

Stabilität von Entkopplungsphänomenen in
Systemen gekoppelter symmetrischer
Oszillatoren
(Diplomarbeit)

Stefan Liebscher
Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

Februar 1997

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Hilfsmittel	6
2.1	Äquivarianzen	6
2.2	Zentrumsmannigfaltigkeiten	8
3	Problemstellung	11
3.1	Ausgangssituation	11
3.2	Symmetrien	14
4	Linearisierung	18
5	Verhalten in der Nähe der Stabilitätswechsel	32
5.1	Einfacher Stabilitätsverlust einer allgemeinen Linie von Fixpunkten	34
5.2	Doppelter Stabilitätsverlust einer allgemeinen Linie von Fixpunkten	38
5.3	TAYLOR-Näherung des Vektorfeldes in der Zentrumsmannigfaltigkeit	40
5.4	Kritischer Punkt B (Vorzeichenwechsel eines reellen Eigenwertes)	42
5.5	Kritischer Punkt D (Vorzeichenwechsel des Realteils zweier konjugiert komplexer Eigenwerte)	44
	Literatur	48

Dieser TURING-Ring besteht aus vier identischen Zellen, die entlang der Kanten eines Quadrates gekoppelt sind.

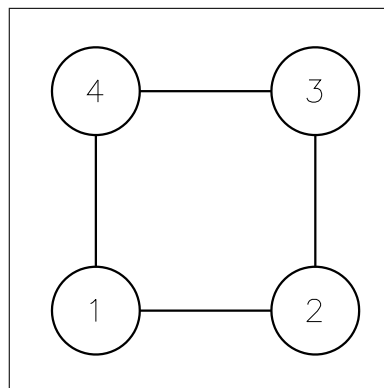


Abbildung 1: TURING-Ring aus vier gekoppelten Oszillatoren

1 Einleitung

Systeme gekoppelter Oszillatoren bieten sich als Modell für vielfältige Anwendungen in Physik, Chemie und Biologie an (siehe z.B. [Oth86]).

Wir wollen unter „gekoppelten Oszillatoren“ solche Systeme verstehen, die sich aus n identischen Zellen (physikalischen Systemen, chemischen Reaktoren, biologischen Zellen usw.) zusammensetzen, die ihrerseits die Ecken (*vertices*) V eines Graphen \mathcal{G} bilden. Diese Zellen sollen entlang der Kanten (*edges*) E des Graphen mit ihren unmittelbaren Nachbarn gekoppelt sein.

Die einzelnen Zellen werden durch N -dimensionale dynamische Systeme modelliert. Das Gesamtsystem aus n Zellen

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in X = \mathbb{R}^{nN},$$

wobei $F \in C^r(X, X)$ als genügend glatt vorausgesetzt wird und $x = (x_1, \dots, x_n)$ den Zustand der n Zellen $x_i \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet, hat die spezielle Gestalt

$$\dot{x}_i = f\left(x_i, \sum_{j:(i,j) \in E} x_j\right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Die Summe läuft dabei über die unmittelbaren Nachbarn der i -ten Zelle im Graphen \mathcal{G} und ist Ausdruck der Kopplung. Wichtig ist, daß die Nachbarn nur über diese Summe in die Gleichung eingehen. In dieser Arbeit wird das Beispiel eines Ringes aus vier identischen Zellen (ein TURING-Ring, siehe Abb. 1)

$$\dot{x}_i = f(x_i, x_{i-1} + x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, 4 \pmod{4} \quad (2)$$

betrachtet.

Das System (1) kann nun verschiedene Symmetrien besitzen. Zum einen wird durch die Gestalt des Kopplungsgraphen \mathcal{G} eine Gruppe G von Ecken-Permutationen induziert:

$$G = \{\gamma \in S_n \mid (\gamma(i), \gamma(j)) \in E \text{ für alle } (i, j) \in E\}^1.$$

Zum anderen können auch die einzelnen Zellen eine Symmetrie aufweisen. Dazu nehmen wir an, daß f mit der linearen Aktion einer Lie-Gruppe H kommutiert

$$f(h\xi, h\eta) = hf(\xi, \eta) \quad \text{für alle } h \in H, \xi, \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Faßt man beide Symmetriegruppen zu ihrem direkten Produkt $\Gamma = G \times H$ zusammen, so operiert Γ auf X durch

$$((g, h)x)_i = hx_{g^{-1}(i)} \quad \text{für alle } (g, h) \in \Gamma = G \times H, i = 1, \dots, n.$$

Das System (1) ist dann äquivariant bezüglich der Aktion von Γ :

$$F((g, h)x) = (g, h)F(x) \quad \text{für alle } (g, h) \in \Gamma, x \in X.$$

Im Beispiel des TURING-Ringes wird vom Kopplungsgraphen die Symmetriegruppe $G = \mathbf{D}_4$ des Quadrates geliefert. Des weiteren setzen wir in dieser Arbeit zweidimensionale Zellen mit Drehsymmetrie $H = \mathbf{SO}(2)$ voraus. Die $\mathbf{SO}(2)$ -Symmetrie impliziert insbesondere $f(\xi, 0) = -f(-\xi, 0)$, so daß das System (2) entkoppelt. Konkret bedeutet dies folgendes:

Die linearen Unterräume

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in X \mid x_1 = -x_3, x_2 = x_4 = 0\}, \\ X_2 &= \{x \in X \mid x_1 = x_3 = 0, x_2 = -x_4\} \end{aligned}$$

sind invariant unter dem Fluß zu (2). Darüber hinaus ist auch ihre direkte Summe $X_1 \oplus X_2$ invariant. Daher ist der Fluß auf $X_1 \oplus X_2$ ein Produktfluß, der durch das entkoppelte System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, 0), & x_3 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= f(x_2, 0), & x_4 &= -x_2 \end{aligned}$$

erzeugt wird. Die gegenüberliegenden Zellen (1 und 3 bzw. 2 und 4) des Rings haben entgegengesetzte Vorzeichen, so daß sich ihre Kopplungseffekte in der Summe gegenseitig aufheben. Die einzelnen Zellen „sehen“ ihre Nachbarn nicht

¹ S_n bezeichnet die symmetrische Gruppe auf n Elementen.

mehr. Die beiden Paare gegenüberliegender Zellen sind entkoppelt. J.C. ALEXANDER und G. AUCHMUTY [AA86] betrachten allgemeine Ringe mehrerer Zellen und weisen – bei einer durch vier teilbaren Zellenzahl – solche Entkopplungs-Tori als Folge einer Hopf-Verzweigung nach.

Die Räume X_1 und X_2 haben noch eine weitere Eigenschaft. Sie sind nämlich die Fixpunkträume zu Untergruppen Σ_1 bzw. Σ_2 von Γ :

$$X_k = \{x \in X \mid \sigma x = x \text{ für alle } \sigma \in \Sigma_k\}.$$

Die Untergruppen Σ_k haben die Gestalt $\Sigma_k = \langle (g_k, h) \rangle$ ($k = 1, 2$), das heißt sie werden von einem Element erzeugt, das sich aus einer der Permutationen $g_1 = (1\ 3) \in G$ bzw. $g_2 = (2\ 4) \in G$ sowie der Punktspiegelung $h(\xi) = -\xi \in H$ zusammensetzt.

Eine solche Situation kann auch in dem allgemeinen System (1) eintreten. J.C. ALEXANDER und B. FIEDLER [AF89] geben abstrakte Bedingungen an, unter denen neben den Fixräumen X_1, X_2 zu Untergruppen Σ_1, Σ_2 auch deren direkte Summe $X_1 \oplus X_2$ invariant ist und der Fluß auf $X_1 \oplus X_2$ durch das direkte Produkt der Flüsse auf X_1 und X_2 dargestellt wird.

B. DIONNE, M. GOLUBITSKY und I. STEWART [DGS96a, DGS96b] untersuchen ebenfalls solche Systeme, lassen aber noch andere Möglichkeiten des Zusammenspiels der Symmetrie des Kopplungsgraphen mit der Symmetrie der Einzelzellen zu.

Diese Arbeit beschränkt sich jedoch auf das schon zitierte Beispiel des Ringes aus vier Zellen. In Abschnitt 3 wird zusätzlich noch die Existenz einer periodischen Trajektorie für die entkoppelten Oszillatoren

$$\dot{x}_i = f(x_i, 0)$$

vorausgesetzt. Diese erzeugt dann in (2) einen invarianten zwei-dimensionalen Torus mit einem Produkt-Fluß. Dieser Torus ist der Hauptgegenstand der Untersuchungen.

Die Arbeit ist in folgendermaßen gegliedert. Im Abschnitt 2 werden einige Sätze und Hilfsmittel aus der Theorie dynamischer Systeme zusammengetragen, die in der Arbeit benutzt werden. Abschnitt 3 dient der exakten Formulierung des Ausgangsproblems sowie der Einführung einiger Parameter. Daran schließt sich eine genauere Untersuchung der Symmetrien an, mit deren Hilfe das System transformiert und reduziert wird. Im Mittelpunkt des 4. Abschnitts steht der Nachweis und die Beschreibung des stabilen Bereiches auf dem invarianten Torus in Abhängigkeit der Parameter. Der letzte Abschnitt untersucht das Verhalten des Systems in der Nähe der Randpunkte dieses Stabilitätsbereiches.

2 Hilfsmittel

In diesem Abschnitt werden die bekannten theoretischen Sachverhalte zusammengefaßt, die in der Arbeit benutzt werden.

2.1 Äquivarianzen

Viele Anwendungen weisen in natürlicher Weise Symmetrien auf, zum Beispiel durch geometrische Symmetrien der Versuchsanordnungen oder durch mathematische Idealisierungen realer Gegebenheiten. Sie sind bei der Klassifikation des typischen Verhaltens dynamischer Systeme von entscheidender Bedeutung. Gewisse Phänomene können ohne Berücksichtigung von Symmetrien in generischen Modellen gar nicht auftreten, das heißt sie werden durch beliebig kleine Störungen des Systems zerstört. In [FS92], [Van82] wird dieser Sachverhalt vertieft. Systeme gekoppelter Oszillatoren weisen – durch das Modell induziert – ebenfalls eine Reihe von Symmetrien auf, so daß hier einige Begriffe geklärt werden sollten.

Symmetrien treten in Form von Gruppen auf. In dynamischen Systemen sind dabei die LIE-Gruppen besonders wichtig.

DEFINITION 1 *Eine LIE-Gruppe G ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die zugleich eine Gruppenstruktur trägt, so daß die Abbildungen*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G, & (g, h) &\longmapsto gh, \\ G &\longrightarrow G, & g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

differenzierbar sind.

Alternativ lassen sich kompakte LIE-Gruppen auch als Untergruppen der $\mathbf{O}(m)$, der Gruppe der orthogonalen linearen Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, beschreiben.

Diese Gruppen operieren auf dem Zustandsraum.

DEFINITION 2 *Eine Aktion einer LIE-Gruppe G auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung*

$$\sigma : G \times M \longrightarrow M, \quad (g, s) \longmapsto gs$$

mit

$$\mathbf{1}s = s, \quad \text{und} \quad g(hs) = (gh)s.$$

Ein Gruppenelement $g \in G$ kann dabei mit seiner Aktion $M \rightarrow M$, $s \mapsto gs$ identifiziert werden. Die Linearisierung dieser Aktion operiert auf den Tangentialräumen

$$Dg : T_s M \longrightarrow T_{g(s)} M, \quad v \longmapsto Dg v,$$

wobei für eine lineare Aktion auf einem linearen Raum $Dg = g$ ist.

Nun sind wir in der Lage, einen Bezug zwischen dynamischen Systemen und Symmetrien herzustellen.

DEFINITION 3 *Eine Abbildung $\Phi : M \rightarrow M$ heißt äquivariant unter einer LIE-Gruppe G (bzw. ihrer Aktion), wenn für alle $x \in M$ und $g \in G$ gilt:*

$$\Phi(gx) = g \Phi(x).$$

Bei einem Differentialgleichungssystem bezieht sich das zunächst einmal auf den Fluß Φ_t . Für das Vektorfeld f gilt dann

$$f(gx) = Dg f(x).$$

Unter Symmetrien eines dynamischen Systems verstehen wir in Zukunft stets Äquivarianzen des zugehörigen Flusses.

Sei zum Beispiel Φ_t der Fluß zu einem Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Der Fluß sei äquivariant unter der $\mathbf{SO}(2)$, der Gruppe der Drehungen der Ebene um den Ursprung, mit ihrer kanonischen Aktion. Dies ist genau das Verhalten, das wir von unseren gekoppelten Oszillatoren fordern werden. Da dies eine lineare Aktion ist, ist auch f $\mathbf{SO}(2)$ -äquivariant. Gehen wir zu Polarkoordinaten über, so operiert die Gruppe auf $(r, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times S^1$ als Verschiebung im zweiten Argument:

$$g(r, \phi) = (r, \phi + \rho_g).$$

Das transformierte Vektorfeld $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}_+ \times S^1$ ist dann unabhängig von ϕ :

$$\tilde{f}(r, \phi + \rho) = \tilde{f}(r, \phi).$$

Somit können wir das System auf die r -Komponente reduzieren.

DEFINITION 4 *Die Gruppe G operiere auf dem Raum X .*

1. *Der Fixraum von G ist der Raum aller ihrer Fixpunkte*

$$\text{Fix}(G) = \{x \in X \mid gx = x \text{ für alle } g \in G\}.$$

2. Der (Gruppen-)Orbit eines Punktes $x \in X$ ist der Raum

$$O(x) = \{gx \mid g \in G\}.$$

Besitzt ein dynamisches System eine Symmetrie, können wir zum Orbit-Raum übergehen. Wir identifizieren alle Punkte, die auf einem gemeinsamen Gruppenorbit liegen. Dadurch erhalten wir ein neues System, das – je nach Gruppenaktion – eine geringere Dimension besitzen kann.

