$\frac{d}{d\omega} \left(a - \frac{\omega}{2} \cot(n\pi\omega) \right) > 0 \quad (C.3)$$

Die Ungleichung steht für einen streng monoton steigenden Realteil und erklärt das Verhalten an den Intervallgrenzen. Das bedeutet aber, dass die Kurve von links nach rechts verläuft und als Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Die beiden Hälften der komplexen Ebene sind dann einfach die Gebiete oberhalb und unterhalb des Graphen von f , $O := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \mid y > f(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = Re b_+(\omega), y > Im b_+(\omega)\}$ und $U := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{O}$. Der Ursprung liegt nun stets oberhalb der Kurve, weil $Re b_+(\omega_0) = a - \frac{\omega_0}{2} \cot(n\pi\omega_0) = 0$ durch $a = \frac{\omega_0}{2} \cot(n\pi\omega_0)$ für den Imaginärteil die Gleichung

$$Im b_+(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} - a \cdot \cot(n\pi\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} (1 + \cot^2(n\pi\omega_0)) < 0 \quad (C.4)$$

impliziert. Wird nun vom Ursprung aus kommend die Kurve überquert, dann geschieht das von ihrer linken auf die rechte Seite und $E(b)$ erhöht sich um 2. Im Beweis für $k \leq -2$ kehren sich die Vorzeichen in (C.1), (C.2) und die Ungleichheitszeichen in (C.3) und (C.4) um. Der Realteil ist dann streng monoton fallend, die Kurve verläuft von rechts nach links und der Ursprung liegt wieder in der stabileren Hälfte. Für $0 < \omega < \frac{1}{n}$ muss der Beweis etwas angepasst werden. Es gelten zwar (C.2) und (C.3), aber auch $\lim_{\omega \searrow 0} a - \frac{\omega}{2} \cot(n\pi\omega) = a - \frac{1}{2n\pi}$. Im Fall $a - \frac{1}{2n\pi} < 0$ gibt es wieder ω_0 mit $Re b_+(\omega_0) = 0$ und der Beweis gelingt mit Ungleichung (C.4) wie vorher. Für $a - \frac{1}{2n\pi} > 0$ sichert erst $\lim_{\omega \searrow 0} Im b_+(\omega) = -\infty$ die Lage des Ursprungs links der Kurve. \square

Literatur

- [1] Andronov M. A. und Witt A. (1930) „Sur la théorie mathématique des auto-oscillations”, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences* **190**, 256-258.
- [2] Arnold V. I. (2001) „Gewöhnliche Differentialgleichungen”, 2. Auflage, Berlin, Springer-Verlag.
- [3] Bellman R. (1967) „Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes: Linear Equations and Quadratic Criteria”, *Mathematics in Science and Engineering* **40 (1)**, New York, Academic Press.
- [4] Bellman R. E. und Cooke K. L. (1963) „Differential-Difference Equations”, *Mathematics in Science and Engineering* **6**, London, Academic Press.
- [5] Bosewitz M. (2013) „Stabilisierung gekoppelter Oszillatoren durch verzögerte Rückkopplungskontrolle”, Bachelorarbeit, Freie Universität Berlin.
- [6] Carr J. (1981) „Applications of Centre Manifold Theory”, *Applied Mathematical Sciences* **35**, New York, Springer-Verlag.
- [7] Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M. und Walther H.-O. (1995) „Delay Equations”, *Applied Mathematical Sciences* **110**, New York, Springer-Verlag.
- [8] Fiedler B., Flunkert V., Georgi M., Hövel P. und Schöll E. (2007) „Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control”, *Physical Review Letters* **98**, 114101.
- [9] Fiedler B., Flunkert V., Hövel P. und Schöll E. (2010) „Delay stabilization of periodic orbits in coupled oscillator systems”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **368**, 319-341.
- [10] Glendinning P. (1994) „Stability, Instability and Chaos”, *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press.
- [11] Hale J. K. (1969) „Ordinary Differential Equations”, Malabar, Florida, Robert E. Krieger Publishing Company.

- [12] Hale J. K. und Koçak H. (1991) „Dynamics and Bifurcations”, *Texts in Applied Mathematics* **3**, New York, Springer-Verlag.
- [13] Hale J. K. und Verduyn Lunel S. M. (1993) „Introduction to Functional Differential Equations”, *Applied Mathematical Sciences* **99**, New York, Springer-Verlag.
- [14] Hartman P. (1982) „Ordinary Differential Equations”, 2. Auflage, Boston, Birkhäuser.
- [15] Hassard B. D., Kazarinoff N. D. und Wan Y-H. (1981) „Theory and Applications of Hopf Bifurcation”, *London mathematical society lecture note series* **41**, Cambridge, Cambridge University Press.
- [16] Hopf E. (1942) „Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems”, *Berichte der mathematisch-physischen Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig* **94**, 1-22.
- [17] Just W., Fiedler B., Flunkert V., Georgi M., Hövel P. und Schöll E. (2007) „Beyond odd number limitation: a bifurcation analysis of time-delayed feedback control”, *Physical Review Letters* **76**, 026210.
- [18] Knobloch H. W. und Kappel F. (1974) „Gewöhnliche Differentialgleichungen”, Stuttgart, B. G. Teubner Verlag.
- [19] Kuznetsov Y. A. (1998) „Elements of Applied Bifurcation Theory”, 2. Auflage, *Applied Mathematical Sciences* **112**, New York, Springer-Verlag.
- [20] MacFarlane A. G. J. (1979) „The Development of Frequency-Response Methods in Automatic Control”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **24 (2)**, 250-265.
- [21] Marsden J. E. und McCracken M. (1976) „The Hopf Bifurcation and Its Applications”, *Applied Mathematical Sciences* **19**, New York, Springer-Verlag.
- [22] Maxwell J. C. (1868) „On governors”, *Proceedings of the Royal Society* **16**, 270-283.
- [23] Nakajima H. (1997) „On analytical properties of delayed feedback control of chaos”, *Physics Letters A* **232**, 207-210.

- [24] Plaschko P. und Brod K. (1995) „Nichtlineare Dynamik, Bifurkationen und Chaotische Systeme“, Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg.
- [25] Poincaré H. (1892) „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste“, Paris, Gauthier-Villars et fils.
- [26] Pontryagin L. S. (1962) „Ordinary Differential Equations“, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company.
- [27] Pyragas K. (1992) „Continuous control of chaos by self-controlling feedback“, *Phys. Lett. A* **170**, 421-428.
- [28] Schneider I. (2011) „Stabilisierung von drei symmetrisch gekoppelten Oszillatoren durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle“, Bachelorarbeit, Freie Universität Berlin.
- [29] Schneider I. (2013) „Delayed feedback control of three diffusively coupled Stuart-Landau oscillators: a case study in equivariant Hopf bifurcation“, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, im Druck.
- [30] Schöll E. und Schuster H. G. (Hrsg.) (2008) „Handbook of chaos control“, 2. Auflage, Weinheim, Wiley-VCH.
- [31] Wischnegradskii I. A. (1876) „Sur la théorie générale des régulateurs“, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **83**, 318-321.