

Zentrumsmannigfaltigkeiten in  
Reaktions-Diffusions-Systemen auf  
unbeschränkten Gebieten

Diplomarbeit eingereicht von Nihar Jangle  
Betreuer: Prof. Dr. B. Fiedler

Freie Universität Berlin  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
9. September 2003



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das Reaktions-Diffusions-System</b>	<b>5</b>
2.1	Die Gleichung und die Hypothesen . . . . .	5
2.2	Anmerkungen . . . . .	7
2.3	Umformulierung der Spektralannahme . . . . .	10
2.4	Das gestörte System . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Reduktion auf die Zentrumsmannigfaltigkeit</b>	<b>13</b>
3.1	Das Theorem . . . . .	13
3.2	Parametrisierung . . . . .	14
3.3	Weitere Eigenschaften . . . . .	16
3.4	Beweis des Haupttheorems . . . . .	17
3.4.1	Die Graphentransformation $\Gamma_T^\varepsilon$ . . . . .	18
3.4.2	Der Term $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$ . . . . .	18
3.4.3	Der Term $P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$ . . . . .	24
3.4.4	Kontraktionseigenschaft von $\Gamma_T^\varepsilon$ . . . . .	28
3.4.5	Eigenschaften des Fixpunktes $\sigma_{\sharp}^\varepsilon$ von $\Gamma_T^\varepsilon$ . . . . .	32
3.4.6	Regularität der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_*^\varepsilon$ . . . . .	37
3.4.7	Regularität der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_*^\varepsilon$ in $\varepsilon$ . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Ausblick</b>	<b>41</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>43</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Spiralwellen werden in vielen verschiedenen Systemen in der Biologie, Chemie und Physik gefunden. Beispielsweise treten sie bei der CO-Oxidation auf Platinflächen auf und haben einen Einfluss auf Schadstoffemissionen bei Abgaskatalysatoren. Sie werden auch im Herzmuskelgewebe beobachtet, wo sie für gefährliche Herzrhythmusstörungen verantwortlich sein können. Insofern ist das Verständnis und die Kontrolle der Dynamik von Spiralwellen von praktischer Bedeutung.

Ein weiteres Beispiel hierfür ist die lichtensitive Belousov-Zhabotinsky-Reaktion. Die BZ-Reaktion lässt sich leicht im Labor untersuchen und gilt daher als Paradeversuch.

Modelliert werden Reaktions-Diffusions-Systeme durch die partielle Differentialgleichung

$$u_t = D\Delta u + F(u), \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}^N.$$

Der Vektor  $u$  gibt in Abhängigkeit vom Ort die Konzentrationen der chemischen Substanzen an. Wenn die Diffusionsmatrix  $D$  Diagonalgestalt mit positiven Einträgen hat und die Reaktionsfunktion  $F$  gewisse Wachstumsbeschränkungen erfüllt, existiert nach Henry [3] auf dem Funktionenraum  $L^2$  ein Halbfluss  $\phi_t$ .

Der Operator  $D\Delta$  ist äquivariant unter der speziellen euklidischen Gruppe, der Gruppe der Translationen und Rotationen. Wenn auch die Nichtlinearität  $F$  diese Eigenschaft besitzt und somit das gesamte Vektorfeld äquivariant ist, so ist es auch der Halbfluss  $\phi_t$ .

Weiterhin nehmen wir die Existenz eines relativen Gleichgewichts  $u_*$  an, das keine weitere Symmetrie besitzt, also eine triviale Isometriegruppe hat.  $u_*$  sei eine rotierende Welle, d.h. die Zeitentwicklung stelle eine Rotation mit konstanter Geschwindigkeit dar.

Der Gruppenorbit von  $u_*$ , den wir mal mit  $Gu_*$  bezeichnen wollen, ist nach Definition gruppeninvariant und da  $u_*$  eine rotierende Welle ist, sogar flussinvariant. Außerdem ist  $Gu_*$  dreidimensional und nicht kompakt, genauso wie die Gruppe  $G = SE(2)$ . Unter bestimmten Spektralannahmen, die wir an die Linearisierung des Flusses  $\phi_t$  stellen, ist  $Gu_*$  sogar lokal exponentiell anziehend.

In dieser Diplomarbeit wird bewiesen, dass eine glatte, dreidimensionale, flussinvariante, lokal exponentiell anziehende globale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  existiert, falls das Reaktions-Diffusions-System symmetriebrechend gestört wird:

$$u_t = D\Delta u + F(u) + \varepsilon H(u),$$

wobei  $H$  im Gegensatz zu  $F$  nicht äquivariant unter der gesamten speziellen euklidischen Gruppe ist, sondern nur noch unter diskreten Translationen.

Die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  besitzt damit natürlich auch nur noch die Restsymmetrie. Ferner ist  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  mit diesen Eigenschaften eindeutig festgelegt und auch glatt im Parameter  $\varepsilon$ .

Aufgrund der oben genannten Eigenschaften der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$ , kann die partielle Differentialgleichung auf  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  eingeschränkt werden. Man erhält eine dreidimensionale gewöhnliche Differentialgleichung, die die Dynamik der partiellen in der Nähe von  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  beschreibt. M. Georgi untersucht in seiner Diplomarbeit [2] die reduzierten Gleichungen.

Die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  ist im folgenden Sinne eine Zentrumsmannigfaltigkeit: Wenn wir unsere ungestörte Reaktions-Diffusionsgleichung in einem mitgedrehten Koordinatensystem betrachten, wird aus unserem relativen Gleichgewicht  $u_*$  ein Gleichgewicht. Linearisieren wir dann das ungestörte Vektorfeld an dieser Stelle, so liefern unsere Spektralannahmen, dass der Eigenraum, der zum Spektrum mit nicht-negativem Realteil gehört, dreidimensional ist, und das restliche Spektrum links wegbeschränkt von der imaginären Achse liegt. Andererseits liefert unsere Spektralannahme auch direkt, dass 1 ein dreifacher Floquet-Multiplikator ist und dass das restliche Spektrum des linearisierten Flusses im Inneren des komplexen Einheitskreises liegt, wegbeschränkt von der Kreislinie.

Sandstede, Scheel und Wulff [5] waren die ersten die eine Zentrumsmannigfaltigkeitenreduktion in diesem Setting präsentierten. Sie lassen auch instabile Richtungen zu und beweisen somit genauer gesagt die Existenz einer endlich-dimensionalen Zentrums-Instabilen-Mannigfaltigkeit.

Die Aufgabe dieser Diplomarbeit ist es, einen ausführlichen Beweis des oben genannten Theorems zu liefern, ohne auf abstrakte Resultate über die Existenz und Persistenz von normalhyperbolischen Mannigfaltigkeiten zurückzugreifen, wie man sie bei Fenichel [1], Wiggins [9] und Hirsch, Pugh

und Shub [4] findet, die zum Teil auch nur endlich-dimensionale Systeme betrachten. Außerdem steht die Symmetriebrechung im Vordergrund.

**Danksagung.** Ich danke Herrn Prof. Dr. B. Fiedler für das interessante Thema der Diplomarbeit und für seine Unterstützung. Außerdem möchte ich mich bei Prof. Dr. A. Scheel, PD Dr. M. Väth, Dr. S. Liebscher, Dr. K. Matthies und Dr. C. Wulff bedanken, da sie mir mit Ratschlägen zur Seite standen.

Desweiteren bin ich auch M. Georgi für die geistreichen Diskussionen dankbar, die uns beide voranbrachten.





# Kapitel 2

## Das Reaktions-Diffusions-System

### 2.1 Die Gleichung und die Hypothesen

Wir betrachten die folgende Reaktions-Diffusions-Gleichung

$$u_t = D\Delta u + F(u) \quad (2.1)$$

auf dem Banachraum  $X := L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^N)$ . Dabei sei  $D$  eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen. Der Operator  $-D\Delta$  ist sektoriell und wenn  $F$  von  $Y := X^\alpha$  nach  $X$  eine  $C^{k+2}$  Abbildung ist mit  $k \geq 1$ , so existiert ein lokaler Semifluss  $\phi_t$  auf  $Y$ , siehe Satz 1.

**Satz 1** (Henry [3]) *Sei  $A$  ein sektorieller Operator eines Banachraums  $X$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times X^\alpha$ ,  $\Lambda$  offen in einem Banachraum  $L$  und  $f : U \times \Lambda \rightarrow X$  sei  $C^r$  oder analytisch. Dann existiert für jedes  $(\tau, \xi, \lambda) \in U \times \Lambda$  ein  $\Theta = \Theta(\tau, \xi, \lambda) > 0$ , so dass*

$$\begin{aligned} u_t &= -A + f(t, u, \lambda), & t > \tau \\ u(\tau) &= \xi \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung auf  $(\tau, \tau + \Theta)$  besitzt.

Sei  $u(t) = u(t; \tau, \xi, \lambda)$  die maximal definierte Lösung. So ist die Abbildung

$$(t, \tau, \xi, \lambda) \mapsto u(t, ; \tau, \xi, \lambda)$$

$C^r$  bzw. analytisch für  $t$  aus dem maximalen Existenzintervall.

Sei kurz mit  $G$  die spezielle euklidische Gruppe  $SE(2)$  bezeichnet, also die Gruppe der Rotationen und Translationen.  $G$  ist damit das semi-direkte

Produkt  $SO(2) \dot{+} \mathbb{R}^2$ . Außerdem ist  $G$  eine Lie-Gruppe, wobei die Gruppenmultiplikation

$$(R_1, S_1)(R_2, S_2) = (R_1 R_2, S_1 + R_1 S_2) \quad (2.2)$$

ist. Sei die Gruppenaktion  $\rho : G \longrightarrow GL(X)$  auf dem Funktionenraum  $X$  gegeben durch

$$(\rho_{(R,S)}u)(x) := u(R^{-1}(x - S)). \quad (2.3)$$

Für jedes  $g \in G$  ist  $\rho_g$  eine Isometrie auf  $X = L^2$ , wie sich leicht überprüfen lässt, sogar auf  $X^\alpha = Y$ , wie man auch einsehen kann, wenn man sich die Definition der  $X^\alpha$ -Norm anschaut. Eine weitere nützliche Eigenschaft der Gruppenaktion ist die Starkstetigkeit auf  $X$ , d.h. für alle  $u \in X$  gilt:

$$g \rightarrow id \Rightarrow \rho_g u \rightarrow u. \quad (2.4)$$

Um dies einzusehen, approximiere  $u$  zunächst durch eine Funktion aus  $C_0^\infty$ , nutze dann, dass alle  $\rho_g$  Isometrien sind und bedenke, dass auf  $C_0^\infty$  die Gruppenaktion starkstetig ist aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit.

Es folgen nun die zentralen Annahmen, die wir an unser System stellen:

### Hypothese 1

- (i) Die Funktion  $F$  sei  $G$ -äquivariant, es gelte also für alle  $g \in G$  und  $u \in X$ :

$$\rho_g F(u) = F(\rho_g u).$$

- (ii)  $F$  erfülle die Wachstumsbeschränkung

$$\|F(y)\|_X \leq K(1 + \|y\|_Y)$$

für ein  $K > 0$ .

Insbesondere erfüllt  $F$  die Äquivarianzbedingung (Hypothese 1(i)), falls  $F$  zunächst in  $C^{k+2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  liegt und dann als Superpositionsoperator als Funktion von  $Y = X^\alpha$  nach  $X$  interpretiert wird. Allerdings muss  $F$  noch einige Wachstumsbeschränkungen erfüllen, damit es in  $C^{k+2}(Y, X)$  liegt. Siehe hierfür Sandstede, Scheel, Wulff [5] und Wulff [10].

Aus der Äquivarianz des Laplaceoperators und der Funktion  $F$  und damit des gesamten Vektorfeldes unseres Systems (2.1) folgt, dass mit  $u$  aus  $Y$  auch  $\rho_g \phi_t(u)$  eine Lösung von (2.1) zum Anfangswert  $\rho_g u$  ist. Die Eindeutigkeit der Lösung unserer partiellen Differentialgleichung liefert dann die Äquivarianz des zugehörigen Flusses  $\phi_t$ .

Die Wachstumsbeschränkung (Hypothese 1(ii)) liefert (siehe z.B. Henry [3]), dass der Semifluss  $\phi_t$  für alle  $t \geq 0$  existiert.

## Hypothese 2 (Rotierende Welle)

(i) Es existiere ein  $u_* \in Y$  und ein  $w_* \in \mathbb{R}$ ,  $w_* \neq 0$  mit

$$\phi_t(u_*) = \rho_{(R_{\omega_* \cdot t}, 0)} u_*.^1$$

(ii)  $u_*$  sei  $C^{k+2}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^N)$ .

(iii)  $u_*$  besitze triviale Isotropie, d.h.  $\{g \in G; \rho_g u_* = u_*\} = \{id\}$ .

## Hypothese 3 (Spektralannahme)

Sei  $\text{spec}(D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \geq 1\}$  eine Spektralmenge<sup>2</sup> für die Linearisierung des Flusses

$$D\phi_{2\pi/w_*}(u_*) \in L(Y)$$

mit assoziierter Spektralprojektion  $P_* \in L(Y)$ , so dass der verallgemeinerte Eigenraum  $E_*^c := R(P_*)$  dreidimensional ist.

Hypothese 3 bedeutet, wie den Erläuterungen im kommenden Abschnitt 2.2 entnommen werden kann, dass 1 ein dreifacher Eigenwert des Operators  $D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)$  ist und dass das restliche Spektrum von der Kreislinie wegbeschränkt im Kreis liegt. Betrachte zur Illustration Abbildung 2.1.

## 2.2 Anmerkungen

Es folgen noch einige Anmerkungen:

Die Annahme 2(iii) über die Isometrie von  $u_*$ , die besagt, dass die betrachtete Spiralwelle einarmig ist, wird in dem Artikel von Sandstede, Scheel und Wulff [5] nicht gemacht, stattdessen werden auch mehrarmige Spiralwellen betrachtet.

Wir haben bereits oben erwähnt, dass  $F$  als Superpositionsoperator die Äquivarianzbedingung erfüllt. Falls  $F$  noch einige Wachstumsbeschränkungen einhält, folgt aus Hypothese 2(i) automatisch die Glattheit von  $u_*$ , d.h. 2(ii).