2.2 Zentrumsmannigfaltigkeiten

Das Konzept der Zentrumsmannigfaltigkeiten ist ein grundlegendes Hilfsmittel bei der Untersuchung dynamischer Systeme in der Nähe von Gleichgewichten. Es gestattet die Reduktion des Problems auf den für die Gestalt des Flusses entscheidenden Teil. Im folgenden sind die diesbezüglichen Sätze zusammengefaßt, die wir später benötigen.

Sei F ein C^r -Vektorfeld ($r \geq 2$) in \mathbb{R}^n ,

$$\dot{u} = F(u).$$

Der Nullpunkt sei ein Gleichgewicht, $F(0) = 0$. Die Linearisierung $A = DF(0)$ des Vektorfeldes in diesem Gleichgewicht habe das Spektrum $\sigma = \sigma_s \cup \sigma_c \cup \sigma_u$ zu den verallgemeinerten Eigenräumen E_s, E_c, E_u mit

$$\Re(\lambda) \begin{cases} < 0 & \lambda \in \sigma_s \\ = 0 & \lambda \in \sigma_c \\ > 0 & \lambda \in \sigma_u. \end{cases}$$

SATZ 5 (Existenz) [GH82, Th. 3.2.1] [AI88, Ch. 3.4.2] [Car81, Ch. 1.3, Th. 1] *Unter den zuvor genannten Voraussetzungen existieren folgende lokale invariante Mannigfaltigkeiten:*

1. die (stabile) C^r -Mannigfaltigkeit W^s tangential zu E^s
2. die (instabile) C^r -Mannigfaltigkeit W^u tangential zu E^u
3. die C^{r-1} -Zentrumsmannigfaltigkeit W^c tangential zu E^c . Alle Trajektorien, die für alle (positiven und negativen) Zeiten in der Nähe des Gleichgewichtes bleiben, liegen in der Zentrumsmannigfaltigkeit.

Die Mannigfaltigkeiten W^s und W^u sind eindeutig, die Zentrumsmannigfaltigkeit muß nicht eindeutig sein.

SATZ 6 (Reduktionsprinzip) [AI88, Ch. III.4.3] *Es gibt eine Umgebung des Ursprungs, in dem der Fluß topologisch äquivalent² zum direkten Produkt der Flüsse zu folgenden Vektorfeldern ist:*

1. der Einschränkung des Originalsystems auf die Zentrumsmannigfaltigkeit W^c
2. dem „Standard-Sattel“

$$\dot{v} = -v, \quad \dot{w} = w, \quad v \in E^s, \quad w \in E^u$$

Insbesondere wird im Falle fehlender instabiler Richtungen ($E^u = \{0\}$) die (asymptotische) Stabilität von Objekten in W^c , z.B. von Gleichgewichten oder periodischen Orbits, bezüglich des Flusses in \mathbb{R}^n bereits durch ihre Stabilität bezüglich des auf die Zentrumsmannigfaltigkeit W^c eingeschränkten Flusses entschieden.

SATZ 7 (Äquivarianz) [Rue73, Th. 1.2] [Sch76, Th. 7.1] *Das Vektorfeld F sei äquivariant unter der linearen, orthogonalen Aktion einer Lie-Gruppe G . Das Gleichgewicht im Nullpunkt sei Fixpunkt der Gruppe G . Dann gibt es eine lokale Zentrumsmannigfaltigkeit W^c , die invariant unter der Gruppe G ist. Das auf W^c eingeschränkte Vektorfeld ist äquivariant bezüglich der auf W^c eingeschränkten Gruppenoperationen.*

Um Aussagen über die Gestalt des Flusses in der Nähe eines Gleichgewichtes zu machen, muß man also das Vektorfeld auf der Zentrumsmannigfaltigkeit berechnen. Werden die Koordinaten entsprechend der Eigenräume gewählt,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + f(x, y) & B \text{ linear, } f(0, 0) = 0, \text{ } Df(0, 0) = 0, \\ \dot{y} &= Cy + g(x, y) & C \text{ linear, } g(0, 0) = 0, \text{ } Dg(0, 0) = 0, \end{aligned}$$

so daß $E^c = \{(x, y) \mid y = 0\}$ ist, kann man die Zentrumsmannigfaltigkeit als Graph einer Funktion $h(x)$ darstellen:

$$W^c = \{(x, y) \mid y = h(x), \text{ } x \text{ nahe } 0 \}.$$

²Zwei Flüsse Φ_t und Ψ_t heißen topologisch äquivalent, wenn es eine Homöomorphismus h gibt, der sie ineinander überführt: $\Phi_t \circ h = h \circ \Psi_t$.

Das auf W^c eingeschränkte Vektorfeld ist auf E^c projizierbar:

$$\dot{x}_c = Bx_c + f(x_c, h(x_c)).$$

Sind f und g wenigstens C^4 -glatt, so ist h noch C^3 . Da W^c im Nullpunkt tangential an E^c liegt, ist $Dh(x) = 0$. $f(x, h(x))$ läßt sich dreimal nach x differenzieren, und wegen $f(0, 0) = 0$ und $Df(0, 0) = 0$ ergibt sich dann die TAYLOR-Entwicklung:

$$\begin{aligned} f(x, h(x)) &= \frac{1}{2}D^2f(0, 0)\left((x, Dh(0)x), (x, Dh(0)x)\right) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0, 0)(x, x) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\ &= f(x, 0) + \mathcal{O}(\|x\|^3). \end{aligned}$$

Somit gilt für das Vektorfeld auf der Zentrumsmannigfaltigkeit:

BEMERKUNG 8 *Wir finden*

$$\dot{x}_c = Bx_c + f(x_c, 0) + \mathcal{O}(\|x\|^3).$$

Zur Approximation der Projektion des Vektorfeldes der Zentrumsmannigfaltigkeit auf den Raum E^c bis zur zweiten Ordnung genügt es, die Projektion des Vektorfeldes des linearen Raums E^c selbst zu betrachten. Die Zentrumsmannigfaltigkeit muß dann nicht genauer berechnet werden.

Vier identische, zwei-dimensionale Oszillatoren x_i sind in einem Ring angeordnet und jeweils mit ihren Nachbarn gekoppelt. Die durch die quadratische Gestalt des Kopplungsgraphen induzierte \mathbf{D}_4 -Symmetrie des Systems wird von der Spiegelung α und der Drehung β erzeugt.

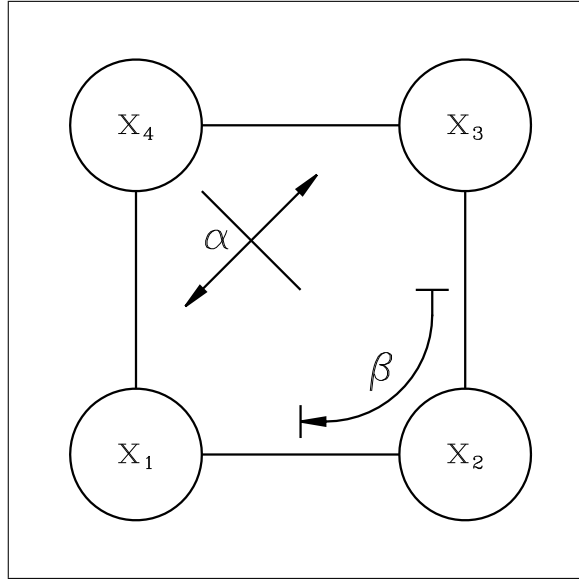


Abbildung 2: Ring von Oszillatoren

3 Problemstellung

3.1 Ausgangssituation

Gegeben seien vier identische, in einem Ring angeordnete, zwei-dimensionale Oszillatoren x_1, \dots, x_4 (siehe Abbildung 2) mit der Dynamik

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \alpha K(x_{i-1} + x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, 4 \pmod{4}, \quad \alpha > 0. \quad (3)$$

Zuerst betrachten wir einen einzelnen Oszillator x ohne den Einfluß der Kopplung. Dazu gehört das Vektorfeld $\dot{x} = F(x)$. Wir setzen voraus, daß der Fluß $\mathbf{SO}(2)$ -äquivariant ist. Das heißt, Fluß und Vektorfeld können mit Drehungen um den Ursprung vertauscht werden:

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}^{-1} F \left(\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} \right) = F \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix}.$$

Daher empfiehlt sich eine Darstellung in Polarkoordinaten (r, ϕ) – mittels der Koordinatentransformation

$$\zeta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \phi) \longmapsto x = (x_a, x_b) = (r \cos \phi, r \sin \phi).$$

In diesen Polarkoordinaten ist das Vektorfeld aufgrund der $\mathbf{SO}(2)$ -Äquivarianz von F unabhängig von ρ :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} &= \left(D\zeta \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \right)^{-1} F \left(\zeta \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}^{-1} F \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\frac{1}{r} \sin \phi & \frac{1}{r} \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} F \left(\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Weiterhin soll ein stabiler periodischer Orbit existieren, d.h. es gibt ein $r_0 > 0$ mit $g(r_0) \neq 0$, $f(r_0) = 0$ und $f'(r_0) < 0$. Da die Umgebung eines solchen Orbits eine transversale, flußinvariante, glatte Faserung besitzt (asymptotische Phase [Ama83, Th. 23.10]), können wir dort das System auf eine Form

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= f(r), \\
\dot{\phi} &= g = \text{konstant}
\end{aligned}$$

transformieren, so daß wir letzteres als gegeben annehmen.

Wenden wir uns nun dem Zusammenwirken der Oszillatoren zu. Die Kopplung K sei linear und, um die $\mathbf{SO}(2)$ -Äquivarianz auf das Gesamtsystem auszudehnen, sogar eine auf \mathbb{R}^2 operierende Drehung

$$K = \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix}.$$

Das Ausgangssystem (3) hat daher in Polarkoordinaten die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_i \\ \dot{\phi}_i \end{pmatrix} = \left(D\zeta \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_i \end{pmatrix} \right)^{-1} F \left(\zeta \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_i \end{pmatrix} \right) + \alpha \left(D\zeta \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_i \end{pmatrix} \right)^{-1} K \left(\zeta \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ \phi_{i-1} \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{i+1} \end{pmatrix} \right).$$

Den ersten Summanden kennen wir bereits. Den zweiten formen wir wie folgt um:

$$\begin{aligned}
& \alpha \begin{pmatrix} \cos \phi_i, & \sin \phi_i \\ -\frac{1}{r_i} \sin \phi_i, & \frac{1}{r_i} \cos \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi, & -\sin \chi \\ \sin \chi, & \cos \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \cos \phi_{i-1} + r_{i+1} \cos \phi_{i+1} \\ r_{i-1} \sin \phi_{i-1} + r_{i+1} \sin \phi_{i+1} \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} \cos(\chi - \phi_i), & -\sin(\chi - \phi_i) \\ \frac{1}{r_i} \sin(\chi - \phi_i), & \frac{1}{r_i} \cos(\chi - \phi_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \cos \phi_{i-1} + r_{i+1} \cos \phi_{i+1} \\ r_{i-1} \sin \phi_{i-1} + r_{i+1} \sin \phi_{i+1} \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} r_{i-1} \cos(\phi_{i-1} - \phi_i + \chi) + r_{i+1} \cos(\phi_{i+1} - \phi_i + \chi) \\ \frac{r_{i-1}}{r_i} \sin(\phi_{i-1} - \phi_i + \chi) + \frac{r_{i+1}}{r_i} \sin(\phi_{i+1} - \phi_i + \chi) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das System lautet schließlich

$$\begin{aligned}
\dot{r}_i &= f(r_i) + \alpha r_{i+1} \cos(\phi_{i+1} - \phi_i + \chi) + \alpha r_{i-1} \cos(\phi_{i-1} - \phi_i + \chi) \\
\dot{\phi}_i &= g + \alpha \frac{r_{i+1}}{r_i} \sin(\phi_{i+1} - \phi_i + \chi) + \alpha \frac{r_{i-1}}{r_i} \sin(\phi_{i-1} - \phi_i + \chi).
\end{aligned} \tag{4}$$

Das Entkopplungsphänomen, das wir näher studieren wollen, ist hier also der Bereich

$$E = \{(r_1, \dots, r_4, \phi_1, \dots, \phi_4) \mid r_i = r_{i+2}, \phi_i = \phi_{i+2} + \pi \pmod{2\pi}, i = 1, \dots, 4\}.$$

In E sind gegenüberliegende Zellen jeweils um eine halbe Periode versetzt, wodurch sich die Kopplungseffekte zu Null ergänzen. Der induzierte Fluß weist eine Produktstruktur auf

$$\begin{aligned}
r_1 &= f(r_1, 0), \quad \dot{\phi}_1 = g; & r_3 &= r_1, \quad \phi_3 = \phi_1 + \pi \pmod{2\pi}; \\
r_2 &= f(r_2, 0), \quad \dot{\phi}_2 = g; & r_4 &= r_2, \quad \phi_4 = \phi_2 + \pi \pmod{2\pi};
\end{aligned}$$

die beiden Paare sind vollständig entkoppelt. Von besonderem Interesse für uns ist dabei der invariante Torus

$$T = \{(r_1, \dots, r_4, \phi_1, \dots, \phi_4) \mid r_i = r_0, \phi_i = \phi_{i+2} + \pi \pmod{2\pi}, i = 1, \dots, 4\},$$

der sich gerade aus dem anfangs unterstellten periodischen Orbit ergibt, wenn er von gegenüberliegenden Oszillatoren um eine halbe Periode versetzt durchlaufen wird.

Für die weiteren Betrachtungen soll zur Vereinfachung der Formeln noch

$$r_0 = 1 \quad \text{und} \quad f'(r_0) = -1 \tag{5}$$

gelten. Diese Festsetzung wird durch die möglichen Reskalierungen der Koordinaten $\tilde{x}_i := x_i/r_0$ (bzw. $\tilde{r}_i := r_i/r_0$, $\tilde{\phi}_i := \phi_i$) und der Zeit $\tilde{t} := t |f'(r_0)|$

gerechtfertigt. Bei genannter Transformation ergibt sich ein System der gleichen Struktur³

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\tilde{x}_i = \frac{1}{|f'(r_0)|} \frac{1}{r_0} F(r_0\tilde{x}_i) + \frac{\alpha}{|f'(r_0)|} K(\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_{i+1}), \quad i = 1, \dots, 4,$$

das gerade die Normierungen (5) erfüllt. Der Kopplungskoeffizient $\tilde{\alpha}$ des normierten Systems kann dabei als das Verhältnis der ursprünglichen Kopplung α zur Kontraktionsrate $f'(r_0)$ transversal zum periodischen Orbit des ungekoppelten Oszillators angesehen werden.

3.2 Symmetrien

Dieser Abschnitt dient der näheren Untersuchung der unserem Differentialgleichungs-System (4) innewohnenden Symmetrien. Diese umfassen die Gruppe $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{D}_4$, die sich aus den Symmetrien der Einzelzellen und des Kopplungsgraphen zusammensetzt, sowie die Periodizität in den Winkeln. Mit deren Hilfe können wir die Dimension des Problems reduzieren. Außerdem helfen sie uns, den repräsentativen Bereich des Phasenraumes auszuwählen, den wir untersuchen müssen. Schließlich wird noch eine Spiegelung übrigbleiben, mit der wir spätere Rechnungen vereinfachen können.

Die $\mathbf{SO}(2)$ -Symmetrie der einzelnen Oszillatoren vererbt sich auf das Gesamtsystem, da sie auch von der Kopplung respektiert wird. Durch die Einführung der neuen Koordinaten $y = (r_1, \dots, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho)$ mit

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}(-\phi_1 + \phi_3) - \frac{1}{2}\pi, \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}(+\phi_2 - \phi_4) - \frac{1}{2}\pi, \\ \rho &= \frac{1}{2}(-\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 + \phi_4) - \frac{1}{2}\pi, \end{aligned} \tag{6}$$

wird so eine Reduktion des Problems auf sieben Dimensionen ermöglicht. Die Größen ψ_1 und ψ_2 können als Phasendifferenzen gegenüberliegender Zellen interpretiert werden. Die Verschiebung um $\frac{1}{2}\pi$ sorgt dafür, daß der uns interessierende Fall entgegengesetzter Werte gerade im Nullpunkt eintritt. ρ bezeichnet dann die Auslenkung der beiden Paare von Oszillatoren gegeneinander. Mit

³Man beachte, daß sich durch die Zeitskalierung auch die Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{g} = g/|f'(r_0)|$ in (4) ändert.

Hilfe der Identitäten

$$\begin{aligned}
\phi_2 - \phi_1 &= +\psi_1 + \psi_2 + \rho + \frac{3}{2}\pi, \\
\phi_3 - \phi_2 &= +\psi_1 - \psi_2 - \rho - \frac{1}{2}\pi, \\
\phi_4 - \phi_3 &= -\psi_1 - \psi_2 + \rho - \frac{1}{2}\pi, \\
\phi_1 - \phi_4 &= -\psi_1 + \psi_2 - \rho - \frac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

lassen sich nun folgende Gleichungen finden:

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= G(y), \quad \text{mit } y = (r_1, \dots, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \quad \text{und} \\
\dot{r}_1 &= f(r_1) + \alpha r_2 \sin(+\psi_1 + \psi_2 + \rho + \chi) - \alpha r_4 \sin(+\psi_1 - \psi_2 + \rho + \chi), \\
\dot{r}_2 &= f(r_2) + \alpha r_3 \sin(+\psi_1 - \psi_2 - \rho + \chi) - \alpha r_1 \sin(-\psi_1 - \psi_2 - \rho + \chi), \\
\dot{r}_3 &= f(r_3) + \alpha r_4 \sin(-\psi_1 - \psi_2 + \rho + \chi) - \alpha r_2 \sin(-\psi_1 + \psi_2 + \rho + \chi), \\
\dot{r}_4 &= f(r_4) + \alpha r_1 \sin(-\psi_1 + \psi_2 - \rho + \chi) - \alpha r_3 \sin(+\psi_1 + \psi_2 - \rho + \chi), \\
\dot{\psi}_1 &= +\frac{\alpha}{2} \frac{r_2}{r_1} \cos(+\psi_1 + \psi_2 + \rho + \chi) - \frac{\alpha}{2} \frac{r_4}{r_1} \cos(+\psi_1 - \psi_2 + \rho + \chi) \\
&\quad - \frac{\alpha}{2} \frac{r_4}{r_3} \cos(-\psi_1 - \psi_2 + \rho + \chi) + \frac{\alpha}{2} \frac{r_2}{r_3} \cos(-\psi_1 + \psi_2 + \rho + \chi), \\
\dot{\psi}_2 &= -\frac{\alpha}{2} \frac{r_3}{r_2} \cos(+\psi_1 - \psi_2 - \rho + \chi) + \frac{\alpha}{2} \frac{r_1}{r_2} \cos(-\psi_1 - \psi_2 - \rho + \chi) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \frac{r_1}{r_4} \cos(-\psi_1 + \psi_2 - \rho + \chi) - \frac{\alpha}{2} \frac{r_3}{r_4} \cos(+\psi_1 + \psi_2 - \rho + \chi), \\
\dot{\rho} &= +\frac{\alpha}{2} \frac{r_2}{r_1} \cos(+\psi_1 + \psi_2 + \rho + \chi) - \frac{\alpha}{2} \frac{r_4}{r_1} \cos(+\psi_1 - \psi_2 + \rho + \chi) \\
&\quad - \frac{\alpha}{2} \frac{r_3}{r_2} \cos(+\psi_1 - \psi_2 - \rho + \chi) + \frac{\alpha}{2} \frac{r_1}{r_2} \cos(-\psi_1 - \psi_2 - \rho + \chi) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \frac{r_4}{r_3} \cos(-\psi_1 - \psi_2 + \rho + \chi) - \frac{\alpha}{2} \frac{r_2}{r_3} \cos(-\psi_1 + \psi_2 + \rho + \chi) \\
&\quad - \frac{\alpha}{2} \frac{r_1}{r_4} \cos(-\psi_1 + \psi_2 - \rho + \chi) + \frac{\alpha}{2} \frac{r_3}{r_4} \cos(+\psi_1 + \psi_2 - \rho + \chi).
\end{aligned} \tag{7}$$

In diesen neuen Koordinaten ist der Bereich der Entkopplung durch

$$E = \{(r_1, \dots, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mid \psi_1 = \psi_2 = 0 \pmod{\pi}, r_i = r_{i+2}, i = 1, \dots, 4\}$$

gegeben. Der zu untersuchende invariante Torus hat infolge der Reduktion um eine Dimension die Gestalt einer Linie von Gleichgewichten

$$T = \{(r_1, \dots, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mid \psi_1 = \psi_2 = 0 \pmod{\pi}, r_i = 1, i = 1, \dots, 4\}.$$

Nach der Ausnutzung des kontinuierlichen Anteils der Symmetriegruppe für die Reduktion des Problems, besitzt das Vektorfeld (7) noch folgende vom Ausgangsproblem verbliebene Symmetrien:

1. Die Periodizitäten $\gamma_i : \phi_i \mapsto \phi_i + 2\pi$ der Gleichungen (4) in den Winkeln ϕ_i ergeben die Äquivarianzen

$$\begin{aligned}\gamma_1 & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1 + \pi, \psi_2, \rho + \pi), \\ \gamma_2 & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2 + \pi, \rho + \pi), \\ \gamma_3 & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1 + \pi, \psi_2, \rho - \pi), \\ \gamma_4 & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2 + \pi, \rho - \pi).\end{aligned}$$

2. Die \mathbf{D}_4 -Symmetrie des Kopplungsgraphen wird erzeugt von der Drehung $\beta : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_3, x_4, x_1)$ zusammen mit der Geradenspiegelung $\alpha : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_3, x_2, x_1, x_4)$ (siehe Abbildung 2). Diese führen auf die Äquivarianzen

$$\begin{aligned}\beta & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_2, r_3, r_4, r_1, -\psi_2 - \pi, \psi_1, -\rho - \pi), \\ \alpha & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_3, r_2, r_1, r_4, -\psi_1 - \pi, \psi_2, \rho).\end{aligned}$$

Die Verknüpfungen

$$\begin{aligned}\gamma_1 \circ \gamma_3 & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1 + 2\pi, \psi_2, \rho), \\ \gamma_2 \circ \gamma_4 & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2 + 2\pi, \rho), \\ \gamma_2 \circ \gamma_4^{-1} & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho + 2\pi)\end{aligned}\tag{8}$$

zeigen, daß auch in ψ_1 , ψ_2 und ρ jeweils eine Periodizität von 2π vorliegt. Daher genügt es, den Bereich

$$(\psi_1, \psi_2, \rho) \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right]^3$$

zu untersuchen. Die Kompositionen

$$\begin{aligned}\gamma_2 \circ \gamma_4^{-1} \circ \alpha \circ \beta & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_4, r_3, r_2, r_1, \psi_2, \psi_1, -\rho + \pi), \\ \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \alpha \circ \beta^2 & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_1, r_4, r_3, r_2, \psi_1, -\psi_2 + \pi, \rho), \\ \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \alpha & : (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mapsto (r_3, r_2, r_1, r_4, -\psi_1 + \pi, \psi_2, \rho)\end{aligned}\tag{9}$$

begründen nun sogar die Einschränkung auf einen „Fundamentalebene“

$$(\psi_1, \psi_2, \rho) \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right]^3,$$

der durch die genannten Spiegelungen und Verschiebungen auf den gesamten Phasenraum abgebildet werden kann.

Nachdem in (8) die Periodizitäten in den Winkeln und in (9) die Spiegelungen des Kopplungsgraphen ausgenutzt wurden, verbleiben letztlich als Symmetrien des reduzierten Systems (7) auf dem Fundamentalbereich nur die von der Drehung β stammenden Äquivarianzen

$$\begin{aligned} \delta & := \gamma_1 \circ \beta = (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \longmapsto (r_2, r_3, r_4, r_1, -\psi_2, \psi_1, -\rho), \\ \delta^2 & = (\gamma_1 \circ \beta)^2 = (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \longmapsto (r_3, r_4, r_1, r_2, -\psi_1, -\psi_2, \rho), \\ \delta^3 & = (\gamma_1 \circ \beta)^3 = (r_1, r_2, r_3, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \longmapsto (r_4, r_1, r_2, r_3, \psi_2, -\psi_1, -\rho). \end{aligned}$$

Besondere Bedeutung hat dabei die Spiegelung δ^2 . Die von ihr erzeugte und zu \mathbb{Z}_2 isomorphe Symmetriegruppe hat als Fixraum exakt den Entkopplungsbereich E , der somit von den Äquivarianzeigenschaften des Problems induziert wird. Allerdings kann der Produktfluß auf E nicht allein durch die Symmetrien begründet werden. Für ihn ist auch die spezielle Struktur der Kopplung, in die die benachbarten Zellen nur über ihre Summe eingehen, maßgebend.

4 Linearisierung

Wir wollen uns nun der Frage nach der Stabilität der Linie von Gleichgewichten

$$T = \{(r_1, \dots, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mid r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1, \psi_1 = \psi_2 = 0, \rho \text{ beliebig}\}$$

widmen, die im Ursprungssystem dem invarianten Torus innerhalb des Bereiches E der Entkopplung entspricht. Das Vektorfeld (7) hat in einem solchen Gleichgewicht y_{fix} die Linearisierung

$$\frac{d}{dy}G(y_{\text{fix}}) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha S_+ & 0 & -\alpha S_+ & 0 & 2\alpha C_+ & 0 \\ -\alpha S_- & -1 & \alpha S_- & 0 & 2\alpha C_- & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha S_+ & -1 & \alpha S_+ & 0 & -2\alpha C_+ & 0 \\ \alpha S_- & 0 & -\alpha S_- & -1 & -2\alpha C_- & 0 & 0 \\ 0 & \alpha C_+ & 0 & -\alpha C_+ & 0 & -2\alpha S_+ & 0 \\ \alpha C_- & 0 & -\alpha C_- & 0 & 2\alpha S_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Hierbei und in den folgenden Formeln gelten die Abkürzungen

$$\begin{aligned} S_+ &:= \sin(\chi + \rho) \\ S_- &:= \sin(\chi - \rho) \\ C_+ &:= \cos(\chi + \rho) \\ C_- &:= \cos(\chi - \rho). \end{aligned}$$

Die beiden komplementären linearen Unterräume

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\delta^2) &= \{(r_1, \dots, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mid r_3 = r_1, r_4 = r_2, \psi_1 = \psi_2 = 0\} \quad \text{und} \\ I &= \{(r_1, \dots, r_4, \psi_1, \psi_2, \rho) \mid r_3 = -r_1, r_4 = -r_2, \rho = 0\}, \end{aligned}$$

von denen der erste der Fixraum der Symmetrie δ^2 ist, bleiben unter (10) invariant.

Die Eigenwerte, die zu dem drei-dimensionalen Raum $\text{Fix}(\delta^2)$ gehören, sind sofort abzulesen:

1. Der Eigenwert 0 mit dem Eigenvektor $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ in Richtung der Linie von Gleichgewichten.
2. Der doppelte Eigenwert -1 mit dem von den Vektoren $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ aufgespannten Eigenraum. Bei Störungen in diese Richtungen bleibt die Entkopplung der Oszillatoren erhalten.