Wir schreiben  $Gu_*$  für den Gruppenorbit durch  $u_*$ , also für  $\{\rho_g u_*; g \in G\}$ .  $Gu_*$  ist infolge der Glattheit von  $u_*$ , siehe Hypothese 2(ii), eine  $C^{k+2}$ -Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum von  $Gu_*$  an der Stelle  $u_*$  wird von  $\partial_\varphi u_*$ ,  $\partial_x u_*$  und  $\partial_y u_*$  aufgespannt.

Da  $\phi_{2\pi/w_*}$  den Gruppenorbit  $Gu_*$  infolge der Äquivarianz des Flusses in sich selbst abbildet, und da  $u_*$  eine rotierende Welle mit Frequenz  $w_*$  ist, gilt:

$$D\phi_{2\pi/w_*}(u_*) |_{T_{u_*} Gu_*} = id |_{T_{u_*} Gu_*} .$$

---

<sup>1</sup> $R_{\omega_* \cdot t}$  bezeichne die Rotation um den Winkel  $\omega_* \cdot t$ .

<sup>2</sup>siehe Henry[3]

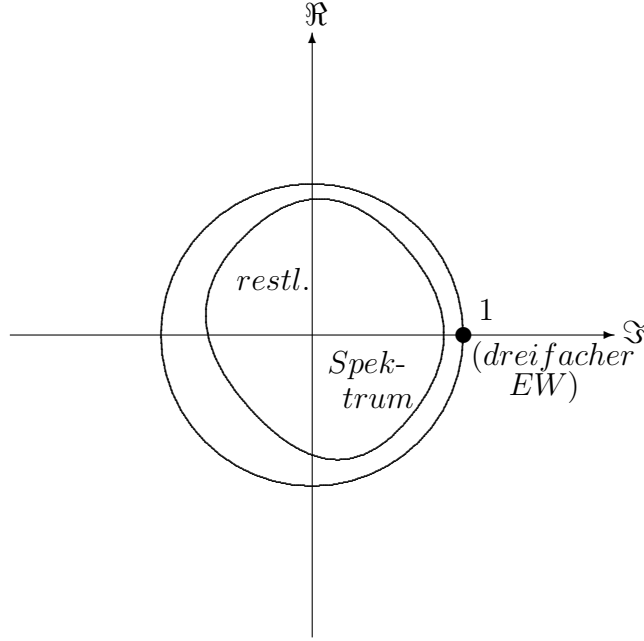


Abbildung 2.1: Spektrum von  $\rho_{(-\omega,0)} D\phi_T(u_*)$

Damit ist aber gerade 1 ein dreifacher Eigenwert mit Eigenraum  $T_{u_*} G u_*$ . Somit folgt aus der Hypothese 3

$$E_*^c = T_{u_*} G u_*.$$

$T_{u_*} G u_*$  wird von  $\partial_\varphi u_*$ ,  $\partial_x u_*$  und  $\partial_y u_*$  aufgespannt. Dabei bezeichnen  $x$  und  $y$  die beiden Ortskoordinaten der Funktion  $u_*$  und  $\varphi$  den Winkel, wenn das Argument von  $u_*$  in Polarkoordinaten gegeben ist.  $-\partial_\varphi$ ,  $-\partial_x$  und  $-\partial_y$  stellen zudem die infinitesimalen Generatoren der Gruppenaktion dar. Wir erhalten damit:

**Lemma 1**  $E_*^c$  wird von  $\partial_x u_*$ ,  $\partial_y u_*$  und  $\partial_\varphi u_*$  aufgespannt.

Sandstede, Scheel und Wulff [5] verlangen vom verallgemeinerten Eigenraum  $E_*^c$  aus Hypothese 3 nur, dass er endlich-dimensional ist. Obige Überlegungen zeigen, dass  $E_*^c$  stets mindestens dreidimensional ist.

Aufgrund der Kettenregel und der Äquivarianz des Flusses  $\phi_t$  gilt:

$$D\phi_t(\rho_g u_*) = \rho_g D\phi_t(u_*) \rho_g^{-1} \quad \text{für alle } g \in G. \quad (2.5)$$

Nützlich ist der folgende Satz, der eine Integraldarstellung des Operators  $P_*$  liefert (siehe z.B. Kato [7]), dabei bezeichne  $W_*$  den Kern der Spektralprojektion  $P_*$ :

**Satz 2** *Mit Hilfe des Dunford-Taylor-Integrals lässt sich die Spektralprojektion  $P_*$  des beschränkten linearen Operators  $D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)$  darstellen als*

$$P_* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \lambda - D\phi_{2\pi/w_*}(u_*) \right)^{-1} d\lambda, \quad (2.6)$$

wobei  $\gamma$  eine geschlossene, positiv orientierte Jordan-Kurve in  $\mathbb{C}$  ist, die den Eigenwert 1 des Operators  $D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)$  im Inneren enthält und das restliche Spektrum im Äußeren.

Ferner ist  $Y = P_*Y \oplus (1 - P_*)Y = E_*^c \oplus W_*$  und  $D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)$  lässt  $E_*^c$  und  $W_*$  invariant.  $D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)|_{E_*^c} = id|_{E_*^c}$  hat  $\{1\}$  als Spektrum und  $D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)|_{W_*} \in L(W_*)$  besitzt das restliche Spektrum von  $D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)$ .

**Lemma 2** *Die direkte Summe  $Y = E_*^c \oplus W_*$  zerlegt  $\rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)$ :*

$$\begin{aligned} \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)|_{E_*^c} &\in L(E_*^c), \\ \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)|_{W_*} &\in L(W_*). \end{aligned}$$

**Beweis des Lemma 2:** Es reicht zu zeigen, dass  $\rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)$  mit  $P_*$  vertauscht, denn dann folgt unmittelbar  $\rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)|_{E_*^c} \in L(E_*^c)$ . Außerdem vertauscht dann  $\rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)$  auch mit  $id - P_*$ , was impliziert, dass  $\rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)|_{W_*}$  in  $L(W_*)$  liegt.

Es gilt unter Beachtung der Gleichung (2.5):

$$\begin{aligned} &D\phi_{2\pi/w_*}(u_*) \cdot \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*) \\ &= \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_{2\pi/w_*}(\phi_t(u_*)) D\phi_t(u_*) \\ &= \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_{2\pi/w_*+t}(u_*) \\ &= \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(\phi_{2\pi/w_*}(u_*)) D\phi_{2\pi/w_*}(u_*) \\ &= \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*) \cdot D\phi_{2\pi/w_*}(u_*). \end{aligned}$$

Damit kommutiert  $\rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)$  auch mit  $\lambda - D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)$  und folglich auch mit  $(\lambda - D\phi_{2\pi/w_*}(u_*))^{-1}$ . Die Dunford-Taylor-Integraldarstellung von  $P_*$  aus Satz 2 liefert schließlich, dass  $\rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)$  sogar mit  $P_*$  vertauscht.  $\blacksquare$

Es folgt aus der Spektralannahme Hypothese 3:

**Lemma 3** *Es existieren Konstanten  $C > 0$  und  $\gamma > 0$ , so dass*

$$\|D\phi_t(\rho_g u_*)|_{\rho_g W_*}\| < C e^{-\gamma t} \quad (2.7)$$

für alle  $t > 0$  und  $g \in G$  gilt.

**Beweis des Lemma 3:**  $\Theta(t) := \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*) \mid_{W_*} \in L(W_*)$  (beachte Lemma 2) ist eine starkstetige Halbgruppe:

- $\Theta(0) = id$ .
- $t \mapsto \Theta(t)y$  ist stetig für alle  $y \in W_*$ , bedenke die Starkstetigkeit der Gruppenaktion.
- $\Theta(s)\Theta(t) = \rho_{(R_{-\omega_* \cdot s}, 0)} D\phi_s(u_*) \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)$   
 $= \rho_{(R_{-\omega_* \cdot (s+t)}, 0)} D\phi_s(\phi_t(u_*)) D\phi_t(u_*)$   
 $= \rho_{(R_{-\omega_* \cdot (s+t)}, 0)} D\phi_{s+t}(u_*) = \Theta(s+t)$ .

Insbesondere ist  $\Theta(t)$  eine starkstetige Halbgruppe, für die bekannterweise die Abschätzung (2.7) mit geeigneten Konstanten  $C > 0$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$  gilt. Wir werden nun zeigen, dass  $\gamma$  negativ gewählt werden kann.

Aus der Spektralannahme und der Definition des Spektralradius folgt, dass ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  und ein  $0 < \kappa < 1$  existieren mit

$$\|D\phi_{2\pi n/w_*}(u_*)\| = \|(D\phi_{2\pi/w_*}(u_*))^n\| \leq \kappa^n \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Es existiert daher auch ein  $C_1 > 0$  mit

$$\|D\phi_{2\pi n/w_*}(u_*)\| \leq C_1 \cdot \kappa^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da außerdem

$$\sup_{t \in [0, 2\pi/w_*]} \|D\phi_t(u_*)\| < \infty$$

gilt, folgt (2.7). ■

## 2.3 Umformulierung der Spektralannahme

Wir werden eine andere Formulierung für Hypothese 3 angeben. Dazu betrachten wir die Linearisierung des Vektorfeldes an unserer rotierenden Welle  $u_*$  in einem mitbewegten Koordinatensystem:

$$L := D\Delta + \omega_* \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_u F(u_*). \quad (2.8)$$

Es gibt folgenden Zusammenhang zwischen  $L$  und  $D\phi_{2\pi/w_*}(u_*)$ :

**Lemma 4** (Wulff [10])  $\rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*)$  erzeugt auf  $Y$  eine  $C^0$ -Halbgruppe mit Generator  $L$ , d.h.

$$\exp(Lt) = \rho_{(R_{-\omega_* \cdot t}, 0)} D\phi_t(u_*).$$

**Lemma 5** (Sandstede, Scheel, Wulff [5]) Wenn  $\text{spec}(L) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) \geq 0\}$  eine Spektralmenge des Operators  $L$  ist mit assoziierter Spektralprojektion  $P_*$ , die  $\dim R(P_*) = 3$  und

$$\|\exp(Lt) |_{N(P_*)}\| \leq C \exp(-\beta t),$$

mit Konstanten  $C, \beta > 0$  erfüllt, dann ist auch Hypothese 3 erfüllt.

## 2.4 Das gestörte System

Nun werden wir das Vektorfeld stören mit Hilfe eines gittersymmetrischen Terms:

$$u_t = D\Delta u + F(u) + \varepsilon H(u). \quad (2.9)$$

Dabei sei  $H \in C^{k+2}(Y, X)$  und besitze  $\mathbb{Z}^2$ -Symmetrie, d.h. es gelte:

$$\rho_g(Hu) = H(\rho_g u)$$

für alle  $g \in G$  mit  $g=(0, S)$ ,  $S \in \mathbb{Z}^2$ . Zusätzlich gelte die Wachstumsbeschränkung

$$\|F(y)\|_X \leq K_2(1 + \|y\|_Y)$$

für ein  $K_2 > 0$ .

Daher lässt sich erneut Satz 1 anwenden. Man erhält also wieder einen Semifluss  $\phi_t^\varepsilon$ , der  $C^{k+2}$  von  $\varepsilon$  abhängt. Dieser existiert aufgrund der Wachstumsbeschränkung der Funktion  $H$  für alle  $t \geq 0$ .  $\phi_t^\varepsilon$  ist nunmehr nur noch  $\mathbb{Z}^2$ -äquivariant, da das Vektorfeld von (2.9) nur noch  $\mathbb{Z}^2$ -Äquivarianz besitzt, im Gegensatz zum ungestörten Fluss  $\phi_t$  bzw. zum ungestörten Vektorfeld von (2.1).

Ein Beispiel für so einen Störungsterm ist  $Hu = h \cdot u$ , mit  $h$  aus  $L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , das  $\mathbb{Z}^2$ -Symmetrie besitzt. Der Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto h \cdot u \end{aligned}$$

ist ein beschränkter linearer Operator von  $Y$  nach  $X$ .

Andere  $\mathbb{Z}^2$ -äquivariante beschränkte lineare Operatoren, kann man sich als Integraloperatoren definieren.





# Kapitel 3

## Reduktion auf die Zentrumsmanifoldigkeit

### 3.1 Das Theorem

**Theorem 1 (Reduktion)** *Gegeben sei das gestörte System (2.9). Das ungestörte System (2.1) erfülle die Hypothesen 1, 2 und 3. Dann existiert für  $\varepsilon$  hinreichend klein eine  $\mathbb{Z}^2$ -invariante Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon \subset Y$ , die invariant unter  $\phi_t^\varepsilon$  für alle  $t \geq 0$  ist. Ferner ist  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  eine lokal exponentiell anziehende  $C^{k,1}$ -Mannigfaltigkeit, die auch  $C^{k,1}$  in  $\varepsilon$  ist.*

Ein entsprechender Satz für Reaktions-Diffusions-Systeme ohne symmetriebrechenden Störterm wurde zuerst von Sandstede, Scheel und Wulff [5] bewiesen. Sie weisen allerdings auch darauf hin, dass für ein gestörtes System ähnliche Resultate gelten. Ihre Annahmen sind etwas weniger strikt: Einerseits fordern sie nicht Hypothese 2(iii), sie lassen also mehrarmige Spiralwellen zu, und andererseits verlangen sie in Hypothese 3 nicht, dass der verallgemeinerte Eigenraum  $E_*^c$  nur dreidimensional (siehe Lemma 1) ist, sondern erlauben daher, dass die invariante Mannigfaltigkeit mehr als drei Dimensionen besitzt.

Das Ziel dieser Arbeit ist, den Beweis für die spezielle Störung der Symmetriebrechung von der  $SE(2)$ - zur  $\mathbb{Z}^2$ -Symmetrie darzulegen. Der Beweis erfolgt ebenso wie in dem oben genannten Artikel mit Hilfe der Graphentransformation und eines Fixpunktargumentes. Doch werden wir hier im Gegensatz zu Sandstede, Scheel und Wulff [5] nicht nur eine kurze Beweisskizze liefern, sondern einen ausführlichen Beweis.