Es bleibt der invariante Unterraum $I \cong \mathbb{R}^4 = \{(r_1, r_2, \psi_1, \psi_2)\}$ zu betrachten. Auf diesem wirkt die lineare Abbildung (10) in der Form

$$\left. \frac{d}{dy} G(y_{\text{fix}}) \right|_I = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha S_+ & 0 & 2\alpha C_+ \\ -2\alpha S_- & -1 & 2\alpha C_- & 0 \\ 0 & 2\alpha C_+ & 0 & -2\alpha S_+ \\ 2\alpha C_- & 0 & 2\alpha S_- & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix lautet

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2\alpha S_+ & 0 & -2\alpha C_+ \\ 2\alpha S_- & \lambda + 1 & -2\alpha C_- & 0 \\ 0 & -2\alpha C_+ & \lambda & 2\alpha S_+ \\ -2\alpha C_- & 0 & -2\alpha S_- & \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 1) (\lambda^2 (\lambda + 1) - 4\alpha^2 C_- C_+ \lambda + 4\alpha^2 S_- S_+ (\lambda + 1)) \\ &\quad + 2\alpha S_+ (2\alpha S_- \lambda^2 + 8\alpha^3 C_-^2 S_+ + 8\alpha^3 S_-^2 S_+) \\ &\quad + 2\alpha C_+ (8\alpha^3 S_-^2 C_+ - 2\alpha C_- \lambda (\lambda + 1) + 8\alpha^3 C_-^2 C_+) \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^3 + (1 + 8\alpha^2 (S_- S_+ - C_- C_+)) \lambda^2 + 8\alpha^2 (S_- S_+ - C_- C_+) \lambda \\ &\quad + 16\alpha^4 (C_-^2 S_+^2 + S_-^2 S_+^2 + S_-^2 C_+^2 + C_-^2 C_+^2) + 4\alpha^2 S_- S_+ \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^3 + (1 - 8\alpha^2 \cos(2\chi)) \lambda^2 - 8\alpha^2 \cos(2\chi) \lambda \\ &\quad + 16\alpha^4 + 2\alpha^2 \cos(2\rho) - 2\alpha^2 \cos(2\chi). \end{aligned}$$

Dieses läßt sich aufgrund seiner speziellen Gestalt darstellen als

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda^2 + \lambda - \mu_1)(\lambda^2 + \lambda - \mu_2) \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^3 + (1 - (\mu_1 + \mu_2)) \lambda^2 - (\mu_1 + \mu_2) \lambda + \mu_1 \mu_2 \end{aligned}$$

wobei (nach dem VIETASchen Wurzelsatz) $\mu_{1,2}$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \mu^2 - (\mu_1 + \mu_2) \mu + \mu_1 \mu_2 \\ &= \mu^2 - 8\alpha^2 \cos(2\chi) \mu + 16\alpha^4 + 2\alpha^2 \cos(2\rho) - 2\alpha^2 \cos(2\chi) \end{aligned}$$

sind. Nach den Lösungsformeln für quadratische Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_{1,\dots,4} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\mu_{1,2}} \\ \mu_{1,2} &= 4\alpha^2 \cos(2\chi) \pm \sqrt{16\alpha^4 \cos^2(2\chi) - 16\alpha^4 - 2\alpha^2 \cos(2\rho) + 2\alpha^2 \cos(2\chi)} \end{aligned}$$

lassen sich nun die Nullstellen von p und somit die fehlenden vier Eigenwerte

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{16\alpha^2 \cos(2\chi) + 1 \pm 4\sqrt{2\alpha^2(\cos(2\chi) - \cos(2\rho)) - 16\alpha^4(1 - \cos^2(2\chi))}}$$

bestimmen. Zur besseren Übersicht in den nachfolgenden Formeln führen wir die Hilfsgrößen $u \in \mathbb{R}$ und $v, w \in \mathbb{C}$ ein:

$$\begin{aligned} u &:= 16\alpha^2 \cos(2\chi) + 1 \\ v^2 &:= 2\alpha^2 (\cos(2\chi) - \cos(2\rho) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))) \\ w^2 &:= u + 4v. \end{aligned} \quad (12)$$

Die Eigenwerte haben dann die Gestalt $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w$, wobei v zwei und somit w vier Werte bezeichnet.

Zu einem so dargestellten Eigenwert gehört der Eigenvektor ⁴

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha \sin(2\chi) \cos(\chi + \rho) + \frac{1}{2\alpha}(1 + 2v - w) \sin(\chi + \rho) \\ \cos(2\rho) - \cos(2\chi) + \frac{1}{4\alpha^2}v(w - 1) \\ -4\alpha \sin(2\chi) \sin(\chi + \rho) + \frac{1}{\alpha}v \cos(\chi + \rho) \\ w \sin(2\chi) - \sin(2\rho) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Die bei Eigenwerten höherer Vielfachheit ($v = 0$ bzw. $w = 0$) auftretenden Diskrepanzen zwischen algebraischer und geometrischer Vielfachheit stören nicht, da bei den späteren Betrachtungen sichergestellt ist, daß die benutzten Eigenvektoren zu einfachen Eigenwerten gehören.

Über die Eigenwerte läßt sich folgende Aussage machen, die im Anschluß bewiesen wird:

SATZ 9 (Stabilität des Entkopplungsphänomens) *Die vier Eigenwerte der linearen Abbildung (11) treten als zwei Paare reeller oder zwei Paare konjugiert komplexer Zahlen auf, die in der GAUSSschen Zahlenebene symmetrisch zum Punkt $(-\frac{1}{2}, 0)$ liegen. In Sonderfällen können einige dieser Werte zusammenfallen und Eigenwerte höherer Vielfachheit bilden.*

Unter der Voraussetzung

$$\cos(2\chi) < \min \left\{ 0, \frac{1}{8\alpha^2} - 1 \right\}$$

⁴Rechnung mit Mathematica

sind in dem Bereich

$$\cos(2\chi) - 8\alpha^2 < \cos(2\rho) < -\cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$$

(siehe Abbildung 3) die Realteile aller zum Unterraum I gehörenden Eigenwerte negativ. Das heißt, dieser Bereich der Linie T von Gleichgewichten des Systems (7) ist stabil.

Stabilität bedeutet hier: Jeder Fixpunkt $y_{\text{fix}} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, \rho) \in T$ mit $\cos(2\rho)$ aus dem oben angegebenen Bereich besitzt eine offene Umgebung U , so daß alle Trajektorien mit Startwerten aus U gegen die Gleichgewichtslinie T konvergieren.

Zum Beweis dieser Behauptung ist eine genauere Untersuchung der Lage der Eigenwerte in der komplexen Zahlenebene nötig. Diese wird in Form einer Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von v^2 , d.h. einer Unterscheidung nach reellen und konjugiert komplexen Lösungen v , durchgeführt. Die Abbildungen 4 bis 8 zeigen für einige charakteristische Parameterwerte die Lage der Eigenwerte.

Fall 1: $0 < v^2$, bzw. $\cos(2\rho) < \cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$

In diesem Fall nimmt v also zwei reelle Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen an.

Als erstes weisen wir nach, daß

$$0 \leq u = 16\alpha^2 \cos(2\chi) + 1. \quad (14)$$

Beweis: Angenommen, es gilt $1 < -16\alpha^2 \cos(2\chi)$. Daraus folgt insbesondere $\cos(2\chi) < 0$. Nun läßt sich wie folgt schließen:

$$\begin{aligned} & 0 < v^2 \\ \stackrel{(12), 2\alpha^2 > 0}{\iff} & 0 < \cos(2\chi) - \cos(2\rho) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi)) \\ \stackrel{\text{Annahme}}{\implies} & \cos(2\rho) < \cos(2\chi) + \frac{8\alpha^2}{16\alpha^2 \cos(2\chi)}(1 - \cos^2(2\chi)) \\ \iff & \cos(2\rho) < \frac{1}{2} \cos(2\chi) + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos(2\chi)} \\ \stackrel{\cos(2\chi) < 0}{\implies} & \cos(2\rho) < -\frac{1}{2} \left(\sqrt{-\cos(2\chi)} - \sqrt{\frac{1}{-\cos(2\chi)}} \right)^2 - 1 \leq -1. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, womit die Behauptung gezeigt ist. ■

Mit diesem Resultat läßt sich nun unmittelbar beweisen, daß $0 \leq w^2$ ist, also alle vier Eigenwerte reell sind.

Beweis:

$$\begin{aligned}
& 0 \leq (1 - 16\alpha^2)^2 = 1 - 32\alpha^2 + 256\alpha^4 \\
\stackrel{\cos \geq -1}{\implies} & 0 \leq 1 + 32\alpha^2 \cos(2\rho) + 256\alpha^4 \\
\iff & 0 \leq 256\alpha^4 \cos^2(2\chi) + 32\alpha^2 \cos(2\chi) + 1 \\
& \quad - (256\alpha^4 \cos^2(2\chi) + 32\alpha^2 \cos(2\chi) - 256\alpha^4 - 32\alpha^2 \cos(2\rho)) \\
\stackrel{(12)}{\iff} & 0 \leq u^2 - 16v^2 \\
\stackrel{(14), v \in \mathbb{R}}{\implies} & 4|v| \leq u \\
\stackrel{v \in \mathbb{R}}{\implies} & 0 \leq u + 4v \quad (\text{beide möglichen Vorzeichen von } v) \\
\stackrel{(12)}{\implies} & 0 \leq w^2.
\end{aligned}$$

Somit ist für beide möglichen Werte von v der Wert von w^2 nichtnegativ. ⁵ ■

Schließlich bleibt noch zu klären, welche Vorzeichen die resultierenden Eigenwerte haben. Die aus den nichtpositiven Lösungen $-|w|$ resultierenden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|w|$ sind stets negativ. Für die beiden anderen Eigenwerte $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}|w|$ gilt:

$$\begin{aligned}
& 0 <, =, > \lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}|w| \\
\stackrel{(12)}{\iff} & 0 <, =, > 16\alpha^2 \cos(2\chi) + 4v.
\end{aligned}$$

Ist $\cos(2\chi) = 0$, so haben wir einen positiven und einen negativen Eigenwert – korrespondierend zu den beiden Werten v . Andernfalls gibt es genau eine Lösung $v \neq 0$ mit dem gleichen Vorzeichen wie $\cos(2\chi)$. Diese führt auf einen Eigenwert mit ebendiesem Vorzeichen. Der letzte verbleibende Eigenwert hat das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag. Wegen

$$\begin{aligned}
& 16\alpha^2 |\cos(2\chi)| <, =, > 4|v| \\
\iff & 16\alpha^4 \cos^2(2\chi) <, =, > v^2 \\
\stackrel{(12)}{\iff} & \cos(2\rho) <, =, > \cos(2\chi) - 8\alpha^2
\end{aligned}$$

können wir an der letzten Ungleichung das Vorzeichen des vierten Eigenwertes ablesen. Das Ergebnis ist in Tafel 1 zusammengefaßt.

⁵Es ist sogar ersichtlich, daß dann und nur dann, wenn $\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos(2\rho) = -1$ und $v \leq 0$ eintritt, in der letzten Zeile die Gleichheit $0 = w^2$ gilt. In diesem Fall besitzt w also eine doppelte Lösung Null und zwei einfache Lösungen. Sonst hat w stets vier verschiedene Lösungen. Dies ist auch in den Abbildungen 4 und 5 ersichtlich, die beiden symmetrisch zu $(-\frac{1}{2}, 0)$ liegenden Stränge von Eigenwerten berühren sich in den Punkten A bei $(-\frac{1}{2}, 0)$ genau dann, wenn $\alpha = \frac{1}{4}$ gilt.

	$\cos(2\chi) < 0$	$\cos(2\chi) = 0$	$\cos(2\chi) > 0$
$\cos(2\rho) > \cos(2\chi) - 8\alpha^2$	----	$v^2 < 0$	--++
$\cos(2\rho) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2$	----0	$v^2 = 0$	--0+
$\cos(2\rho) < \cos(2\chi) - 8\alpha^2$	----+	----+	----+

Tabelle 1: Vorzeichen der Eigenwerte von (11) im Fall 1 ($v^2 > 0$)

Fall 2: $0 > v^2$, bzw. $\cos(2\rho) > \cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$

In diesem Fall nimmt v zwei rein imaginäre, von Null verschiedene Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen an. Die vier Werte w bilden zwei Paare konjugiert komplexer Zahlen mit entgegengesetzten, von Null verschiedenen Realteilen:

$$\begin{aligned}
w &= \pm a \pm i b, & a, b \in \mathbb{R}, & a, b > 0, & \text{wobei} \\
a^2 - b^2 &= u \\
&= 16\alpha^2 \cos(2\chi) + 1, \\
a^2 b^2 &= -4v^2 \\
&= 64\alpha^4 - 64\alpha^4 \cos^2(2\chi) - 8\alpha^2 \cos(2\chi) + 8\alpha^2 \cos(2\rho).
\end{aligned} \tag{15}$$

Von den entstehenden Eigenwerten $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w$ haben zwei $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-a \pm i b)$ stets negativen Realteil. Das Vorzeichen der Realteile der anderen beiden Werte $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(a \pm i b)$ richtet sich nach dem Vorzeichen von $a - 1$.

Im Falle $\cos(2\chi) \geq 0$ folgt wegen (15) sofort, daß $a^2 - b^2 \geq 1$ und somit $a^2 > 1$ ist. Das bedeutet, daß die beiden Eigenwerte $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(a \pm i b)$ positiven Realteil haben.

Sei nun also $\cos(2\chi) < 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(15) \implies a^2 + 4v^2 \frac{1}{a^2} &= u \\
\iff 0 &= a^4 - u a^2 + 4v^2 \\
\stackrel{a^2 > 0, 4v^2 < 0}{\iff} a^2 &= \frac{1}{2}u + \sqrt{\frac{1}{4}u^2 - 4v^2} \\
\stackrel{(12)}{\iff} a^2 &= 8\alpha^2 \cos(2\chi) + \frac{1}{2} + \sqrt{64\alpha^4 + 8\alpha^2 \cos(2\rho) + \frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

	$\cos(2\chi) < 0$	$\cos(2\chi) = 0$	$\cos(2\chi) > 0$
$\cos(2\rho) > 8\alpha^2(\cos^2(2\chi) - 1) - \cos(2\chi)$	--++	--++	--++
$\cos(2\rho) = 8\alpha^2(\cos^2(2\chi) - 1) - \cos(2\chi)$	--00	$v^2 = 0$	$v^2 > 0$
$\cos(2\rho) < 8\alpha^2(\cos^2(2\chi) - 1) - \cos(2\chi)$	-----	$v^2 > 0$	$v^2 > 0$

Tabelle 2: Vorzeichen der Realteile der Eigenwerte von (11) im Fall 2 ($v^2 < 0$)

und

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{l} \xleftrightarrow{a>0} \\ \iff \\ \xleftrightarrow{\cos(2\chi)<0} \\ \iff \end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
0 <, =, > a - 1 \\
1 <, =, > a^2 \\
\frac{1}{2} - 8\alpha^2 \cos(2\chi) <, =, > \sqrt{64\alpha^4 + 8\alpha^2 \cos(2\rho) + \frac{1}{4}} \\
\frac{1}{4} - 8\alpha^2 \cos(2\chi) + 64\alpha^4 \cos^2(2\chi) <, =, > 64\alpha^4 + 8\alpha^2 \cos(2\rho) + \frac{1}{4} \\
-\cos(2\chi) + 8\alpha^2(\cos^2(2\chi) - 1) <, =, > \cos(2\rho).
\end{array}$$

Die letzte Ungleichung entscheidet über das Vorzeichen der beiden Eigenwerte $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(a \pm ib)$. Das Resultat ist noch einmal in Tafel 2 zusammengefaßt.

Fall 3: $0 = v^2$, bzw. $\cos(2\rho) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$

In diesem Fall hat w zwei doppelte Werte

$$w^2 = u = 16\alpha^2 \cos(2\chi) + 1,$$

die im Falle $\cos(2\chi) = -\frac{1}{16\alpha^2}$ gleichzeitig null werden. ⁶ Wir untersuchen wieder das Vorzeichen der Realteile der Eigenwerte $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w$.

Ist $\cos(2\chi) = -1$, so folgt wegen $v = 0$ auch $\cos(2\rho) = -1$, und es gilt $w^2 = 1 - 16\alpha^2$. Die dazugehörigen Eigenwerte $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w$ haben also negativen Realteil, unabhängig davon, ob sie reell ($\alpha \leq \frac{1}{4}$) oder echt komplex ($\alpha > \frac{1}{4}$) sind. ⁷

⁶Da – wie im nachfolgenden Text gezeigt – $w^2 = 0$ außerdem nur für $\cos(2\chi) = -1$ möglich ist, tritt dieser Spezialfall eines Eigenwertes $-\frac{1}{2}$ der Vielfachheit 4 nur bei den Parameterwerten $\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos(2\chi) = -1$ in Punkten mit $\cos(2\rho) = -1$ ein, siehe Abbildung 5 (erstes Bild).

⁷Diese Tatsache ist auch in den Abbildungen 4 bis 8 (erstes Bild, Punkt A) ersichtlich.

$\cos(2\chi) < 0$	$\cos(2\chi) = 0$	$\cos(2\chi) > 0$
-----	--00	--++

Tabelle 3: Vorzeichen der Realteile der Eigenwerte von (11) im Fall 3 ($v^2 = 0$)

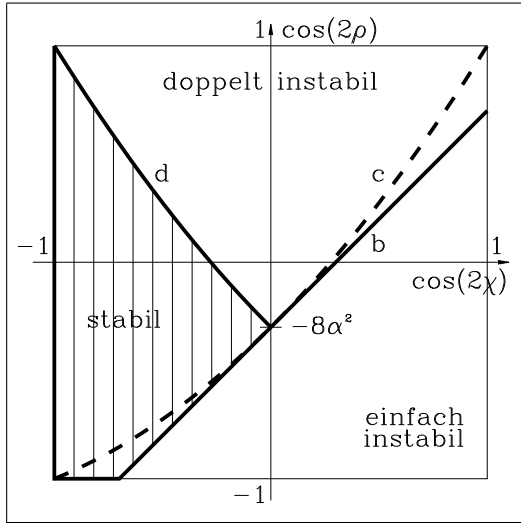
Ist $\cos(2\chi) \neq -1$ kann ähnlich dem Fall 1 gezeigt werden, daß $0 < w^2$ ist.
Beweis: Angenommen $1 \leq -16\alpha^2 \cos(2\chi)$. Dann gilt insbesondere $\cos(2\chi) < 0$ und

$$\begin{aligned}
& 0 = v^2 \\
& \stackrel{(12), 2\alpha^2 > 0}{\iff} 0 = \cos(2\chi) - \cos(2\rho) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi)) \\
& \stackrel{\text{Annahme}}{\implies} \cos(2\rho) \leq \cos(2\chi) + \frac{8\alpha^2}{16\alpha^2 \cos(2\chi)}(1 - \cos^2(2\chi)) \\
& \iff \cos(2\rho) \leq \frac{1}{2} \cos(2\chi) + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos(2\chi)} \\
& \stackrel{-1 \neq \cos(2\chi) < 0}{\implies} \cos(2\rho) < -1,
\end{aligned}$$

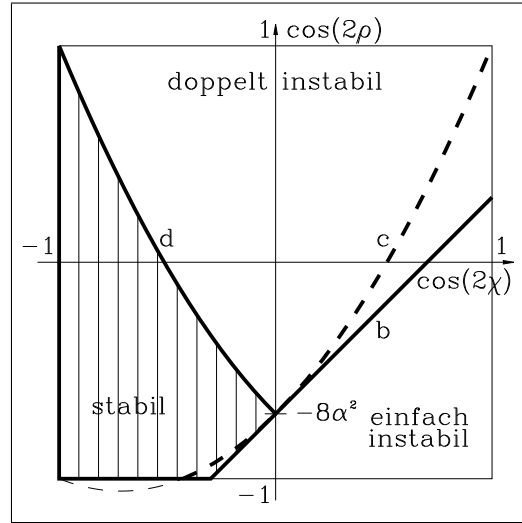
im Widerspruch zum Wertebereich von $\cos(2\rho)$. ■

Somit hat w zwei doppelte reelle Lösungen mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die Eigenwerte $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{16\alpha^2 \cos(2\chi) + 1}$ haben Vielfachheit 2 und sind reell. Der zum negativen Wert von w gehörende Eigenwert ist negativ. Der andere Eigenwert hat dasselbe Vorzeichen wie $\cos(2\chi)$. (siehe Tafel 3)

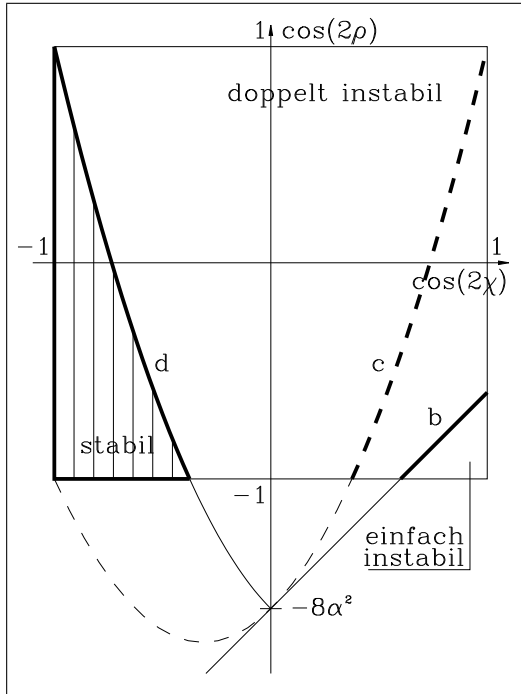
Mit den Resultaten der vorangegangenen drei Fälle ist nun der Satz 9 bewiesen.



$$\alpha \leq \frac{1}{4}$$



$$\frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{4}\sqrt{2}$$



$$\frac{1}{4}\sqrt{2} < \alpha$$

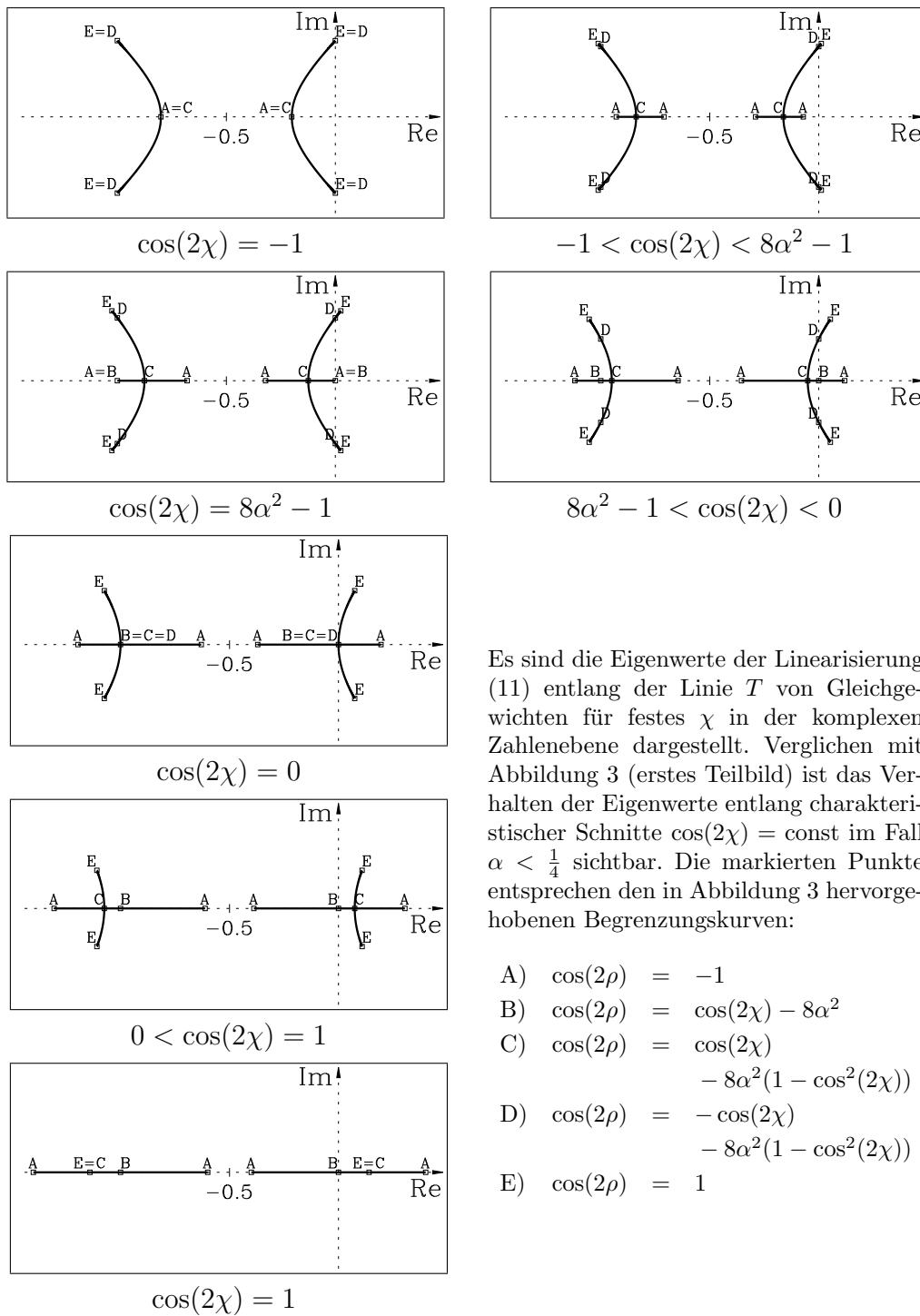
Für drei charakteristische Werte von α sind die Bereiche von $\cos(2\rho)$ in Abhängigkeit des Parameters $\cos(2\chi)$ dargestellt, in denen die Realteile der Eigenwerte der reduzierten Linearisierung (11) ihre Vorzeichen beibehalten und somit die Stabilität der untersuchten Gleichgewichte festlegen.

Die markierten Kurven berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(2\rho) &= \cos(2\chi) - 8\alpha^2 \\ \text{c) } \cos(2\rho) &= \cos(2\chi) \\ &\quad - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi)) \\ \text{d) } \cos(2\rho) &= -\cos(2\chi) \\ &\quad - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi)) \end{aligned}$$

Die Kurven b und d trennen die Stabilitätsgebiete. Bei Überschreiten der Kurve b wechselt ein reeller Eigenwert das Vorzeichen. Die Kurve d markiert den Übertritt eines Paares konjugiert komplexer Eigenwerte über die imaginäre Achse. Die Kurve c trennt die Bereiche mit reellen (unterhalb) von denen mit komplexen Eigenwerten (oberhalb). Im Schnittpunkt aller drei Kurven (für $\cos(2\chi) = 0$ und $\cos(2\rho) = -8\alpha^2$) sind zwei Eigenwerte null.