Allerdings wird in dieser Arbeit von der persistierenden Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  nicht gezeigt, dass sie  $C^{k+1}$  ist, obwohl das sicherlich richtig ist, sondern es wird nur gezeigt, dass sie  $C^{k,1}$  ist, was keine große Einschränkung darstellt,

aber den Beweis vereinfacht. Ebenso beweisen wir nur, dass  $\mathcal{M}_*^\varepsilon C^{k,1}$  von  $\varepsilon$  abhängt.

## 3.2 Parametrisierung

Wir werden in diesem Abschnitt mit Hilfe des impliziten Funktionensatzes Koordinaten in der Nähe des Gruppenorbits  $Gu_*$  bereitstellen. Die Parametrisierung erfolgt entlang  $Gu_*$ .

Es sei daran erinnert, dass wir den Kern der Spektralprojektion  $P_*$  mit  $W_*$  bezeichnet haben und bereits gezeigt haben, dass  $E_*^c$  das Bild von  $P_*$  ist.

**Lemma 6** *Es existiert ein  $\eta > 0$ , so dass für alle  $y \in Y$  mit*

$$\text{dist}(y, Gu_*) < \eta$$

*sich  $y$  eindeutig in der Form*

$$y = u(y) + w(y)$$

*schreiben lässt mit  $u(y) = \rho_{g(y)}u_* \in Gu_*$  und  $w(y) \in \rho_{g(y)}W_*$ .*

Bevor wir Lemma 6 beweisen, leisten wir noch etwas Vorarbeit:

**Lemma 7** *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow L(Y) \\ g &\longmapsto \rho_g P_* \rho_{g^{-1}} \end{aligned}$$

*ist  $C^{k+1}$ .*

**Beweis des Lemma 7:** Wird die Projektion  $P_*$  nach Satz 2 als Dunford-Taylor-Integral aufgeschrieben, so erhält man:

$$\begin{aligned} \rho_g P_* \rho_{g^{-1}} &= \rho_g \left( \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \lambda - D\phi_{2\pi/w_*}(u_*) \right)^{-1} d\lambda \right) \rho_{g^{-1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \rho_g \left( \lambda - D\phi_{2\pi/w_*}(u_*) \right) \rho_{g^{-1}} \right)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \lambda - \rho_g D\phi_{2\pi/w_*}(u_*) \rho_{g^{-1}} \right)^{-1} d\lambda \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \lambda - D\phi_{2\pi/w_*}(\rho_g u_*) \right)^{-1} d\lambda \end{aligned} \tag{3.1}$$

Da  $u_*$  nach Hypothese 2(ii)  $C^{k+2}$  ist, ist  $g \mapsto D\phi_{2\pi/w_*}(\rho_g u_*)$  eine  $C^{k+1}$ -Funktion, daher ist auch die Resolvente  $(\lambda - D\phi_{2\pi/w_*}(\rho_g u_*))^{-1}$  in  $g$  eine  $C^{k+1}$ -Funktion. Schließlich reduziert das Integral nicht die Differenzierbarkeit, was den Beweis beendet. ■

**Lemma 8** *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow E_*^c \\ g &\longmapsto P_* \rho_{g^{-1}} v \end{aligned}$$

ist  $C^{k+1}$  für jedes  $v \in Y$ .

**Beweis des Lemma 8:** Die Aussage des Lemma folgt unmittelbar aus dem Lemma 1 und der Glattheit von  $u_*$ , Annahme 2(ii) und Lemma 7. ■

Nun sind wir gerüstet für die Herleitung der Parametrisierung:

**Beweis des Lemma 6:** Nach Lemma 8 ist folgende Abbildung  $C^{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \Xi : G \times Y &\longrightarrow E_*^c \\ (g, y) &\longmapsto P_* \rho_{g^{-1}} (y - \rho_g u_*). \end{aligned}$$

Für die Abbildung  $\Xi$  ist

$$\Xi(id, u_*) = 0 \tag{3.2}$$

und die Ableitung nach  $g$  an der Stelle  $(id, u_*)$  lautet:

$$\partial_g \Xi(id, u_*) = \partial_g |_{g=id} P_* \rho_{g^{-1}} (u_* - \rho_g u_*) = \partial_g |_{g=id} P_* \rho_{g^{-1}} (u_*). \tag{3.3}$$

Damit ist  $\partial_g \Xi(id, u_*) : \mathfrak{g} \longrightarrow E_*^c$  eine surjektive lineare Abbildung zwischen zwei dreidimensionalen Räumen, dabei bezeichne  $\mathfrak{g}$  die Lie-Algebra von  $G$ . Daher ist diese Abbildung beschränkt invertierbar und der implizite Funktionensatz liefert die Existenz einer Umgebung  $V(id)$  von  $id$  in  $G$ , eines  $\eta > 0$  und einer  $C^{k+1}$ -Funktion

$$P_G : U_\eta(u_*) := \{y \in Y; \|y - u_*\| \leq \eta\} \longrightarrow V(id),$$

so dass für alle  $y \in U_\eta(u_*)$  gilt:

$$\Xi(P_G(y), y) = 0.$$

Aus der Definition von  $\Xi$  ergibt sich dann sogar für alle  $g \in G$ :

$$\Xi(gP_G(y), \rho_g y) = 0.$$

Durch diese Beobachtung motiviert definieren wir  $P_G$  auf einer Umgebung  $U_\eta(Gu_*) := \{\rho_g y; g \in G, y \in U_\eta(u_*)\} = \{y \in Y; \text{dist}(y, Gu_*) < \eta\}$  von ganz  $Gu_*$  durch:

$$\begin{aligned} P_G : U_\eta(Gu_*) &\longrightarrow G \\ \rho_g y &\longmapsto \rho_g P_G(y). \end{aligned}$$

Es kann gezeigt werden, dass die so erweiterte Projektion  $P_G$  wohldefiniert ist, was allerdings noch etwas Arbeit erfordert. Dies liefert uns automatisch, dass  $P_G$   $G$ -äquivariant und  $C^{k+1}$  ist.

Bezeichne mit

$$\begin{aligned} P_{Gu_*} : U_\eta(Gu_*) &\longrightarrow Gu_* \\ P_{Gu_*}(y) &\longmapsto \rho_{P_G(y)} u_* \end{aligned}$$

die Projektion auf den Gruppenorbit  $Gu_*$ .  $P_{Gu_*}$  ist ebenso wie  $P_G$  eine  $G$ -äquivariante  $C^{k+1}$ -Funktion. Entsprechendes gilt für die Funktion

$$P_{W_*} := id - P_{Gu_*} : U_\eta(Gu_*) \longrightarrow Y,$$

die außerdem noch folgendes für  $y \in U_\eta(Gu_*)$  erfüllt:

$$P_{W_*}(y) \in \rho_{P_G(y)} W_*.$$

### 3.3 Weitere Eigenschaften

Wir werden nun die Linearisierungen von  $P_{Gu_*}$  und  $P_{W_*}$  genauer untersuchen. Wir betrachten zunächst  $P_{Gu_*}$ . Die  $G$ -Äquivarianz liefert wieder

$$\begin{aligned} DP_{Gu_*}(\rho_g u_*) &= \rho_g DP_{Gu_*}(u_*) \rho_{g^{-1}} \quad \text{für alle } g \in G \text{ und damit} \\ DP_{Gu_*}(\rho_g u_*) &\in L(\rho_g E_*^c), \end{aligned} \tag{3.4}$$

da  $T_{\rho_g u_*} Gu_* = \rho_g E_*^c$ . Entsprechendes gilt für  $P_{W_*}$ .

**Lemma 9** *Es gelten folgende Gleichungen für alle  $g \in G$ :*

$$\begin{aligned} DP_{Gu_*}(\rho_g u_*) &= \rho_g P_* \rho_{g^{-1}}, \\ DP_{W_*}(\rho_g u_*) &= \rho_g (id - P_*) \rho_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

**Beweis des Lemma 9:** Es reicht nach (3.4) den Fall  $g = id$  zu betrachten. Natürlich muss auch nur die Gleichung für die Projektion  $P_{Gu_*}$  betrachtet werden, die für  $P_{W_*}$  folgt daraus. Differenziert man die Gleichung

$$P_{Gu_*}(u_* + w) = u_* \quad \text{mit } w \in W_*$$

nach  $w \in W_*$  an der Stelle  $w = 0$ , so erhält man:

$$DP_{Gu_*}(u_*)|_{W_*} = 0.$$

Wird die Gleichung

$$P_{Gu_*}(u) = u$$

nach  $u \in Gu_*$  an der Stelle  $u = u_*$  differenziert, so folgt:

$$DP_{Gu_*}(u_*)|_{E_*^c} = id|_{E_*^c}.$$

■

**Lemma 10** Für jedes  $t > 0$  und jedes  $\mu > 0$  existiert ein  $\hat{\varepsilon} > 0$  und ein  $\hat{\eta} > 0$ , so dass für alle  $\varepsilon < \hat{\varepsilon}$  und  $y \in U_{\hat{\eta}}(Gu_*) = \{y \in Y; \text{dist}(y, Gu_*) < \hat{\eta}\}$  gilt:

$$\|\phi_t^\varepsilon(y) - \phi_t(y)\| < \mu.$$

Eine entsprechende Abschätzung gilt natürlich auch, wenn man  $\phi_t^\varepsilon$  durch die Funktion  $P_{Gu_*} \circ \phi_t^\varepsilon$  oder  $P_{W_*} \circ \phi_t^\varepsilon$  ersetzt.

**Beweis des Lemma 10:** Bezeichne den Fundamentalbereich von  $G$  mit  $\tilde{G}$ , also  $\tilde{G} := \{(R, S_{x_1}, S_{x_2}) \in G; 0 \leq S_{x_1}, S_{x_2} \leq 1\}$ .  $\tilde{G}$  und daher auch  $\tilde{Gu}_*$  sind kompakt. Die Stetigkeit unserer Flüsse ermöglicht uns, für jedes  $g \in \tilde{G}$  ein  $\hat{\varepsilon}_g > 0$  und eine  $\hat{\eta}_g$ -Umgebung  $U_{\hat{\eta}_g}(\rho_g u_*)$  von  $\rho_g u_*$  zu finden, so dass

$$\|\phi_t^\varepsilon(y) - \phi_t(y)\| < \mu$$

für alle  $\varepsilon < \hat{\varepsilon}_g$  und  $y \in U_{\hat{\eta}_g}(\rho_g u_*)$  erfüllt wird.

Die Kompaktheit von  $\tilde{Gu}_*$  sichert die Existenz von  $g_1, g_2, \dots, g_n \in \tilde{G}$ , so dass  $\tilde{Gu}_*$  von den Umgebungen  $U_{\hat{\eta}_{g_1}}(\rho_{g_1} u_*), U_{\hat{\eta}_{g_2}}(\rho_{g_2} u_*), \dots, U_{\hat{\eta}_{g_n}}(\rho_{g_n} u_*)$  überdeckt wird. Setze nun

$$\hat{\varepsilon} := \min_{1 \leq i \leq n} \hat{\varepsilon}_{g_i}$$

und wähle  $\eta > 0$  geeignet, was infolge der endlichen offenen Überdeckung von  $\tilde{Gu}_*$  möglich ist. Aufgrund der Gitteräquivarianz der Flüsse erfüllen  $\hat{\varepsilon}$  und  $\hat{\eta}$  ihre Aufgabe auf dem ganzen Gruppenorbit  $Gu_*$ . ■

### 3.4 Beweis des Haupttheorems

In diesem Abschnitt wird die Reduktion auf die Zentrumsmannigfaltigkeit mit der Methode der Graphentransformation bewiesen. Es wird zunächst gezeigt, dass die Graphentransformation wohldefiniert ist und dann dass sie eine Kontraktion darstellt. Der Graph des Fixpunktes wird dann unsere Zentrumsmannigfaltigkeit darstellen.

### 3.4.1 Die Graphentransformation $\Gamma_T^\varepsilon$

Sei

$$\Sigma := \{\sigma \in Lip_1(Gu_*, Y); \sigma(\rho_g u_*) \in \rho_g W_*; \|\sigma(\rho_g u_*)\| \leq \delta\}$$

der metrische Raum der Lipschitz-stetigen Abbildungen auf dem Gruppenorbit  $Gu_*$  versehen mit der Metrik

$$d(\sigma_1, \sigma_2) := \sup_{u \in Gu_*} \|\sigma_1(u) - \sigma_2(u)\| = \|\sigma_1 - \sigma_2\|_\infty.$$

$(\Sigma, d)$  ist als abgeschlossene Teilmenge von  $BC^0(Gu_*, Y)$  ein vollständiger metrischer Raum.

Für  $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$  und  $\bar{\varepsilon}$  und  $0 < \delta$  hinreichend klein und  $T$  hinreichend groß wird auf  $\Sigma$  eine Kontraktion  $\Gamma_T^\varepsilon$  definiert durch die lokale nichtlineare Graphentransformation (siehe Abb. 3.1)

$$\Gamma_T^\varepsilon(\sigma) := P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)]^{-1}. \quad (3.5)$$

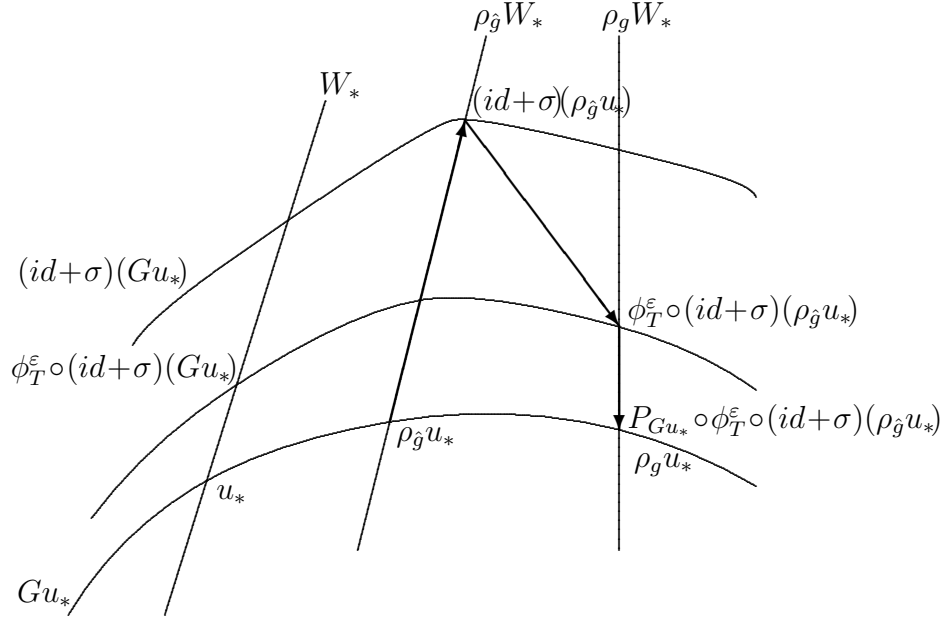


Abbildung 3.1: Graphentransformation

### 3.4.2 Der Term $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$

Zunächst eine Abschätzung, die wir für den Beweis benötigen. Nach Lemma 3 lässt sich  $T$  so groß wählen, dass

$$\|D\phi_T(u_*)|_{W_*}\| < \frac{1}{10} \quad (3.6)$$

gilt.