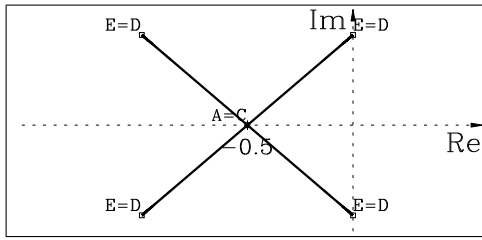
Abbildung 3: Stabiler Bereich des invarianten Torus der Entkopplung



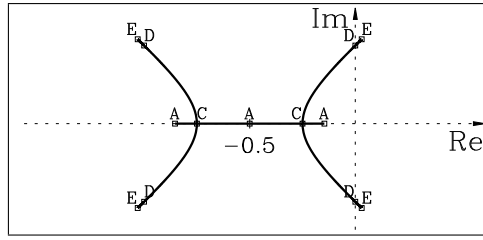
Es sind die Eigenwerte der Linearisierung (11) entlang der Linie T von Gleichgewichten für festes χ in der komplexen Zahlenebene dargestellt. Verglichen mit Abbildung 3 (erstes Teilbild) ist das Verhalten der Eigenwerte entlang charakteristischer Schnitte $\cos(2\chi) = \text{const}$ im Fall $\alpha < \frac{1}{4}$ sichtbar. Die markierten Punkte entsprechen den in Abbildung 3 hervorgehobenen Begrenzungskurven:

- A) $\cos(2\rho) = -1$
- B) $\cos(2\rho) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2$
- C) $\cos(2\rho) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$
- D) $\cos(2\rho) = -\cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$
- E) $\cos(2\rho) = 1$

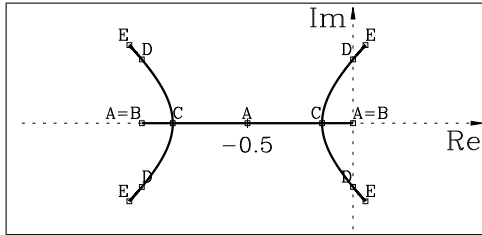
Abbildung 4: Eigenwerte der Linearisierung (11) für $\alpha < \frac{1}{4}$



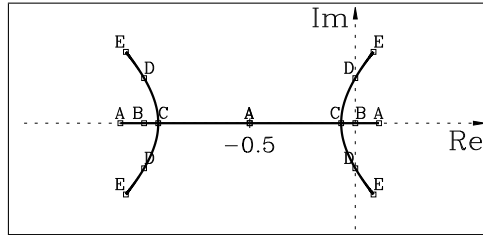
$$\cos(2\chi) = -1$$



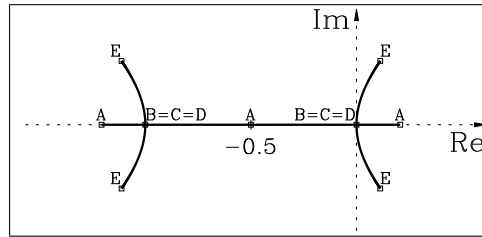
$$-1 < \cos(2\chi) < 8\alpha^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$



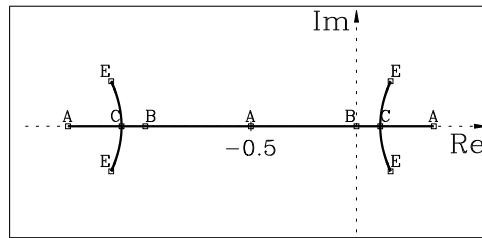
$$\cos(2\chi) = 8\alpha^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$



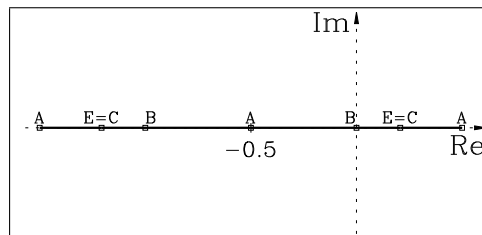
$$-\frac{1}{2} = 8\alpha^2 - 1 < \cos(2\chi) < 0$$



$$\cos(2\chi) = 0$$



$$0 < \cos(2\chi) < 1$$



$$\cos(2\chi) = 1$$

Es sind die Eigenwerte der Linearisierung (11) entlang der Linie T von Gleichgewichten für feste Werte von χ in der komplexen Zahlenebene dargestellt. Verglichen mit Abbildung 3 (erstes und zweites Teilbild) ist das Verhalten der Eigenwerte entlang charakteristischer Schnitte $\cos(2\chi) = \text{const}$ im Grenzfall $\alpha = \frac{1}{4}$ sichtbar. Die markierten Punkte entsprechen den in Abbildung 3 hervorgehobenen Begrenzungskurven:

- A) $\cos(2\rho) = -1$
- B) $\cos(2\rho) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2$
- C) $\cos(2\rho) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$
- D) $\cos(2\rho) = -\cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$
- E) $\cos(2\rho) = 1$

Abbildung 5: Eigenwerte der Linearisierung (11) für $\alpha = \frac{1}{4}$

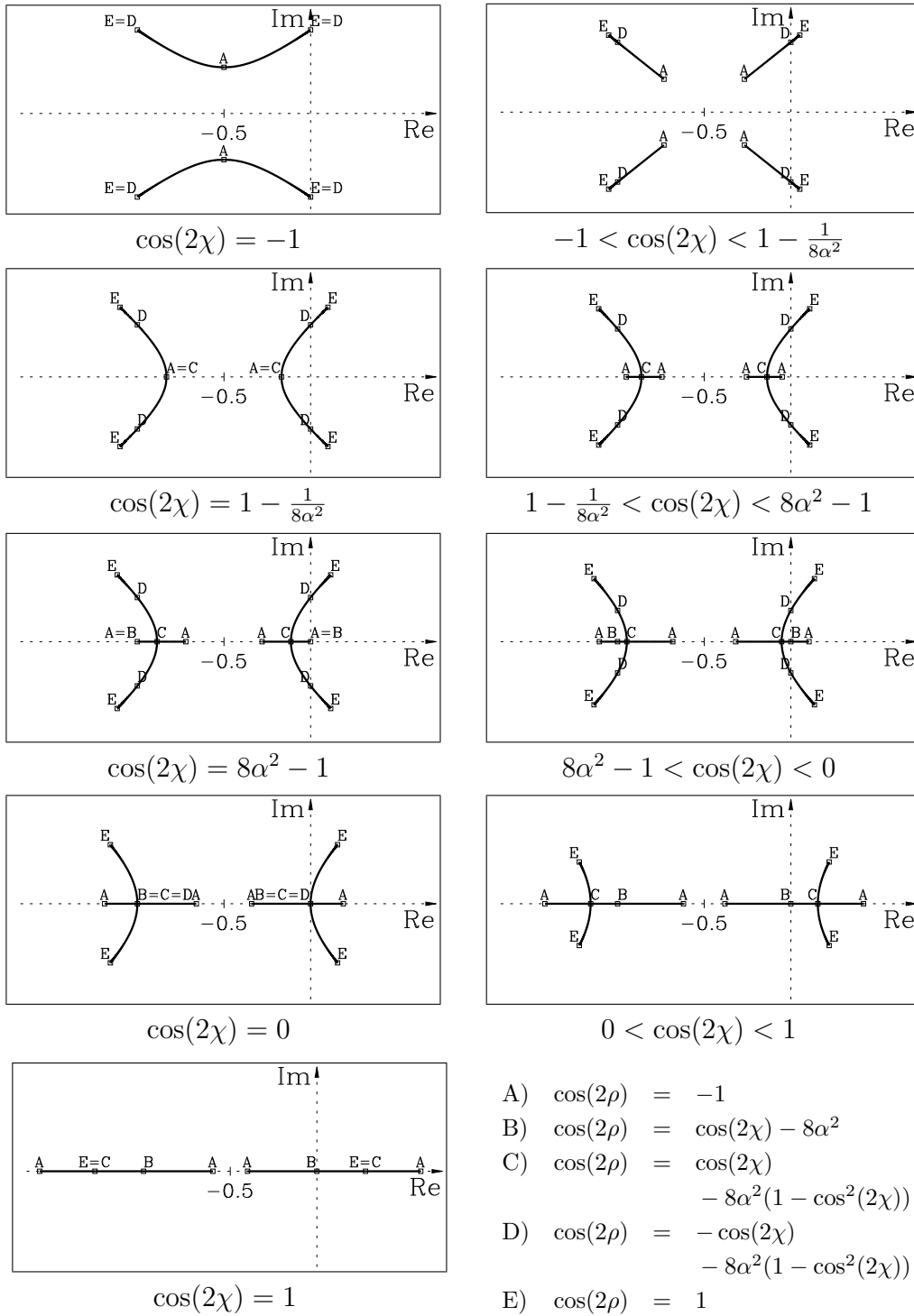
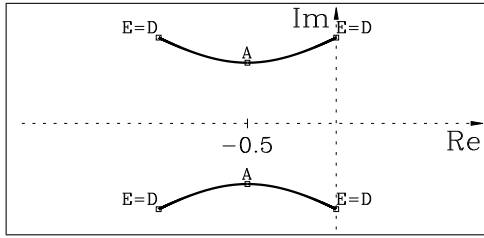
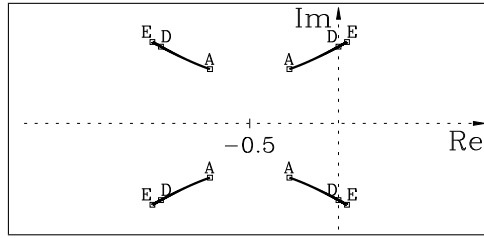


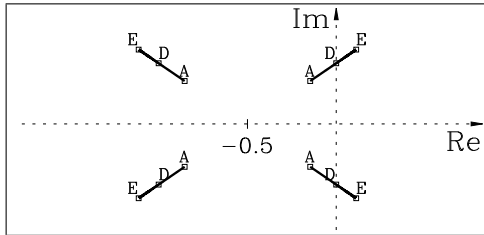
Abbildung 6: Eigenwerte der Linearisierung (11) für $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{4}\sqrt{2}$



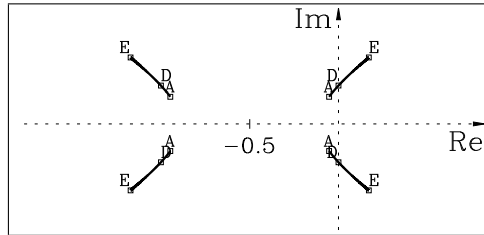
$\cos(2\chi) = -1$



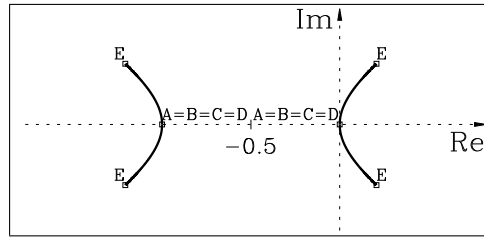
$-1 < \cos(2\chi) < 0$



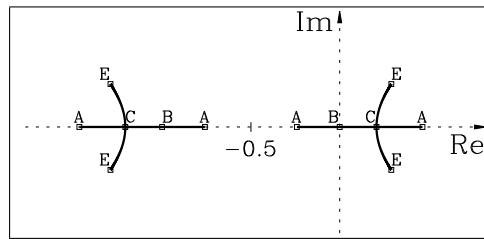
$-1 < \cos(2\chi) < 0$



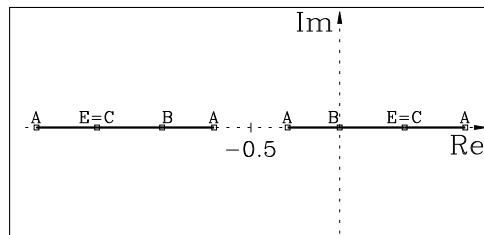
$-1 < \cos(2\chi) < 0$



$\cos(2\chi) = 0$



$0 < \cos(2\chi) < 1$



$\cos(2\chi) = 1$

Es sind die Eigenwerte der Linearisierung (11) entlang der Linie T von Gleichgewichten für festes χ in der komplexen Zahlenebene dargestellt. Verglichen mit Abbildung 3 (zweites und drittes Teilbild) ist das Verhalten der Eigenwerte entlang charakteristischer Schnitte $\cos(2\chi) = \text{const}$ im Grenzfalle $\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ sichtbar. Die markierten Punkte entsprechen den in Abbildung 3 hervorgehobenen Begrenzungskurven:

- A) $\cos(2\rho) = -1$
- B) $\cos(2\rho) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2$
- C) $\cos(2\rho) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$
- D) $\cos(2\rho) = -\cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$
- E) $\cos(2\rho) = 1$

Abbildung 7: Eigenwerte der Linearisierung (11) für $\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