Wir betrachten zuerst den Term  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$  der Graphentransformation (3.5) und zeigen, dass er wohldefiniert ist und eine Lipschitz-Inverse besitzt. Nach Lemma 10 können wir  $\varepsilon$  und  $\delta$  so klein wählen, dass  $\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)$  für alle  $g \in G$  stets in der Umgebung  $U_\eta(Gu_*)$  von  $Gu_*$  landet, wo die Projektion  $P_{Gu_*}$  definiert ist.

Nun werden wir zeigen, dass  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$  injektiv und die Inverse Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante ungefähr 1 ist. Bevor wir uns die Abschätzungen anschauen, erst einige Umformungen:

$$\begin{aligned} P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*) &= P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*) \\ &+ \varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{Gu_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma(\rho_g u_*))) \\ &\quad \cdot D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma(\rho_g u_*)) dt, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*) &= P_{Gu_*}(\phi_T(\rho_g u_*)) \\ &+ DP_{Gu_*}(\phi_T(\rho_g u_*)) D\phi_T(\rho_g u_*) \sigma(\rho_g u_*) \\ &+ o_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei ist  $o_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*))$  wie aus der Definition der Ableitung bekannt ein „klein o“ in  $\sigma(\rho_g u_*)$ , wobei die Ableitung an der Stelle  $\rho_g u_*$  betrachtet wird. Aus der  $G$ -Äquivarianz der Projektion und des Flusses  $\phi$  ergibt sich für alle  $g, \tilde{g} \in G$ :

$$\rho_g \circ o_{\rho_{\tilde{g}} u_*} \circ \rho_{g^{-1}} = o_{\rho_{g\tilde{g}} u_*}. \quad (3.9)$$

Es folgt eine Lipschitzabschätzung für den Term  $o_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*))$ :

$$\begin{aligned} &\|o_{\rho_{g_1} u_*}(\sigma(\rho_{g_1} u_*)) - o_{\rho_{g_2} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*))\| \\ &\leq \|o_{\rho_{g_1} u_*}(\sigma(\rho_{g_1} u_*)) - o_{\rho_{g_1} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*))\| \\ &\quad + \|o_{\rho_{g_1} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*)) - o_{\rho_{g_2} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*))\| \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bezeichne mit  $D_1 o_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*))$  die Ableitung von  $o_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*))$  nach dem Index und mit  $D_2 o_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*))$  die Ableitung nach dem eingeklammerten Argument.

$D_1 o_{\rho_g u_*}(0) = 0$  impliziert die Existenz einer Umgebung  $U$  von  $u_*$  in  $Gu_*$ , so dass für  $\rho_{g_1} u_*, \rho_{g_2} u_* \in U$  und  $\delta$  klein genug gewählt gilt:

$$\|o_{\rho_{g_1} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*)) - o_{\rho_{g_2} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*))\| < \frac{1}{10} \|\rho_{g_1} u_* - \rho_{g_2} u_*\|. \quad (3.11)$$

$D_2 o_{\rho_g u_*}(0) = 0$  liefert nun nach eventueller Verkleinerung der Umgebung  $U$  und von  $\delta$

$$\|o_{\rho_{g_1} u_*}(\sigma(\rho_{g_1} u_*)) - o_{\rho_{g_2} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*))\| < \frac{1}{10} \|\rho_{g_1} u_* - \rho_{g_2} u_*\|. \quad (3.12)$$

Nach Gleichung (3.9) gelten die Abschätzungen (3.11) und (3.12) sogar für alle  $\rho_{g_1} u_*, \rho_{g_2} u_* \in \rho_g U$  für jedes  $g \in G$ .

Aus den obigen Gleichungen (3.10), (3.11) und (3.12) folgt:

$$\|o_{\rho_{g_1} u_*}(\sigma(\rho_{g_1} u_*)) - o_{\rho_{g_2} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*))\| < \frac{1}{5} \|\rho_{g_1} u_* - \rho_{g_2} u_*\|, \quad (3.13)$$

für alle  $\rho_{g_1} u_*, \rho_{g_2} u_* \in \rho_g U$  für jedes  $g \in G$  und  $\sigma \in \Sigma$ .

Nun untersuchen wir den nächsten Term der rechten Seite der Gleichung (3.8). Es ist

$$\|P_{Gu_*}(\phi_T(\rho_{g_1} u_*)) - P_{Gu_*}(\phi_T(\rho_{g_2} u_*))\| = \|\rho_{g_1} u_* - \rho_{g_2} u_*\|, \quad (3.14)$$

da  $u_*$  ein relatives Gleichgewicht ist und damit der Zeitorbit von  $u_*$  im Gruppenorbit  $Gu_*$  enthalten ist (beachte Hypothese 2(i)).

Schließlich untersuchen wir den letzten Term der rechten Seite von (3.8): Es ist

$$DP_{Gu_*}(\phi_T(\rho_g u_*)) D\phi_T(\rho_g u_*) \sigma(\rho_g u_*) = 0, \quad (3.15)$$

da  $\sigma(\rho_g u_*) \in \rho_g W_*$  und  $D\phi_T(\rho_g u_*)|_{\rho_g W_*} \in L(\rho_g W_*)$  nach Lemma 2 bzw. Gleichung (2.5) gilt und schließlich  $DP_{Gu_*}(\phi_T(\rho_g u_*))$  nach Lemma 9 auf dem Raum  $\rho_g W_*$  verschwindet.

Damit erhalten wir insgesamt aus Gleichung (3.8), wenn wir (3.13), (3.14) und (3.15) beachten, die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1} u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2} u_*)\| \\ & \geq \|P_{Gu_*}(\phi_T(\rho_{g_1} u_*)) - P_{Gu_*}(\phi_T(\rho_{g_2} u_*))\| \\ & \quad - \|o_{\rho_{g_1} u_*}(\sigma(\rho_{g_1} u_*)) - o_{\rho_{g_2} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*))\| \\ & \geq \frac{4}{5} \|\rho_{g_1} u_* - \rho_{g_2} u_*\| \end{aligned} \quad (3.16)$$

für alle  $\rho_{g_1} u_*, \rho_{g_2} u_* \in \rho_g U$  für jedes  $g \in G$  und  $\sigma \in \Sigma$ .

Wir werden anschließend eine entsprechende Abschätzung für den Term  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$  herleiten. Betrachte hierfür den Integralterm der rechten Seite der Gleichung (3.7):

$$\varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{Gu_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma(\rho_g u_*))) D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma(\rho_g u_*)) dt.$$



Zunächst untersuchen wir den Integranden. Da

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_0^+ \times Y &\longrightarrow Y \\ (\xi, y) &\longmapsto DP_{Gu_*}(\phi_T^\xi(y))D_\varepsilon\phi_T^\xi(y)\end{aligned}$$

eine stetige Abbildung ist, die nach  $y$  stetig differenzierbar ist, ist sie lokal Lipschitz-stetig in  $y$  gleichmäßig in  $\xi$  für  $\xi$  hinreichend klein. Es existiert also eine Konstante  $L_1 > 0$ , so dass für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in U$ ,  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  nach eventueller Verkleinerung von  $U$  bzw.  $\bar{\varepsilon}$  gilt:

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{Gu_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_1}u_* + \sigma(\rho_{g_1}u_*)))D_\varepsilon\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_1}u_* + \sigma(\rho_{g_1}u_*))dt \\ &\quad - \varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{Gu_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_2}u_* + \sigma(\rho_{g_2}u_*)))D_\varepsilon\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_2}u_* + \sigma(\rho_{g_2}u_*))dt\| \\ &\leq \varepsilon L_1 \|(\rho_{g_1}u_* + \sigma(\rho_{g_1}u_*)) - (\rho_{g_2}u_* + \sigma(\rho_{g_2}u_*))\| \\ &\leq 2\varepsilon L_1 \|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\| \quad (\text{beachte } \sigma \text{ besitzt Lipschitz-Konstante } 1) \\ &\leq \frac{1}{10} \|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\|,\end{aligned}\tag{3.17}$$

aufgrund der  $\mathbb{Z}^2$ -Symmetrie des gestörten Flusses und der Gleichung (3.4) gilt diese Abschätzung sogar für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in \rho_{(0, S_1, S_2)}U$  für jedes  $(S_1, S_2)$  aus  $\mathbb{Z}^2$ .

Gleichungen (3.7), (3.16) und (3.17) ergeben zusammen:

$$\begin{aligned}&\|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*)\| \\ &\geq \|P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*)\| \\ &\quad - \varepsilon \left\| \int_0^1 DP_{Gu_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_1}u_* + \sigma(\rho_{g_1}u_*)))D_\varepsilon\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_1}u_* + \sigma(\rho_{g_1}u_*))dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 DP_{Gu_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_2}u_* + \sigma(\rho_{g_2}u_*)))D_\varepsilon\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_2}u_* + \sigma(\rho_{g_2}u_*))dt \right\| \\ &\geq \frac{7}{10} \|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\|,\end{aligned}\tag{3.18}$$

wieder für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in \rho_{(0, S_1, S_2)}U$  für jedes  $(S_1, S_2) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  und  $\sigma \in \Sigma$ .

Die Abschätzung (3.18) gilt also für  $\rho_{g_1}u_*$  und  $\rho_{g_2}u_*$  in einer Umgebung  $U$  von  $u_*$  in  $Gu_*$  (wähle hier  $(S_1, S_2) = (0, 0)$ ). Nun erhält man die gleiche Abschätzung auch für  $\rho_{g_1}u_*$  und  $\rho_{g_2}u_*$  in einer Umgebung von einem  $\rho_g u_*$  in

$Gu_*$  mit  $g \in G$ , wobei die entsprechenden  $\bar{\varepsilon}$  und  $\delta$  von  $g$  abhängen dürfen. Betrachtet man zunächst nur alle  $g$  aus  $\tilde{G}u_*$ , so erhält man, da  $\tilde{G}u_*$  kompakt ist, dass ein  $\nu > 0$ , eine Umgebung von  $\tilde{G}u_*$  in  $Gu_*$  und  $\bar{\varepsilon} > 0, \delta > 0$  unabhängig von  $g \in \tilde{G}$  existieren, so dass die Abschätzung (3.18) für alle  $\rho_{g_1}u_*$  und  $\rho_{g_2}u_*$  aus dieser Umgebung gilt, die  $\nu$ -nahe beieinander sind. Da die Abschätzung (3.18) sogar in allen  $\mathbb{Z}^2$ -Translationen von  $U$  gilt, liefert nun unsere Argumentation, dass (3.18) für alle  $\rho_{g_1}u_*$  und  $\rho_{g_2}u_*$  aus  $Gu_*$ ,  $\nu$ -nahe beieinander, erfüllt wird.

Aus Lemma 10 folgt, falls  $\bar{\varepsilon}$  und  $\delta$  eventuell noch etwas kleiner gewählt werden, dass für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in Gu_*$  gilt:

$$\begin{aligned}
& \|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \geq \|P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*)\| - \frac{1}{10}\nu \\
& \geq \|P_{Gu_*} \circ \phi_T(\rho_{g_1}u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \quad - \|P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T(\rho_{g_1}u_*)\| \\
& \quad - \|P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T(\rho_{g_2}u_*)\| - \frac{1}{10}\nu.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Wenn noch bedacht wird, dass aufgrund der Äquivarianz  $P_{Gu_*} \circ \phi_T(\rho_g u_*)$  gleich  $\rho_g \circ P_{Gu_*} \circ \phi_T(u_*)$  ist und alle  $\rho_g$  Isometrien sind, erhält man für alle  $g \in G$  nach eventueller Verkleinerung von  $\delta$ :

$$\begin{aligned}
& \|P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T(\rho_g u_*)\| \\
& = \|P_{Gu_*} \circ \phi_T(\rho_{g^{-1}}\sigma(\rho_g u_*) + u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T(u_*)\| \leq \frac{1}{10}\nu.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Aus Gleichung (3.19) und (3.20) folgt für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in Gu_*$ :

$$\begin{aligned}
& \|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \geq \|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\| - \frac{3}{10}\nu.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in Gu_*$  mit  $\|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\| \geq \nu$ :

$$\begin{aligned}
& \|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \geq \frac{7}{10}\|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\|.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Wir erhalten also insgesamt aus (3.18), den anschließenden Bemerkungen und (3.21) die folgende Proposition:

**Proposition 1** *Es existieren  $\bar{\varepsilon} > 0, \delta > 0$ , so dass für alle  $g_1, g_2 \in G$ ,  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  und  $\sigma \in \Sigma$  gilt:*

$$\begin{aligned} & \|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1} u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2} u_*)\| \\ & \geq \frac{7}{10} \|\rho_{g_1} u_* - \rho_{g_2} u_*\|. \end{aligned}$$

Nach Proposition 1 besitzt die Funktion  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$  eine Inverse, die global Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante  $\frac{10}{7}$ .