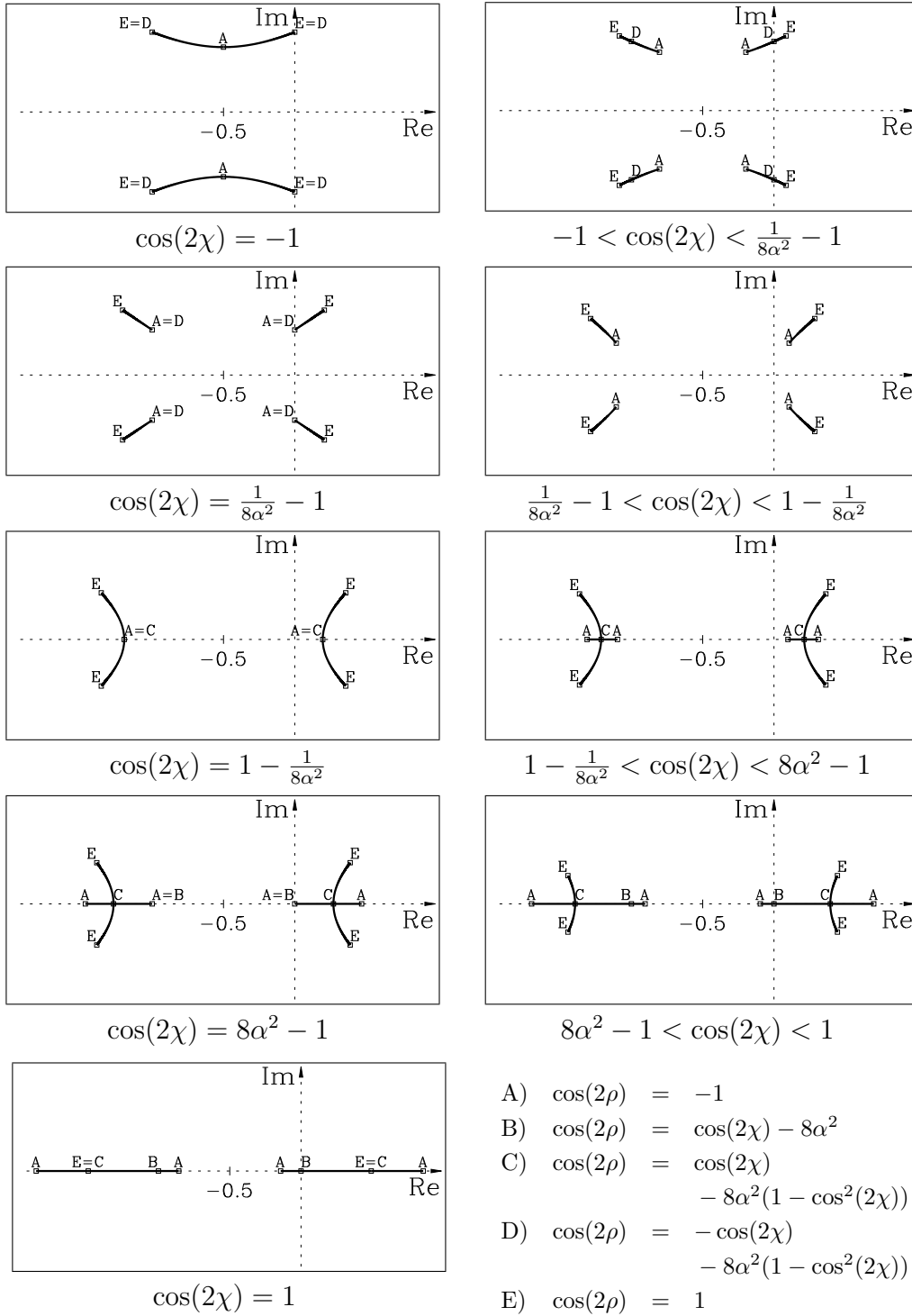
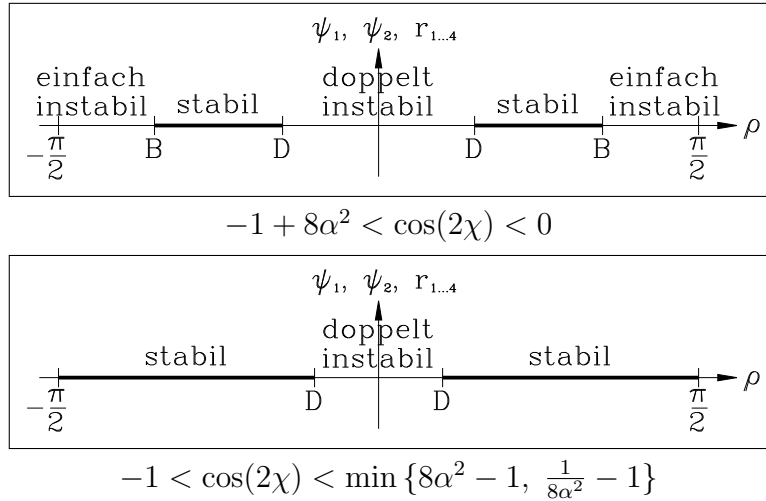


Abbildung 8: Eigenwerte der Linearisierung (11) für $\frac{1}{4}\sqrt{2} < \alpha$



Es ist die Gleichgewichtslinie T des untersuchten Systems (7) mit dem Stabilitätsbereich dargestellt. In der oberen Abbildung, besteht dieser aus zwei Intervallen, an deren Enden die Stabilität auf zwei verschiedene Arten wechselt (siehe Bemerkung 10). Im unten dargestellten Fall, gehen die Intervalle über den Rand des Fundamentalbereiches hinaus (man beachte, daß der Bereich $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ durch die in Abschnitt 3.2 betrachteten Symmetrien fortgesetzt wird) und werden an beiden Enden von einem Punkt des Typs D begrenzt. Andere Möglichkeiten existieren nicht (siehe Abbildung 3).

Abbildung 9: Line T der Gleichgewichte mit Stabilitätswechseln

5 Verhalten in der Nähe der Stabilitätswechsel

Aus Satz 9 wissen wir, daß es für gewisse Parameterwerte von χ auf der Linie T von Gleichgewichten des Vektorfeldes (7) zwei Intervalle gibt, in denen die Gleichgewichte stabil sind (siehe Abbildung 9). Jetzt wollen wir die Gestalt des Flusses in der Nähe jener Gleichgewichte $y_{\text{fix}} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, \rho) \in T$ untersuchen, in denen die Stabilität von T wechselt.

BEMERKUNG 10 Für diesen Stabilitätsverlust gibt es zwei Varianten:

1. Im Falle

$$8\alpha^2 - 1 < \cos(2\chi) < 0 \quad \text{und insbesondere} \quad \alpha < \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

wechselt im Punkt B

$$y_b := (1, 1, 1, 1, 0, 0, \rho_b), \quad \cos(2\rho_b) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2$$

genau ein (reeller) Eigenwert das Vorzeichen (vergleiche Abbildung 3, Kurve b und Beweis zu Satz 9).

2. Im Falle

$$-1 < \cos(2\chi) < \min \left\{ 0, \frac{1}{8\alpha^2} - 1 \right\}$$

überschreitet im Punkt D

$$y_d := (1, 1, 1, 1, 0, 0, \rho_d), \quad \cos(2\rho_d) = -\cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi))$$

genau ein Paar konjugiert komplexer, nicht reeller Eigenwerte die imaginäre Achse (vergleiche Abbildung 3, Kurve d und Beweis zu Satz 9).

Gäbe es – was hier nicht der Fall ist – eine fluß-invariante Faserung transversal zu der Linie T von Gleichgewichten, so würde dieses Verhalten der Eigenwerte eine Pitchfork- bzw. Hopf-Verzweigung nach sich ziehen.

In beiden Fällen gilt auch die übliche Transversalitätsbedingung, daß die Ableitung des Realteils der betroffenen Eigenwerte nach dem „Parameter“ ρ im kritischen Punkt nicht verschwindet ⁸

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \lambda_{\text{krit}} \Big|_{\rho=\rho_b} &= 2 \frac{1}{w_{\text{krit}}} \frac{1}{v_{\text{krit}}} \alpha^2 \sin(2\rho_b) \neq 0 \\ \frac{d}{d\rho} \Re(\lambda_{\text{krit}}) \Big|_{\rho=\rho_d} &= -2 \frac{|\Im(w_{\text{krit}})|}{|w_{\text{krit}}|^2 |v_{\text{krit}}|} \alpha^2 \sin(2\rho_d) \neq 0. \end{aligned}$$

Um Klarheit über das Verhalten in der Nähe der kritischen Punkte y_b bzw. y_d unseres Systems zu gewinnen, müssen wir das Vektorfeld in der zwei- bzw. drei-dimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit betrachten, zu der stets auch die Richtung der Linie T – mit dem konstanten Eigenwert Null – gehört.

Folgendes ist dabei noch zu berücksichtigen. Das Ausgangssystem verfügt über eine \mathbb{Z}_2 -Äquivarianz, die die Gleichgewichte y_{fix} fest läßt. Wir können also von der Zentrumsmannigfaltigkeit annehmen, daß sie unter dieser Symmetrie in sich abgebildet wird und daß das induzierte Vektorfeld ebenfalls diese Äquivarianz besitzt (Satz 7). Die hier betrachtete Symmetrie wird von der Abbildung δ^2 erzeugt. Diese läßt die Linie T von Gleichgewichten – die in der Zentrumsmannigfaltigkeit liegt – punktweise fest. Die Eigenvektoren zu den anderen kritischen Eigenwerten liegen in dem Unterraum I , auf dem δ^2 als Vorzeichenwechsel

⁸Man beachte, daß in den betrachteten Fällen die Eigenwerte die Vielfachheit eins besitzen. Die Wurzelausdrücke v , w sind nicht null und besitzen im zweiten Fall einen nicht verschwindenden Imaginärteil. Der Wert von $\sin(2\rho)$ ist ebenfalls von null verschieden, da $-1 < \cos(2\rho) < 1$ gilt.

operiert. Das bedeutet, daß auf der Zentrumsmanifold eine Äquivarianz induziert wird, die als Spiegelung an der Linie T operiert.

Zunächst wollen wir an einem allgemeinen Differentialgleichungs-System untersuchen, welche prinzipiellen Möglichkeiten das auf die Zentrumsmanifold reduzierte Vektorfeld in der Nähe kritischer Punkte der betrachteten Typen hat. Dazu dienen die folgenden beiden Abschnitte.

5.1 Einfacher Stabilitätsverlust einer allgemeinen Linie von Fixpunkten

Wir betrachten – losgelöst von den übrigen Abschnitten – ein genügend glattes, zwei-dimensionales Vektorfeld

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h_1(x, y) \\ \dot{y} &= h_2(x, y) \end{aligned} \quad h_1, h_2 \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad k \geq 4 \quad (16)$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Es existiert eine Linie von Gleichgewichten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist dies die x -Achse. Das bedeutet

$$h_1(x, 0) = h_2(x, 0) = 0. \quad (17)$$

2. Die Liniarisierung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} h_1(x, 0), \frac{\partial}{\partial y} h_1(x, 0) \\ \frac{\partial}{\partial x} h_2(x, 0), \frac{\partial}{\partial y} h_2(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \frac{\partial}{\partial y} h_1(x, 0) \\ 0, \frac{\partial}{\partial y} h_2(x, 0) \end{pmatrix}$$

des Vektorfeldes in diesen Gleichgewichten besitzt außer dem Eigenwert $e_1(x) = 0$ mit Eigenvektoren in Richtung der x -Achse einen Eigenwert $e_2(x) = \frac{\partial}{\partial y} h_2(x, 0)$, der in einem kritischen Punkt – o.B.d.A dem Koordinatenursprung – mit positiver Geschwindigkeit das Vorzeichen wechselt:

$$e_2(0) = 0, \quad \frac{d}{dx} e_2(0) > 0.$$

Wir wollen lokale Betrachtungen in der Nähe des Koordinatenursprungs anstellen.

Nahe dem Nullpunkt, genauer in einer Umgebung der Null mit $\frac{d}{dx} e_2(x) > 0$, kann durch die Koordiantentransformation $\tilde{x} := e_2(x)$, $\tilde{y} := y$ erreicht werden,

daß – unter Beibehaltung der zuvor geforderten Eigenschaften – für den zweiten Eigenwert \tilde{e}_2 der Linearisierung gilt:

$$\tilde{e}_2(\tilde{x}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} h_2(e_2^{-1}(\tilde{x}), 0) = e_2(e_2^{-1}(\tilde{x})) = \tilde{x}.$$

Wir können also schon im Ausgangssystem

$$e_2(x) = \frac{\partial}{\partial y} h_2(x, 0) = x \quad (18)$$

voraussetzen.

Aufgrund der Bedingung (17) gibt es nach dem HADAMARD-Lemma C^{k-1} -Funktionen \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 mit

$$h_1(x, y) = y \tilde{h}_1(x, y), \quad h_2(x, y) = y \tilde{h}_2(x, y).$$

Das System (16) ist daher mit dem Vektorfeld

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{h}_1(x, y), \\ \dot{y} &= \tilde{h}_2(x, y) \end{aligned} \quad (19)$$

durch den EULER-Multiplikator $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{y}$ verbunden. Beide Systeme besitzen außerhalb der x -Achse die gleichen Trajektorien, wobei die unterhalb der x -Achse liegenden Trajektorien entgegengesetzt durchlaufen werden. Um aus einem Phasenportrait des Vektorfeldes (19) eines für das System (16) zu erhalten, müssen wir lediglich die Gleichgewichte auf der x -Achse hinzufügen und den Durchlaufsinne der Trajektorien unterhalb dieser Achse umkehren.

In einer Umgebung des Nullpunktes kann das System (19) durch die konstanten und linearen Glieder seiner TAYLOR-Entwicklung approximiert werden. Diese haben infolge der Bedingung (18) die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{h}_1(x, y) = a_{01} + a_{11} x + a_{02} y + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{y} &= \tilde{h}_2(x, y) = x + b_{02} y + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (20)$$

für $x, y = \mathcal{O}(\epsilon)$ und $\epsilon \rightarrow 0$.

Dies entspricht einer TAYLOR-Näherung des Ausgangssystems (16) bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h_1(x, y) = a_{01} y + a_{11} xy + a_{02} y^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ \dot{y} &= h_2(x, y) = xy + b_{02} y^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Es ist aber noch eine weitere Spezialisierung möglich, da das uns eigentlich interessierende Problem der gekoppelten Oszillatoren noch die \mathbb{Z}_2 -Äquivarianz δ^2 aufweist.