Im Rest dieses Unterschnitts werden wir noch eine Proposition beweisen:

**Proposition 2** *Die Funktion  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) : Gu_* \rightarrow Gu_*$  ist surjektiv.*

**Beweis der Proposition 2:** Zuerst zeigen wir die Offenheit der Menge  $M := P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)[Gu_*]$  in  $Gu_*$  und dann zeigen wir die Abgeschlossenheit. Da  $Gu_*$  zusammenhängend ist, folgt  $M = Gu_*$ , also die Surjektivität.

$Gu_* \subset Y$  ist abgeschlossen, denn sei  $\rho_{(R_1, S_1)} u_*, \rho_{(R_2, S_2)} u_*, \dots \in Gu_*$  mit  $\rho_{(R_n, S_n)} u_* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0 \in Y$  in der  $Y$ -Norm. Aus Kompaktheitsgründen können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bereits eine konvergente Folge ist mit Grenzwert  $R_0$ . Wenn nun auch  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $\mathbb{R}^2$  beschränkte Folge wäre, dann könnten wir o.B.d.A. annehmen, dass  $S_n$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $S_0 \in \mathbb{R}^2$  ist. Dann würde aus der Starkstetigkeit der Gruppenaktion, siehe (2.4), folgen:

$$\rho_{(R_n, S_n)} u_* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho_{(R_0, S_0)} u_* \in Gu_*$$

in der  $X = L^2$ -Norm, also wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes auch in der  $Y$ -Norm. Es bleibt zu zeigen, dass die Existenz einer Teilfolge  $(S_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\|S_{n_k}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$  auf einen Widerspruch führt. Angenommen es existiert so eine Folge, dann kann aber  $\rho_{(R_{n_k}, S_{n_k})} u_*$  nicht in der  $X$ -Norm, d.h. der  $L^2$ -Norm, gegen  $y_0$  konvergieren, und damit auch nicht in der  $Y$ -Norm, d.h. der  $X^\alpha$ -Norm. Dies ist der Widerspruch und es wurde die Abgeschlossenheit von  $Gu_*$  gezeigt.

Nun zeigen wir die Abgeschlossenheit von  $M$ . Sei eine Folge in  $M$  gegeben,  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}), P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}), \dots$ , die in  $Y$  konvergiert. Proposition 1 liefert uns, dass dann auch die  $\rho_{g_1} u_*, \rho_{g_2} u_*, \dots$  konvergieren. Da  $Gu_*$  abgeschlossen ist liegt der Grenzwert  $u_0$  in  $Gu_*$ . Die Stetigkeit von  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$  liefert nun, dass die Folge  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}), P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}), \dots$  gegen  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(u_0) \in Gu_*$  konvergiert. Dies zeigt die Abgeschlossenheit von  $M$ .

Zuletzt zeigen wir, dass  $M$  in  $Gu_*$  offen ist. Da  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$  von  $Gu_*$  nach  $Gu_*$  eine stetige Abbildung ist, die auf das Bild  $M$  nach Proposition 1 sogar einen Homöomorphismus darstellt, ist nach dem Satz über die Gebietstreue von Brouwer  $M$  eine offene Teilmenge von  $Gu_*$ . ■

### 3.4.3 Der Term $P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$

In diesem Unterabschnitt werden wir den zweiten Term der Graphentransformation  $\Gamma_T^\varepsilon$ , siehe (3.5), untersuchen. Wir werden zeigen, dass der Term  $P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$  Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante etwas größer als 1. Zunächst erhalten wir wieder wie im vorigen Abschnitt folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*) &= P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*) \\ &+ \varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{W_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma(\rho_g u_*))) \\ &\quad \cdot D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma(\rho_g u_*)) dt, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*) &= P_{W_*}(\phi_T(\rho_g u_*)) \\ &+ DP_{W_*}(\phi_T(\rho_g u_*)) D\phi_T(\rho_g u_*) \sigma(\rho_g u_*) \\ &+ \tilde{o}_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wieder ist  $\tilde{o}_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*))$  ein „klein o“ in  $\sigma(\rho_g u_*)$ , wobei die Ableitung an der Stelle  $\rho_g u_*$  betrachtet wird. Aus der  $G$ -Äquivarianz der Projektion und des Flusses  $\phi$  folgt wie im letzten Unterabschnitt

$$\rho_g \circ \tilde{o}_{\rho_{\bar{g}} u_*} \circ \rho_g^{-1} = \tilde{o}_{\rho_{g\bar{g}} u_*}. \quad (3.24)$$

Wir erhalten für  $\tilde{o}$  eine zu (3.13) analoge Gleichung:

$$\|\tilde{o}_{\rho_{g_1} u_*}(\sigma(\rho_{g_1} u_*)) - \tilde{o}_{\rho_{g_2} u_*}(\sigma(\rho_{g_2} u_*))\| < \frac{1}{5} \|\rho_{g_1} u_* - \rho_{g_2} u_*\|, \quad (3.25)$$

für alle  $\rho_{g_1} u_*, \rho_{g_2} u_* \in \rho_g U$  für jedes  $g \in G$  und  $\sigma \in \Sigma$ , falls  $\delta$  eventuell etwas kleiner gewählt wird und auch die Umgebung  $U$  von  $u_*$ , bekannt aus dem letzten Unterabschnitt, eventuell etwas verkleinert wird.

Betrachten wir nun den nächsten Term der Gleichung (3.23). Es ist

$$P_{W_*}(\phi_T(\rho_g u_*)) = 0 \quad \text{für alle } g \in G, \quad (3.26)$$

da  $\phi_T(\rho_g u_*) \in Gu_*$ .

Der letzte Term der rechten Seite von (3.23) erfüllt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\sigma(\rho_{g_1}u_*) \\
& \quad - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_2}u_*))D\phi_T(\rho_{g_2}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \qquad \leq \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\sigma(\rho_{g_1}u_*) \\
& \qquad \quad - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \qquad + \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*) \\
& \qquad \quad - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_2}u_*))D\phi_T(\rho_{g_2}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*)\|. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in \rho_g U$  und jedes  $g \in G$  bei eventueller Verkleinerung von  $U$  und  $\delta$  gilt:

$$\begin{aligned}
& |DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*) \\
& \quad - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_2}u_*))D\phi_T(\rho_{g_2}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \qquad \leq \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*) \\
& \qquad \quad - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_2}u_*))D\phi_T(\rho_{g_2}u_*)\| \|\sigma(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \qquad \leq L_2\delta \|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\| \quad (L_2 \text{ sei lok. Lipschitz-Konst.}) \tag{3.28} \\
& \qquad \leq \frac{1}{10} \|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\sigma(\rho_{g_1}u_*) \\
& \quad - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \qquad \leq \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\| \|\sigma(\rho_{g_1}u_*) - \sigma(\rho_{g_2}u_*)\| \\
& \qquad \leq \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\| \|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\| \tag{3.29} \\
& \qquad \leq \frac{1}{10} \|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\|,
\end{aligned}$$

denn nach Lemma 9 gilt:

$$\begin{aligned}
& DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*) \big|_{\rho_{g_1}E^c} = 0 \quad \text{und} \\
& DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*) \big|_{\rho_{g_1}W_*} = D\phi_T(\rho_{g_1}u_*) \big|_{\rho_{g_1}W_*},
\end{aligned}$$

was zusammen mit der Abschätzung (3.6)

$$\|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\| \leq \frac{1}{10}$$

ergibt.

Aus den Abschätzungen (3.27), (3.28) und (3.29) folgt:

$$\begin{aligned} & \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\sigma(\rho_{g_1}u_*) \\ & - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_2}u_*))D\phi_T(\rho_{g_2}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*)\| \leq \frac{1}{5}\|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Aus der Gleichung (3.23) zusammen mit (3.25), (3.26) und (3.30) folgt:

$$\begin{aligned} & \|P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*)\| \\ & \leq \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_1}u_*))D\phi_T(\rho_{g_1}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*) \\ & \quad - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_{g_2}u_*))D\phi_T(\rho_{g_2}u_*)\sigma(\rho_{g_2}u_*)\| \\ & \quad + \|o_{\rho_{g_1}u_*}(\sigma(\rho_{g_1}u_*)) - o_{\rho_{g_2}u_*}(\sigma(\rho_{g_2}u_*))\| \\ & \leq \frac{2}{5}\|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\| \end{aligned} \quad (3.31)$$

für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in \rho_g U$  für jedes  $g \in G$  und  $\sigma \in \Sigma$ .

Das war die lokale Lipschitz-Stetigkeit des Terms  $P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)$ , es folgt die des Terms  $P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$ . Wir erhalten für den Integralterm der rechten Seite der Gleichung (3.22) eine zu (3.17) analoge Lipschitz-Abschätzung, so dass wir insgesamt aus (3.22) und (3.31) erhalten:

$$\begin{aligned} & \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*)\| \\ & \leq \|P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1}u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2}u_*)\| \\ & \quad + \varepsilon \left\| \int_0^1 DP_{W_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_1}u_* + \sigma(\rho_{g_1}u_*)))D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_1}u_* + \sigma(\rho_{g_1}u_*))dt \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 DP_{W_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_2}u_* + \sigma(\rho_{g_2}u_*)))D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_{g_2}u_* + \sigma(\rho_{g_2}u_*))dt \right\| \\ & \leq \frac{1}{2}\|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\|, \end{aligned} \quad (3.32)$$

sogar nicht nur lokal, denn wenn wir die der Abschätzung (3.18) anschließenden Erläuterungen wieder beachten, sehen wir: Es existiert ein  $\nu_2 > 0$ , so dass für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in Gu_*$  und  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\nu_2$ -nahe beieinander, die Abschätzung (3.32) gilt, wobei  $\bar{\varepsilon}$  und  $\delta$  eventuell verkleinert werden müssen.

Analog zum letzten Unterabschnitt (siehe (3.19),(3.20) und (3.21)) gilt nach Lemma 10 für alle  $\rho_{g_1}u_*, \rho_{g_2}u_* \in Gu_*$  mit  $\|\rho_{g_1}u_* - \rho_{g_2}u_*\| \geq \nu_2$ , wenn

man eventuell  $\bar{\varepsilon}$  und  $\delta$  wieder etwas kleiner wählt:

$$\begin{aligned}
& \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1} u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2} u_*)\| \\
& \leq \|P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1} u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2} u_*)\| + \frac{1}{10} \nu_2 \\
& \leq \|P_{W_*} \circ \phi_T(\rho_{g_1} u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T(\rho_{g_2} u_*)\| \\
& \quad + \|P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1} u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T(\rho_{g_1} u_*)\| \\
& \quad + \|P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2} u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T(\rho_{g_2} u_*)\| + \frac{1}{10} \nu_2 \\
& \leq \frac{3}{10} \nu_2 \leq \frac{1}{2} \nu_2 \leq \frac{1}{2} \|\rho_{g_1} u_* - \rho_{g_2} u_*\|.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Damit erhalten wir aus (3.18) und (3.33):

**Proposition 3** *Es existieren  $\bar{\varepsilon} > 0, \delta > 0$ , so dass für alle  $g_1, g_2 \in G$ ,  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  und  $\sigma \in \Sigma$  gilt:*

$$\begin{aligned}
& \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_1} u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_{g_2} u_*)\| \\
& \leq \frac{1}{2} \|\rho_{g_1} u_* - \rho_{g_2} u_*\|.
\end{aligned}$$

Wir werden noch eine Proposition beweisen, die später von Interesse sein wird:

**Proposition 4** *Es gilt für alle  $\sigma \in \Sigma$ :*

$$\|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)\|_\infty = \sup_{g \in G} \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)\| \leq \delta.$$

**Beweis der Proposition 4:** Wenn  $\bar{\varepsilon}$  eventuell etwas verkleinert wird, gilt nach Lemma 10 für alle  $g \in G$ ,  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  und  $\sigma \in \Sigma$ :

$$\begin{aligned}
\|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)\| & \leq \|P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)\| + \frac{1}{5} \delta \\
& \stackrel{(3.23)}{\leq} \|P_{W_*}(\phi_T(\rho_g u_*))\| \\
& \quad + \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_g u_*))D\phi_T(\rho_g u_*)\sigma(\rho_g u_*)\| \\
& \quad + \|\tilde{\delta}_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*))\| + \frac{1}{5} \delta \\
& \leq \|D\phi_T(\rho_g u_*)\sigma(\rho_g u_*)\| + \|\tilde{\delta}_{\rho_g u_*}(\sigma(\rho_g u_*))\| + \frac{1}{5} \delta \\
& \stackrel{(3.6)}{\leq} \frac{1}{10} \delta + \frac{1}{10} \delta + \frac{1}{5} \delta = \frac{2}{5} \delta \leq \delta.
\end{aligned}$$

■

### 3.4.4 Kontraktionseigenschaft von $\Gamma_T^\varepsilon$

In diesem Unterabschnitt werden wir zeigen, dass die Graphentransformation

$$\begin{aligned} \Gamma_T^\varepsilon : \Sigma &\longrightarrow \Sigma && \text{mit} \\ \Gamma_T^\varepsilon(\sigma) &= P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)]^{-1} \end{aligned}$$

eine Kontraktion ist. Dieses werden wir in mehreren Propositionen herleiten.

**Proposition 5** *Für alle  $\sigma \in \Sigma$  ist  $\Gamma_T^\varepsilon(\sigma) \in \Sigma$ .*

**Beweis der Proposition 5:** Sei also  $\sigma \in \Sigma$  gegeben, dann gilt nach Definition von  $\Gamma_T^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_T^\varepsilon(\sigma) : Gu_* &\longrightarrow Y && \text{mit} \\ \Gamma_T^\varepsilon(\sigma)(\rho_g u_*) &\in \rho_g W_* && \text{für alle } g \in G. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Proposition 4 liefert, wenn man beachtet, dass  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$  eine bijektive Abbildung ist:

$$\|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)\|_\infty = \sup_{g \in G} \|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)(\rho_g u_*)\| = \sup_{g \in G} \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)\| \leq \delta. \quad (3.35)$$

Zuletzt zeigen wir noch, dass  $\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)$  Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante kleiner gleich 1. Es folgt aus den Propositionen 1 und 3:

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)) &\leq \text{Lip}(P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)) \text{Lip}([P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)]^{-1}) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7} = \frac{5}{7} < 1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aus (3.34), (3.35) und (3.36) folgt  $\Gamma_T^\varepsilon(\sigma) \in \Sigma$ . ■

Nach all dieser Vorarbeit können wir zeigen, dass  $\Gamma_T^\varepsilon$  eine Kontraktion ist.

**Proposition 6** *Die lokale nichtlineare Graphentransformation*

$$\begin{aligned} \Gamma_T^\varepsilon : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ \sigma &\longmapsto P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)]^{-1} \end{aligned}$$

*ist eine Kontraktion für alle  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ .*

**Beweis der Proposition 6:** Bevor wir mit der Lipschitz-Abschätzung für die Graphentransformation  $\Gamma_T^\varepsilon$  anfangen, machen wir erst eine Abschätzung, die uns die weitere Rechnung vereinfachen wird. Dafür listen wir die Eigenschaften auf, die in jener Abschätzung benutzt werden.

Für jedes  $\sigma \in \Sigma$  gilt:



- $\Gamma_T^\varepsilon(\sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)] = P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$
- $P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) : Gu_* \longrightarrow Gu_*$  ist surjektiv
- $\text{Lip}(\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)) \leq 1$ .

Damit erhalten wir für alle  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ :

$$\begin{aligned}
& \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1) - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_2)\|_\infty \\
&= \|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma_1) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1)] - \Gamma_T^\varepsilon(\sigma_2) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_2)]\|_\infty \\
&\geq \|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma_1) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1)] - \Gamma_T^\varepsilon(\sigma_2) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1)]\|_\infty \\
&\quad - \|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma_2) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1)] - \Gamma_T^\varepsilon(\sigma_2) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_2)]\|_\infty \\
&\geq \|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma_1) - \Gamma_T^\varepsilon(\sigma_2)\|_\infty - \text{Lip}(\Gamma_T^\varepsilon(\sigma_2)) \cdot \|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1) \\
&\quad - P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_2)\|_\infty \\
&\geq \|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma_1) - \Gamma_T^\varepsilon(\sigma_2)\|_\infty - \|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1) - P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_2)\|_\infty
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma_1) - \Gamma_T^\varepsilon(\sigma_2)\|_\infty &\leq \|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1) - P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_2)\|_\infty \\
&\quad + \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1) - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_2)\|_\infty
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Nun werden wir nacheinander die beiden Terme der rechten Seite von (3.37) betrachten. Nach (3.8) und (3.15) gilt:

$$\begin{aligned}
& \|P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma_1)(\rho_g u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma_2)(\rho_g u_*)\| \\
&\leq \|o_{\rho_g u_*}(\sigma_1(\rho_g u_*)) - o_{\rho_g u_*}(\sigma_2(\rho_g u_*))\| \leq \frac{1}{10} \|\sigma_1(\rho_g u_*) - \sigma_2(\rho_g u_*)\|, \tag{3.38}
\end{aligned}$$

für alle  $g \in G$ , siehe auch (3.12).

Jetzt werden wir den Integralterm der Gleichung (3.7) betrachten. Diesen haben wir bereits auf Seite 21 untersucht. Dort zeigten wir, dass eine Umgebung von  $u_*$  in  $Y$  existiert, so dass für alle  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  die Abbildung

$$y \longrightarrow \varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{Gu_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(y)) D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(y) dt.$$

auf dieser Umgebung Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante kleiner gleich  $\frac{1}{10}$ . Aus der Argumentation, die wir geliefert haben, folgt ebenfalls die Existenz von Umgebungen anderer Punkte des Gruppenorbits  $Gu_*$ , so dass die Integralfunktion, auf diese Umgebungen eingeschränkt, wieder Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante kleiner gleich  $\frac{1}{10}$ , wenn man eventuell  $\bar{\varepsilon}$

verkleinert. Nun wenden wir eine Argumentation an, die wir bereits auf Seite 22 gesehen haben. Die Kompaktheit des Fundamentalbereichs  $\tilde{G}u_*$  und die  $\mathbb{Z}^2$ -Symmetrie des gestörten Flusses liefern, dass die Umgebungen der  $\rho_g u_*$  in  $Y$ , auf denen die lokale Lipschitz-Eigenschaft mit Konstante kleiner gleich  $\frac{1}{10}$  gilt, in der Form  $\rho_g U_0$  gewählt werden können, wobei  $U_0$  eine Umgebung von  $u_*$  in  $Y$  ist. Dabei müssen wir eventuell  $\bar{\varepsilon}$  ein wenig verkleinern. Wenn nun  $\delta$  ganz am Anfang klein genug gewählt worden ist, so dass die  $\delta$ -Umgebung von  $u_*$  in  $U_0$  enthalten ist, erhalten wir:

$$(id + \sigma)(\rho_g u_*) \in \rho_g U_0 \quad \text{für alle } g \in G.$$

Daraus folgt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{Gu_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma_1(\rho_g u_*))) D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma_1(\rho_g u_*)) dt \\ & \quad - \varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{Gu_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma_2(\rho_g u_*))) D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma_2(\rho_g u_*)) dt\| \\ & \leq \frac{1}{10} \|\sigma_1(\rho_g u_*) - \sigma_2(\rho_g u_*)\|, \end{aligned} \tag{3.39}$$

für alle  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ ,  $g \in G$  und  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ .

Aus der Gleichung (3.7) folgt zusammen mit (3.38) und (3.39) für alle  $g \in G$ :

$$\begin{aligned} & \|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1)(\rho_g u_*) - P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_2)(\rho_g u_*)\| \\ & \leq \frac{1}{5} \|\sigma_1(\rho_g u_*) - \sigma_2(\rho_g u_*)\|. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Anschließend werden wir den zweiten Term der rechten Seite von (3.37) betrachten. Es folgt aus Gleichung (3.22):

$$\begin{aligned} & \|P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma_1)(\rho_g u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma_2)(\rho_g u_*)\| \\ & \leq \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_g u_*)) D\phi_T(\rho_g u_*) \sigma_1(\rho_g u_*) \\ & \quad - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_g u_*)) D\phi_T(\rho_g u_*) \sigma_2(\rho_g u_*)\| \\ & \quad + \|\tilde{o}_{\rho_g u_*}(\sigma_1(\rho_g u_*)) - \tilde{o}_{\rho_g u_*}(\sigma_2(\rho_g u_*))\|, \end{aligned} \tag{3.41}$$

für alle  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$  und  $g \in G$ .

Analog zu (3.38) erhalten wir für alle  $g \in G$ :

$$\|\tilde{o}_{\rho_g u_*}(\sigma_1(\rho_g u_*)) - \tilde{o}_{\rho_g u_*}(\sigma_2(\rho_g u_*))\| \leq \frac{1}{10} \|\sigma_1(\rho_g u_*) - \sigma_2(\rho_g u_*)\|. \tag{3.42}$$

Durch Anwendung des Lemma 9, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \|DP_{W_*}(\phi_T(\rho_g u_*))D\phi_T(\rho_g u_*)\sigma_1(\rho_g u_*) \\
& \quad - DP_{W_*}(\phi_T(\rho_g u_*))D\phi_T(\rho_g u_*)\sigma_2(\rho_g u_*)\| \\
& \quad = \|D\phi_T(\rho_g u_*)\sigma_1(\rho_g u_*) - D\phi_T(\rho_g u_*)\sigma_2(\rho_g u_*)\| \\
& \quad \leq \|D\phi_T(\rho_g u_*)|_{\rho_g W_*}\| \|\sigma_1(\rho_g u_*) - \sigma_2(\rho_g u_*)\| \\
& \quad \leq \frac{1}{10} \|\sigma_1(\rho_g u_*) - \sigma_2(\rho_g u_*)\|, \quad (3.43)
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung aus (3.6) folgt.

Damit folgt aus (3.41) zusammen mit (3.42) und (3.43):

$$\begin{aligned}
& \|P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma_1)(\rho_g u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T \circ (id + \sigma_2)(\rho_g u_*)\| \\
& \quad \leq \frac{1}{5} \|\sigma_1(\rho_g u_*) - \sigma_2(\rho_g u_*)\|. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Wenn wir eine Lipschitz-Abschätzung des Integralterms der Gleichung (3.22) analog zu (3.39) machen, erhalten wir, wenn wir eventuell  $\bar{\varepsilon}$  etwas kleiner wählen und  $\delta$  von Anfang an klein genug war:

$$\begin{aligned}
& \|\varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{W_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma_1(\rho_g u_*)))D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma_1(\rho_g u_*))dt \\
& \quad - \varepsilon \cdot \int_0^1 DP_{W_*}(\phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma_2(\rho_g u_*)))D_\varepsilon \phi_T^{\varepsilon \cdot t}(\rho_g u_* + \sigma_2(\rho_g u_*))dt\| \\
& \quad \leq \frac{1}{10} \|\sigma_1(\rho_g u_*) - \sigma_2(\rho_g u_*)\|, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

für alle  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ ,  $g \in G$  und  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ .

Aus Gleichung (3.22) mit Hilfe von (3.44) und (3.45) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_1)(\rho_g u_*) - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_2)(\rho_g u_*)\| \\
& \quad \leq \frac{3}{10} \|\sigma_1(\rho_g u_*) - \sigma_2(\rho_g u_*)\|. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus (3.37), (3.40) und (3.46) die gewünschte Lipschitzabschätzung:

$$\|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma_1) - \Gamma_T^\varepsilon(\sigma_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_\infty. \quad (3.47)$$

■

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt  $\Gamma_T^\varepsilon$  damit für alle  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  einen eindeutigen Fixpunkt, den wir mit  $\sigma_{\sharp}^\varepsilon$  bezeichnen wollen. Bezeichne mit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  den Graphen von  $\sigma_{\sharp}^\varepsilon$ , also

$$\mathcal{M}_*^\varepsilon := (id + \sigma_{\sharp}^\varepsilon)(Gu_*).$$

### 3.4.5 Eigenschaften des Fixpunktes $\sigma_{\sharp}^{\varepsilon}$ von $\Gamma_T^{\varepsilon}$

Wir machen uns nun daran, die Eigenschaften der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^{\varepsilon}$ , die im Theorem 1 angegeben sind, zu verifizieren, indem wir entsprechende Eigenschaften des Fixpunktes  $\sigma_{\sharp}^{\varepsilon}$  nachweisen, dessen Graph sie schließlich ist.

Zuerst ein Lemma, das den Namen Graphentransformation rechtfertigt.

**Lemma 11** *Für  $\hat{\sigma}, \sigma \in \Sigma$  gilt:*

$$\hat{\sigma} = \Gamma_T^{\varepsilon}(\sigma) \tag{3.48}$$

$$\iff \hat{\sigma} = P_{W_*} \circ \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma)]^{-1} \tag{3.49}$$

$$\iff id + \hat{\sigma} = \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma)]^{-1} \tag{3.50}$$

$$\iff \text{graph}(\hat{\sigma}) = \phi_T^{\varepsilon}(\text{graph}(\sigma)). \tag{3.51}$$

*insbesondere wird der Fixpunkt der Graphentransformation durch folgende Gleichung vollständig beschrieben:*

$$\phi_T^{\varepsilon}(\text{graph}(\sigma_{\sharp}^{\varepsilon})) = \text{graph}(\sigma_{\sharp}^{\varepsilon}).$$

**Beweis des Lemma 11:** Die Äquivalenz von (3.49) und (3.50) sieht man ein, wenn  $P_{W_*} = id - P_{Gu_*}$  bedacht wird. (3.50) impliziert (3.51), da die Funktion  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma) : Gu_* \rightarrow Gu_*$  nach den Propositionen 1 und 2 bijektiv ist. Es bleibt also noch zu zeigen, dass aus (3.51) die Aussage (3.50) folgt. Sei also  $\hat{u} \in Gu_*$  beliebig, dann existiert nach (3.51) ein  $u \in Gu_*$  mit

$$(id + \hat{\sigma})(\hat{u}) = \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma)(u).$$

Durch Projektion auf den Gruppenorbit  $Gu_*$  erhalten wir:

$$\hat{u} = P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma)(u).$$

Durch Projektion auf die  $W_*$ -Komponente erhalten wir:

$$\hat{\sigma}(\hat{u}) = P_{W_*} \circ \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma)(u).$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\hat{\sigma}(\hat{u}) = P_{W_*} \circ \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon} \circ (id + \sigma)]^{-1}(\hat{u}).$$

■

**Proposition 7**  $\mathcal{M}_*^{\varepsilon}$  *ist invariant unter der Gruppe der ganzzahligen Translationen.*

**Beweis der Proposition 7:** Sei  $g_0 \in G$  mit  $g_0 = (0, S_1, S_2)$ ,  $(S_1, S_2) \in \mathbb{Z}^2$ .  
Definiere  $\sigma_{g_0} \in \Sigma$  durch

$$\sigma_{g_0} := \rho_{g_0} \circ \sigma_{\sharp}^\varepsilon \circ \rho_{g_0^{-1}}.$$

Dann folgt aus Äquivarianzgründen unter Benutzung des Lemma 11:

$$\begin{aligned} \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_{g_0}) &= \phi_T^\varepsilon \circ (id + \rho_{g_0} \circ \sigma_{\sharp}^\varepsilon \circ \rho_{g_0^{-1}}) \\ &= \rho_{g_0} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_{\sharp}^\varepsilon) \circ \rho_{g_0^{-1}} \\ &= \rho_{g_0} \circ (id + \sigma_{\sharp}^\varepsilon) \circ P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon(id + \sigma_{\sharp}^\varepsilon) \circ \rho_{g_0^{-1}} \\ &= \rho_{g_0} \circ (id + \sigma_{\sharp}^\varepsilon) \circ \rho_{g_0^{-1}} \circ \rho_{g_0} \circ P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon(id + \sigma_{\sharp}^\varepsilon) \circ \rho_{g_0^{-1}} \\ &= (id + \rho_{g_0} \circ \sigma_{\sharp}^\varepsilon \circ \rho_{g_0^{-1}}) \circ P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \rho_{g_0} \circ \sigma_{\sharp}^\varepsilon \circ \rho_{g_0^{-1}}) \\ &= (id + \sigma_{g_0}) \circ P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma_{g_0}) \end{aligned} \tag{3.52}$$

Damit ist wieder nach Lemma 11  $\sigma_{g_0}$  ein Fixpunkt von  $\Gamma_T^\varepsilon$  und die Eindeutigkeit des Fixpunktes liefert:

$$\sigma_{\sharp}^\varepsilon = \sigma_{g_0} = \rho_{g_0} \circ \sigma_{\sharp}^\varepsilon \circ \rho_{g_0^{-1}}.$$

Folglich ist  $\sigma_{\sharp}^\varepsilon$   $\mathbb{Z}^2$ -translationsäquivalent und somit besitzt  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$   $\mathbb{Z}^2$ -Translationsinvarianz.  $\blacksquare$

Nun wollen wir die Flussinvarianz der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  zeigen, dazu benötigen wir noch ein bisschen Vorarbeit.

**Lemma 12** *Die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  ist abgeschlossen.*

**Beweis des Lemma 12:** Sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$ , die in  $Y$  konvergiert. Dann lässt sich  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in der Form  $(\rho_{g_n} u_* + \sigma_{\sharp}^\varepsilon(\rho_{g_n} u_*))_{n \in \mathbb{N}}$  schreiben, da  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  der Graph von  $\sigma_{\sharp}^\varepsilon$  ist. Die Projektion  $P_{Gu_*}$  angewandt auf diese Folge ergibt aufgrund der Stetigkeit, dass  $(\rho_{g_n} u_*)_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls konvergiert, und zwar infolge der Abgeschlossenheit von  $Gu_*$  (siehe Beweis der Proposition 2) gegen  $\rho_{g_0} u_*$  für ein  $g_0 \in G$ . Da auch  $\sigma_{\sharp}^\varepsilon$  stetig ist, konvergiert die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\rho_{g_n} u_* + \sigma_{\sharp}^\varepsilon(\rho_{g_n} u_*))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\rho_{g_0} u_* + \sigma_{\sharp}^\varepsilon(\rho_{g_0} u_*) \in \mathcal{M}_*^\varepsilon$ .

**Proposition 8**  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  ist invariant unter dem Fluss  $\phi_t^\varepsilon$ .

**Beweis der Proposition 8:** Sei  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , so dass  $t_0$  und  $T$  rational unabhängig sind. Definiere  $\sigma_0 \in \Sigma$  durch

$$\sigma_0 = P_{W_*} \circ \phi_{T+t_0}^\varepsilon \circ (id + \sigma_{\sharp}^\varepsilon) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_{T+t_0}^\varepsilon \circ (id + \sigma_{\sharp}^\varepsilon)]^{-1}.$$

$\sigma_0$  ist wohldefiniert und aus  $\Sigma$ , wenn wir gegebenenfalls  $\bar{\varepsilon}$  und  $\delta$  etwas verkleinern. Um das einzusehen, braucht man sich nur den Beweis der Wohldefiniertheit der Graphentransformation mit Zeit  $T$  anzusehen. Dann stellt man fest, dass eine Vergrößerung der Zeit auf  $T + t$  kein Problem darstellt.

Nach Lemma 11 gilt:

$$\text{graph}(\sigma_0) = \phi_{T+t_0}^\varepsilon(\text{graph}(\sigma_\#^\varepsilon)) = \phi_{t_0}^\varepsilon(\phi_T^\varepsilon(\text{graph}(\sigma_\#^\varepsilon))) = \phi_{t_0}^\varepsilon(\text{graph}(\sigma_\#^\varepsilon)). \quad (3.53)$$

Daher gilt auch:

$$\text{graph}(\sigma_0) = \phi_T^\varepsilon(\text{graph}(\sigma_0)).$$

Wenden wir nun wieder Lemma 11 an, so erhalten wir  $\sigma_\#^\varepsilon = \sigma_0$ . Aus (3.53) folgt damit

$$\text{graph}(\sigma_\#^\varepsilon) = \phi_{t_0}^\varepsilon(\text{graph}(\sigma_\#^\varepsilon)). \quad (3.54)$$

Sei nun  $t \in \mathbb{R}^+$  beliebig. Da  $t_0$  und  $T$  rational unabhängig sind, existieren Folgen  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$0 < t_k := m_k \cdot t_0 - n_k \cdot T \xrightarrow{k \rightarrow \infty} t.$$

Sei  $u \in Gu_*$  beliebig gewählt, dann gilt:

$$\phi_{t_k}^\varepsilon(id + \sigma_\#^\varepsilon)(u) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \phi_t^\varepsilon(id + \sigma_\#^\varepsilon)(u).$$

Alle  $\phi_{t_k}^\varepsilon(id + \sigma_\#^\varepsilon)(u)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  liegen in  $\mathcal{M}_*^\varepsilon = \text{graph}(\sigma_\#^\varepsilon)$ , weil  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  invariant ist unter  $\phi_{t_0}^\varepsilon$  und  $\phi_T^\varepsilon$  ((3.54) und Lemma 11). Da  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  abgeschlossen ist (Lemma 12) ist  $\phi_t^\varepsilon(id + \sigma_\#^\varepsilon)(u)$  aus  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$ . Damit erhalten wir

$$\phi_t^\varepsilon(\mathcal{M}_*^\varepsilon) \subset \mathcal{M}_*^\varepsilon. \quad (3.55)$$

Sei jetzt  $t \leq \frac{T}{2}$ . Dann gilt nach (3.55)

$$\mathcal{M}_*^\varepsilon = \phi_T^\varepsilon(\mathcal{M}_*^\varepsilon) = \phi_{T-t}^\varepsilon(\phi_t^\varepsilon(\mathcal{M}_*^\varepsilon)) \subset \phi_{T-t}^\varepsilon(\mathcal{M}_*^\varepsilon).$$

Folglich gilt in (3.55) sogar die Gleichheit. ■

In der nächsten Proposition beweisen wir die Attraktivität von  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$ .

**Proposition 9** *Die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  ist lokal exponentiell anziehend.*

**Beweis der Proposition 9:** Nach dem Beweis der Proposition 4 impliziert  $\sigma \in \Sigma$  die Abschätzung  $\|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)\|_\infty \leq \frac{2}{5}\delta$ . Daher gilt stets

$$\|\sigma_\#^\varepsilon\|_\infty \leq \frac{2}{5}\delta.$$

Gleichung (3.36) liefert uns

$$\text{Lip}(\sigma_{\sharp}^{\varepsilon}) \leq \frac{5}{7}.$$

Die Abbildung

$$\varphi : u \longmapsto \|P_{W_*}(u) - \sigma_{\sharp}^{\varepsilon}(P_{Gu_*}(u))\|$$

ist eine auf einer Umgebung des Gruppenorbits  $Gu_*$  definierte stetige Abbildung, die nach  $\mathbb{R}$  abbildet. Daher ist für  $\bar{\delta} < \frac{3}{5}\delta$

$$U_{Gu_*}^{\bar{\delta}} := \varphi^{-1}[(-\bar{\delta}; \bar{\delta})]$$

eine offene Umgebung von  $\mathcal{M}_*^{\varepsilon} = \text{graph}(\sigma_{\sharp}^{\varepsilon})$ .

Sei nun  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  fest und  $y \in U_{Gu_*}^{\bar{\delta}}$ . Dann lässt sich  $y$  eindeutig in der Form

$$y = \rho_{g_0}u_* + \sigma_{\sharp}^{\varepsilon}(\rho_{g_0}u_*) + \rho_{g_0}w_*$$

mit  $g_0 \in G, w_* \in W_*$  schreiben. Da  $y$  aus  $U_{Gu_*}^{\bar{\delta}}$  ist, gilt  $\|w_*\| < \bar{\delta}$ .

Wir betrachten nun folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} : Gu_* &\longrightarrow Y \\ u &\longmapsto \chi(u) \cdot \rho_{P_G(u)}(id - P_*)\rho_{P_G(u)^{-1}}\rho_{g_0}w_*, \end{aligned}$$

wobei  $\chi : Gu_* \longmapsto [0, 1]$  eine  $C^{k+1}$ -Funktion mit kompakten Träger und  $\chi(\rho_{g_0}u_*) = 1$  ist.  $\bar{\sigma}$  ist nach Lemma 7 eine  $C^{k+1}$ -Funktion, da auch  $g \longmapsto P_g$  diese Glattheit besitzt. Ferner gilt:

$$\|\bar{\sigma}\|_{\infty} \leq \|id - P\| \cdot \|w_*\| < \|id - P_*\| \cdot \bar{\delta} \leq \frac{3}{5}\bar{\delta},$$

nach eventueller Verkleinerung von  $\bar{\delta}$ . Ebenso gilt, wenn wieder  $\bar{\delta}$  angepasst wird:

$$\|D\bar{\sigma}\|_{\infty} \leq \frac{2}{7}.$$

Die Abbildung  $\sigma_{\sharp}^{\varepsilon} + \bar{\sigma}$  ist damit aus  $\Sigma$  und es gilt  $(id + (\sigma_{\sharp}^{\varepsilon} + \bar{\sigma}))(\rho_{g_0}u_*) = y$ .

Da die Graphentransformation eine Kontraktion mit Kontraktionsrate  $\frac{1}{2}$  ist (siehe 3.47), gilt:

$$\text{dist}(\phi_{n,T}^{\varepsilon}(y), \mathcal{M}_*^{\varepsilon}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \|\bar{\sigma}\|_{\infty} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \|id - P_*\| \cdot \bar{\delta}. \quad (3.56)$$

Als nächstes zeigen wir noch, dass Punkte, die nahe genug an  $\mathcal{M}_*^{\varepsilon}$  sind, vom Fluss  $\phi^{\varepsilon}$  innerhalb des Zeitintervalls  $[0, T]$  nicht weit von  $\mathcal{M}_*^{\varepsilon}$  entfernt werden.

Genauer: Definiere zunächst  $U_{Gu_*}^{\delta_0} := \varphi^{-1}[(-\delta_0; \delta_0)]$ . Dann existiert ein  $\delta_0 \leq \bar{\delta}$  mit  $\phi_t^\varepsilon(U_{Gu_*}^{\delta_0}) \subset U_{Gu_*}^{\bar{\delta}}$  für alle  $t \in [0, T]$ .

Angenommen das ist nicht der Fall, dann existieren  $t_n \in [0, T]$  und  $y_n \in Y$  mit

$$\|P_{W_*}(y_n) - \sigma_{\#}^\varepsilon(P_{Gu_*}(y_n))\| \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad (3.57)$$

$$\|P_{W_*}(\phi_{t_n}^\varepsilon(y_n)) - \sigma_{\#}^\varepsilon(P_{Gu_*}(\phi_{t_n}^\varepsilon(y_n)))\| \geq \bar{\delta} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (3.58)$$

Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $t_n$  gegen  $t_0 \in [0, T]$  konvergiert. Aus (3.57) folgt, dass  $\text{dist}(y_n, \mathcal{M}_*^\varepsilon)$  gegen 0 geht. Da  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$   $\mathbb{Z}^2$ -invariant ist, gilt o.B.d.A.  $\text{dist}(y_n, (id + \sigma_{\#}^\varepsilon)(\tilde{G}u_*)) \longrightarrow 0$ , wobei  $\tilde{G}u_*$  wieder den Fundamentalbereich von  $Gu_*$  bezeichne ( $\tilde{G} := \{(R, S_{x_1}, S_{x_2}) \in G; 0 \leq S_{x_1}, S_{x_2} \leq 1\}$ ). Die Kompaktheit von  $(id + \sigma_{\#}^\varepsilon)(\tilde{G}u_*)$  liefert uns die Existenz eines  $y_0 \in \mathcal{M}_*^\varepsilon$  mit  $y_n \longrightarrow y_0$ . Daher gilt

$$\|P_{W_*}(\phi_{t_n}^\varepsilon(y_n)) - \sigma_{\#}^\varepsilon(P_{Gu_*}(\phi_{t_n}^\varepsilon(y_n)))\| \longrightarrow \|P_{W_*}(\phi_{t_0}^\varepsilon(y_0)) - \sigma_{\#}^\varepsilon(P_{Gu_*}(\phi_{t_0}^\varepsilon(y_0)))\| = 0$$

aufgrund der Stetigkeit und der Flussinvarianz von  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  im Widerspruch zu (3.58).

Schließlich gilt für  $t = n \cdot T + \hat{t}$  mit  $0 \leq \hat{t} < T$ :

$$\text{dist}(\phi_{\hat{t}}^\varepsilon(y), \mathcal{M}_*^\varepsilon) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \|id - P_*\| \cdot \bar{\delta},$$

falls  $y$  aus der Umgebung  $U_{Gu_*}^{\delta_0}$  von  $Gu_*$  in  $Y$  ist. ■

Wir werden nun ausführlich zeigen wie man mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes beweisen kann, dass  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  stetig in  $\varepsilon$  ist. Allerdings werden wir im nächsten Unterabschnitt sogar skizzieren wie die differenzierbare Abhängigkeit von  $\varepsilon$  hergeleitet werden kann. Insofern kann die folgende Proposition auch übersprungen werden.

**Proposition 10**  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  hängt stetig von  $\varepsilon$  ab, d.h.  $\sigma_{\#}^\varepsilon$  ist stetig in  $\varepsilon$ .

**Beweis der Proposition 10:** Als wir die Kontraktionseigenschaft von  $\Gamma_T^\varepsilon$  herleiteten (siehe (3.47)), gaben wir eine Lipschiz-Konstante an, die unabhängig von  $\varepsilon$  ist. Wenn wir nun die Stetigkeit von  $\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)$  in  $\varepsilon$  beweisen können für alle  $\sigma \in \Sigma$ , folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz mit Parametern, dass  $\sigma_{\#}^\varepsilon$  stetig in  $\varepsilon$  ist.

Sei also  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  beliebig. Es gilt für  $h > 0$  hinreichend klein:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_T^{\varepsilon+h}(\sigma) - \Gamma_T^\varepsilon(\sigma)\|_\infty &\leq \|P_{W_*} \circ \phi_T^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma)]^{-1} \\ &\quad - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma)]^{-1}\|_\infty \\ &\quad + \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma)]^{-1} \\ &\quad - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)]^{-1}\|_\infty. \end{aligned}$$



Daraus folgt, da  $P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma)$  eine Bijektion auf  $Gu_*$  ist:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_T^{\varepsilon+h}(\sigma) - \Gamma_T^\varepsilon(\sigma)\|_\infty &\leq \|P_{W_*} \circ \phi_T^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma) - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)\|_\infty \\ &\quad + \|P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma)]^{-1} \\ &\quad - P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) \circ [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)]^{-1}\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Wir betrachten zuerst den ersten Summanden der rechten Seite von (3.59). Zunächst gilt  $P_{W_*} \circ \phi_t^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma) \xrightarrow{h \rightarrow 0} P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$  nur punktweise. Aber aufgrund der Kompaktheit von  $\tilde{G}u_*$  und der Gittersymmetrie, gilt dies sogar gleichmäßig auf  $Gu_*$ . Jetzt untersuchen wir den zweiten Summanden von (3.59). Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von  $P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)$ , reicht es folgendes zu überprüfen:

$$\|[P_{Gu_*} \circ \phi_t^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma)]^{-1} - [P_{Gu_*} \circ \phi_t^\varepsilon \circ (id + \sigma)]^{-1}\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (3.60)$$

Da  $P_{Gu_*} \circ \phi_t^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma) : Gu_* \rightarrow Gu_*$  ein Homöomorphismus ist, ist (3.60) äquivalent zu

$$\|id - [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)]^{-1} \circ P_{Gu_*} \circ \phi_t^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma)\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (3.61)$$

Die Abbildung  $[P_{Gu_*} \circ \phi_t^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma)]^{-1} : Gu_* \rightarrow Gu_*$  ist nicht nur punktweise stetig, sondern sogar gleichmäßig, was man einsieht, wenn man die Gittersymmetrie und die Kompaktheit des Fundamentalbereichs  $\tilde{G}u_*$  beachtet. Daher ist (3.61) äquivalent zu

$$\|P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma) - P_{Gu_*} \circ \phi_t^{\varepsilon+h} \circ (id + \sigma)\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad (3.62)$$

was offensichtlich erfüllt ist. ■

### 3.4.6 Regularität der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_*^\varepsilon$

Wir werden zeigen, dass die Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon C^{k+1}$  ist. Dazu benötigen wir den schon an sich interessanten Satz:

**Satz 3** (Henry [3]) *Seien  $X_1, X_2$  Banachräume und  $U$  eine offene Menge in  $X_1$ , dann ist ein abgeschlossener Ball in  $C^{k,\beta}(U, X_2)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  und  $\beta > 0$  abgeschlossen in  $C^0$ .*

**Proposition 11**  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  ist eine  $C^{k,1}$ -Mannigfaltigkeit, d.h.  $\sigma_\#^\varepsilon$  ist  $C^{k,1}$ .

**Beweis der Proposition 11:** Ist  $\sigma \in \Sigma$  eine  $\mathbb{Z}^2$ -äquivariante  $C^{k+1}$ -Funktion, so auch  $\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)$ . Wir werden nun zeigen, dass positive Konstanten  $L_0, \dots, L_{k+1}$  existieren, so dass aus

$$\|\sigma\|_\infty \leq L_0, \quad \|D\sigma\|_\infty \leq L_1, \dots \quad \|D^{k+1}\sigma\|_\infty \leq L_{k+1}$$

die entsprechenden Abschätzungen für  $\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)$  folgen:

$$\|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)\|_\infty \leq L_0, \quad \|D[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)]\|_\infty \leq L_1, \dots \quad \|D^{k+1}[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)]\|_\infty \leq L_{k+1}. \quad (3.63)$$

Dafür leiten wir folgende Gleichung zweimal ab:

$$\Gamma_T^\varepsilon(\sigma) \circ P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*) = P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*).$$

Wir erhalten für die erste Ableitung:

$$\begin{aligned} & D[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)](P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot DP_{Gu_*}(\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \\ & \quad \cdot D\phi_T^\varepsilon((id + \sigma)(\rho_g u_*))(id + D\sigma(\rho_g u_*)) \\ & = DP_{W_*}(\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot D\phi_T^\varepsilon((id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot (id + D\sigma(\rho_g u_*)). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} & D^2[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)](P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \\ & \quad \cdot [DP_{Gu_*}(\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot D\phi_T^\varepsilon((id + \sigma)(\rho_g u_*))(id + D\sigma(\rho_g u_*))]^2 \\ & + D[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)](P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) D^2 P_{Gu_*}(\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \\ & \quad \cdot [D\phi_T^\varepsilon((id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot (id + D\sigma(\rho_g u_*))]^2 \\ & + D[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)](P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) DP_{Gu_*}(\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \\ & \quad \cdot D^2 \phi_T^\varepsilon((id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot [id + D\sigma(\rho_g u_*)]^2 \\ & + D[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)](P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) DP_{Gu_*}(\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \\ & \quad \cdot D\phi_T^\varepsilon((id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot D^2 \sigma(\rho_g u_*) \\ & = D^2 P_{W_*}(\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) [D\phi_T^\varepsilon((id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot (id + D\sigma(\rho_g u_*))]^2 \\ & + DP_{W_*}(\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot D^2 \phi_T^\varepsilon((id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot [id + D\sigma(\rho_g u_*)]^2 \\ & + DP_{W_*}(\phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot D\phi_T^\varepsilon((id + \sigma)(\rho_g u_*)) \cdot D^2 \sigma(\rho_g u_*). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Die beiden Operatoren, die in der Gleichung (3.64) vor  $D^2 \sigma(\rho_g u_*)$  stehen, eingeschränkt auf  $\rho_g W_*$  sind in der Operatornorm hinreichend klein, etwa

jeweils kleiner als  $\frac{1}{5}$ , falls  $\bar{\varepsilon}$  und  $\delta$  genügend klein sind. Desweiteren ist der Operator, der im ersten Term  $D^2[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma)]$  folgt, in der Minimumsnorm für  $\bar{\varepsilon}$  und  $\delta$  hinreichend klein nahe an 1. Zusammen mit der Restsymmetrie der in Gleichung (3.64) auftretenden Terme und der daraus resultierenden Beschränktheit auf  $Gu_*$  erhalten wir, dass die Eigenschaft (3.63) für  $k = 1$  gilt. Durch weiteres Differenzieren der Gleichung (3.64) sehen wir, dass (3.63) sogar für alle  $k$  gilt.

Nun wählen wir eine lokale Karte und wenden Satz 3 auf die Komposition von  $(\Gamma_T^\varepsilon)^n(0)$  und der Karte an. Dadurch erhalten wir, dass  $\sigma_\sharp^\varepsilon C^{k,1}$  ist. ■

### 3.4.7 Regularität der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_*^\varepsilon$ in $\varepsilon$

Wir werden den Beweis des Theorems 1 abschließen, indem wir noch die Glattheit der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  in  $\varepsilon$  zeigen.

**Proposition 12**  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  ist  $C^{k,1}$  im Parameter  $\varepsilon$ , d.h.  $\sigma_\sharp^\varepsilon(\rho_g u_*)$  ist  $C^{k,1}$  in  $\varepsilon$  für jedes  $g \in G$ .

**Beweis der Proposition 12:** Der Beweis verläuft so ähnlich wie der Beweis der Regularität von  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  auf  $Gu_*$ .

Sei  $\sigma^\varepsilon \in \Sigma$  eine  $\mathbb{Z}^2$ -invariante  $C^{k+1}$ -Funktion, die auch  $C^{k+1}$  in  $\varepsilon$  ist. Zunächst zeigen wir, dass  $[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)](\rho_g u_*)$  in  $\varepsilon$  und  $\rho_g u_* \in Gu_*$  eine  $C^{k+1}$ -Funktion ist. Dafür reicht es den Term  $[P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma^\varepsilon)]^{-1}$  zu untersuchen. Die Abbildung

$$(\varepsilon, \rho_g u_*) \longmapsto (\varepsilon, P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma^\varepsilon)(\rho_g u_*))$$

ist  $C^{k+1}$  und bijektiv. Daher ist auch die Inverse und damit ebenfalls

$$(\varepsilon, \rho_g u_*) \longmapsto [P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma^\varepsilon)]^{-1}(\rho_g u_*)$$

eine  $C^{k+1}$  Abbildung. Wir haben also gezeigt, dass

$$(\varepsilon, \rho_g u_*) \longmapsto \Gamma_T^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)(\rho_g u_*)$$

$C^{k+1}$  ist. Als nächstes leiten wir die folgende Gleichung  $(k + 1)$ -mal nach  $\varepsilon$  ab:

$$\Gamma_T^\varepsilon(\sigma^\varepsilon) \circ P_{Gu_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma^\varepsilon)(\rho_g u_*) = P_{W_*} \circ \phi_T^\varepsilon \circ (id + \sigma^\varepsilon)(\rho_g u_*).$$

Wenn man die Restsymmetrie und die Spektralannahme beachtet, erhält man analog zu dem Beweis zur Glattheit der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$ , dass positive

Konstanten  $L_0, \dots, L_{k+1}$  existieren, so dass aus

$$\sup_{\varepsilon} \|\sigma^\varepsilon\|_\infty \leq L_0, \quad \sup_{\varepsilon} \|D_\varepsilon \sigma^\varepsilon\|_\infty \leq L_1, \dots \quad \sup_{\varepsilon} \|D_\varepsilon^{k+1} \sigma^\varepsilon\|_\infty \leq L_{k+1}$$

die entsprechenden Abschätzungen für  $\Gamma_T^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)$  folgen:

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon} \|\Gamma_T^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)\|_\infty &\leq L_0, & \sup_{\varepsilon} \|D_\varepsilon[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)]\|_\infty &\leq L_1, \dots \\ \sup_{\varepsilon} \|D_\varepsilon^{k+1}[\Gamma_T^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)]\|_\infty &\leq L_{k+1} \end{aligned} \tag{3.65}$$

für  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  und  $\bar{\varepsilon}$  hinreichend klein.

Sei  $g \in G$  beliebig. Wir werden zeigen, dass  $([(\Gamma_T^\varepsilon)^n(0)](\rho_g u_*))_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $g \in G$  eine gleichmäßig in  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  konvergente Teilfolge besitzt. Dann wären wir nach Satz 3 und obiger Eigenschaft (3.65) fertig.

Wir haben es mit einer Folge von in  $\varepsilon$  stetigen Funktionen zu tun, die sogar nach dem Schrankensatz gleichgradig stetig sind, da nach Eigenschaft (3.65) die Ableitungen uniform beschränkt sind. Außerdem konvergiert für jedes feste  $\varepsilon_0$  die Folge  $([(\Gamma^{\varepsilon_0})^n(0)]_T(\rho_g u_*))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $Y$ , das folgt aus der Kontraktionseigenschaft unserer Graphentransformation. Nach dem Satz von Arzèla-Ascoli besitzt die Funktionenfolge  $([(\Gamma_T^\varepsilon)^n(0)](\rho_g u_*))_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge. Nun können wir den Satz 3 anwenden, was den Beweis vollendet.

# Kapitel 4

## Ausblick

Es wurde in dieser Arbeit die Existenz und Persistenz einer Zentrumsmanifoldigkeit nahe eines relativen Gleichgewicht in einem Reaktions-Diffusions-system unter Symmetriebrechung bewiesen. Dabei spielte die Spektralannahme eine wichtige Rolle.

Durch die Reduktion auf die Zentrumsmanifoldigkeit erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung. Es bleibt zu untersuchen, was für Tip-Bewegungen der Spiralwelle möglich sind. M. Georgi untersucht dies in seiner Diplomarbeit, indem er die Dynamik des gestörten Systems auf  $\mathcal{M}_*^\varepsilon$  auf die Gruppe  $G$  projiziert.

Wenn das resultierende Vektorfeld auf  $G$  nach  $\varepsilon$  entwickelt wird, erhält man in nullter Ordnung die einfache Dynamik der rotierenden Welle auf  $G$ . Diese entspricht einer konstanten Rotation. M. Georgi zeigt, dass in erster Ordnung der Störungsterm linear eingeht und jede mögliche Dynamik in der ersten Ordnung möglich ist, wenn der Störungsterm entsprechend gewählt wird.

Der Störungsterm kann z.B. so gewählt werden, dass das Vektorfeld auf  $G$  in erster Ordnung keine Rotationskomponente besitzt. Dann entkoppelt die Rotationsdynamik bis zur ersten Ordnung und es reicht, die Translationsdynamik auf  $\mathbb{R}^2$  zu betrachten, was der Bewegung des Tips entspricht. Aufgrund der Restsymmetrie erhalten wir eine Dynamik eines autonomen Vektorfeldes auf dem zweidimensionalen Torus. Dort können so interessante Flüsse vorkommen wie der Cherry-Fluss.

Es bleibt die Frage offen, ob so eine reichhaltige Dynamik auch auftreten kann, wenn die Klasse der Störungsfunktionen eingeschränkt wird. In dem Oregonator Modell der lichtsensitiven Belousov-Zhabotinsky-Reaktion geht der Störungsterm, der die Lichtbestrahlung modelliert, in einer ganz spezifischen Form ein. Es ist z.B. von Interesse, was für eine Dynamik des Tips der Spiralwelle in diesem konkreten Experiment möglich ist.



# Literaturverzeichnis

- [1] N. Fenichel, *Persistence and smoothness of invariant manifolds of flows*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1973), 193–226
- [2] M. Georgi, *Spiralwellen in Reaktions-Diffusions-Systemen – Das reduzierte Vektorfeld*, Diplomarbeit, FU Berlin, 2003
- [3] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes Math., Vol. 840 Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1981.
- [4] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes Math., Vol. 583 Springer-Verlag, New York, 1976.
- [5] B. Sandstede, A. Scheel and C. Wulff, *Dynamics of Spiral Waves on Unbounded Domains using Center-Manifold Reductions*, J. Diff. Eq. **141** (1997), 122–149.
- [6] M. Shub, *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [7] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1983.
- [8] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1983.
- [9] S. Wiggins, *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*, Springer Verlag, New York, 1994.
- [10] C. Wulff, *Theory of Meandering and Drifting Spiral Waves in Reaction-Diffusion Systems*, Doktorarbeit, FU Berlin, 1996.