Besitzt das System (16) zusätzlich eine \mathbb{Z}_2 -Äquivarianz, die als Spiegelung an der x-Achse operiert

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= h_1(x, -y), \\ h_2(x, y) &= -h_2(x, -y), \end{aligned}$$

so hat das Vektorfeld (20) die Gestalt

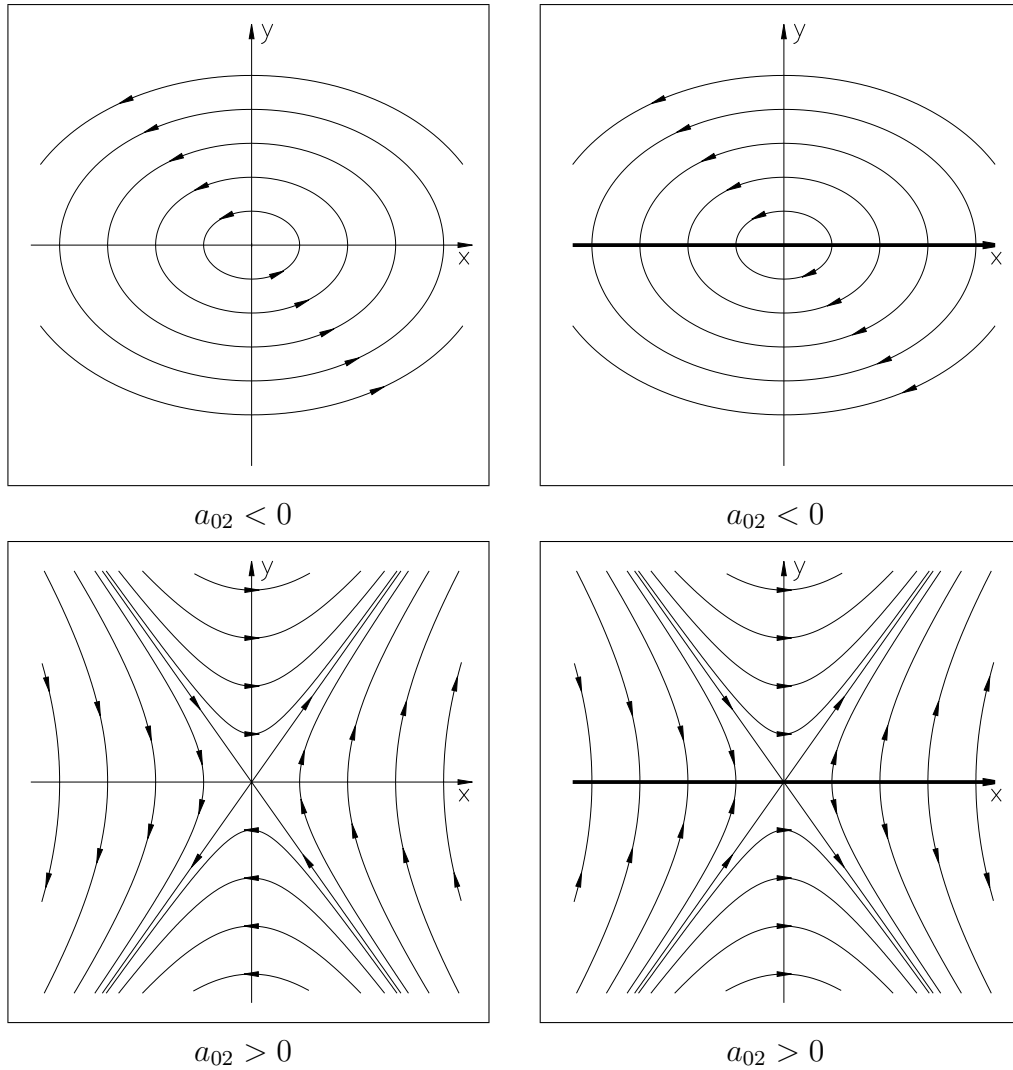
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{h}_1(x, y) = a_{02} y + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{y} &= \tilde{h}_2(x, y) = x + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{21}$$

da in h_1 nur gerade und in h_2 nur ungerade Potenzen von y auftauchen können. Dieses System hat für $a_{02} > 0$ die Gestalt eines Sattels, der aufgrund des GROBMAN-HARTMAN-Satzes auch unter $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ -Störungen erhalten bleibt. Im Falle $a_{02} < 0$ liegt ein von periodischen Trajektorien umgebenes Zentrum vor, das im allgemeinen nicht erhalten bleiben würde. Hier sorgt aber wieder die \mathbb{Z}_2 -Symmetrie des Ausgangssystems – die jetzt eine Antisymmetrie ist – für die Persistenz der periodischen Orbits; die ursprünglich geschlossenen Trajektorien, die durch eine allgemeine Störung zu Spiralen aufgebrochen würden, müssen sich aufgrund der Symmetrie auch im gestörten Fall schließen.

BEMERKUNG 11 *Für das Phasenportrait von (16) gibt es unter Voraussetzung der zuvor beschriebenen \mathbb{Z}_2 -Äquivarianz nur zwei qualitativ verschiedene generische Fälle (siehe dazu Abbildung 10):*

1. *Falls $a_{02} < 0$, ist die Umgebung des Ursprungs mit heteroklinen Verbindungen von den (instabilen) Gleichgewichten des positiven Teils der x-Achse zu den (stabilen) Gleichgewichten des negativen Teils der x-Achse ausgefüllt.*
2. *Falls $a_{02} > 0$, gibt es keine solche Verbindungen nahe dem Ursprung.*

Im Entartungsfall $a_{02} = 0$ genügt die TAYLOR-Entwicklung bis zur Ordnung 2 nicht zur Bestimmung des Verhaltens des Systems.



Die beiden Varianten des Vektorfeldes (21) im nicht entarteten Fall $a_{02} \neq 0$ sind auf der linken Seite dargestellt. Indem die Gleichgewichte auf der x -Achse eingefügt und die Trajektorien für negative y umgekehrt werden, ergeben sich die auf der rechten Seite abgebildeten qualitativen Möglichkeiten des Phasenportraits zum Vektorfeld (16) bei Berücksichtigung der beschriebenen \mathbb{Z}_2 -Äquivarianz.

Abbildung 10: Einfacher Stabilitätswechsel mit Symmetrie

5.2 Doppelter Stabilitätsverlust einer allgemeinen Linie von Fixpunkten

Ähnlich wie im vorigen Abschnitt betrachten wir nun ein drei-dimensionales Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x, y, z) \\ h_2(x, y, z) \\ h_3(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad h \in C^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \quad k \geq 4 \quad (22)$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Es existiert eine Linie von Gleichgewichten, o.B.d.A. die x -Achse:

$$h(x, 0, 0) = 0.$$

Deshalb gibt es nach dem HADAMARD-Lemma C^{k-1} -Funktionen $\tilde{h}, \tilde{\tilde{h}}$ mit

$$h(x, y, z) = y\tilde{h}(x, y, z) + z\tilde{\tilde{h}}(x, y, z). \quad (23)$$

2. Das System besitzt eine \mathbb{Z}_2 -Symmetrie, die als gleichzeitiger Vorzeichenwechsel in y und z operiert:

$$\begin{aligned} h_1(x, y, z) &= h_1(x, -y, -z), \\ h_2(x, y, z) &= -h_2(x, -y, -z), \\ h_3(x, y, z) &= -h_3(x, -y, -z). \end{aligned} \quad (24)$$

3. Die Liniarisierung

$$Dh \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{\partial}{\partial y} h_2(x, 0, 0), & \frac{\partial}{\partial z} h_2(x, 0, 0) \\ 0, & \frac{\partial}{\partial y} h_3(x, 0, 0), & \frac{\partial}{\partial z} h_3(x, 0, 0) \end{pmatrix}$$

des Vektorfeldes in den Gleichgewichten $y = z = 0$ besitzt außer dem Eigenwert $e_1(x) = 0$ mit Eigenvektoren in Richtung der x -Achse zwei konjugiert komplexe Eigenwerte $e_{2,3}(x) = a(x) \pm ib(x)$, wobei a, b reell sind. Die Realteile dieser beiden Eigenwerte wechseln im Koordinatenursprung mit positiver Geschwindigkeit das Vorzeichen:

$$a(0) = 0, \quad \frac{d}{dx} a(0) > 0.$$

Außerdem seien die Koordinaten y, z so gewählt, daß im Nullpunkt gilt:

$$Dh \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0, 0 \\ 0, 0, -\omega \\ 0, \omega, 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = b(0) > 0.$$

Aufgrund dieser Bedingungen hat das Vektorfeld (22) die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h_1(x, y, z) = a_1 y^2 + a_2 yz + a_3 z^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ \dot{y} &= h_2(x, y, z) = -\omega z + b_1 xy + b_2 xz + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ \dot{z} &= h_3(x, y, z) = \omega y + c_1 xy + c_2 xz + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (25)$$

für $x, y, z = \mathcal{O}(\epsilon)$ und $\epsilon \rightarrow 0$.

Dabei gilt zusätzlich $b_1 + c_2 = 2 \frac{d}{dx} a(0) > 0$.

Die imaginären Anteile der Eigenwerte führen zu Trajektorien, die sich um die x -Achse spiralen, was durch Einführung von Polarkoordinaten besser sichtbar wird. Mit $y = r \cos \vartheta$ und $z = r \sin \vartheta$ erhalten wir ⁹

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r^2(a_1 \cos^2 \vartheta + a_2 \cos \vartheta \sin \vartheta + a_3 \sin^2 \vartheta) + r \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{r} &= rx(b_1 \cos^2 \vartheta + (b_2 + c_1) \cos \vartheta \sin \vartheta + c_2 \sin^2 \vartheta) + r \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{\vartheta} &= \omega + x(c_1 \cos^2 \vartheta + (-b_1 + c_2) \cos \vartheta \sin \vartheta - b_2 \sin^2 \vartheta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (26)$$

für $x, r = \mathcal{O}(\epsilon)$ und $\epsilon \rightarrow 0$.

Die \dot{x} - und \dot{r} -Komponenten besitzen nur Terme von mindestens zweiter Ordnung in ϵ . Die Winkel-Komponente hat die Größenordnung eins. Diese Struktur erinnert an Systeme, die mittels *Averaging* behandelt werden können [SV85]. Die Idee besteht darin, das Vektorfeld über die sich schnell verändernden Anteile zu mitteln. Das über ϑ gemittelte, d.h. von 0 bis 2π integrierte, Vektorfeld zu (26) lautet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r^2(a_1 + a_3) + r \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{r} &= rx(b_1 + c_2) + r \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (27)$$

Das letzte Vektorfeld hat wegen $b_1 + c_2 = 2 \frac{d}{dx} a(0) > 0$ genau die im vorigen Abschnitt untersuchte Gestalt.

Die Schwierigkeit besteht nun darin, daß sich die üblichen Resultate zum *Averaging* auf parameterabhängige, singular gestörte Systeme beziehen und in

⁹Aufgrund der Bedingung (23) läßt sich aus den Komponenten \dot{x} und \dot{r} des Vektorfeldes jeweils ein r abspalten.

unserer Situation nicht anwendbar sind. In dieser Arbeit ist kein Nachweis gelungen, ob und in wie weit das System (27) eine Approximation von (26) ist.

Es liegt jedoch die Vermutung nahe, daß die Trajektorien des Ausgangssystems (22) die qualitative Gestalt von Spiralen um die x -Achse haben, die sich aus den Trajektorien von (27) durch Rotation um die x -Achse ergeben. Das Vorzeichen von $a_1 + a_3$ entscheidet dann, welcher der im vorigen Abschnitt, Bemerkung 11 und Abbildung 10, beschriebenen Typen vorliegt.

5.3 TAYLOR-Näherung des Vektorfeldes in der Zentrums-mannigfaltigkeit

Die beiden vorangegangenen Abschnitte haben gezeigt, daß die Terme zweiter Ordnung in der TAYLOR-Entwicklung des Vektorfeldes (7) auf der Zentrums-mannigfaltigkeit genügen, um die qualitative Gestalt des Phasenportraits in der Nähe der kritischen Punkte y_b bzw. y_d festzulegen (sofern kein Entartungsfall vorliegt).

Aufgrund von Bemerkung 8 genügt es, dazu das Vektorfeld auf dem von den Eigenvektoren zu den kritischen Eigenwerten aufgespannten Unterraum zu betrachten. Diese Eigenvektoren beinhalten den Vektor $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ entlang der Linie von Gleichgewichten sowie ein bzw. zwei Vektoren aus dem Unterraum $I = \{(r_1, \dots, r_4, \psi_1, \psi_2, 0) | r_3 = -r_1, r_4 = -r_2\}$. Das resultierende System kann also in Koordinaten ρ, e bzw. ρ, e, f dargestellt werden.

Weiterhin ist aus den vorangegangenen Abschnitten ersichtlich, daß wir im Grunde nur den Term zweiter Ordnung der Entwicklung von $\dot{\rho}$ bestimmen müssen. Dies soll im folgenden geschehen. Zuerst wollen wir aber einige in den Formeln auftauchende Terme vorab untersuchen.

Die Radien r_i liegen in der Nähe von $r_0 = 1$ und treten im System (7) stets als Quotienten r_i/r_j auf. Sie haben die Form

$$r_i := 1 + \hat{r}_i, \quad \hat{r}_i = \mathcal{O}(\epsilon) \quad i = 1, \dots, 4.$$

Aufgrund der Konvergenz der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n, \quad \text{falls } |z| < 1$$

ergibt sich für die Quotienten:

$$\frac{r_i}{r_j} = 1 + \hat{r}_i - \hat{r}_j - \hat{r}_i \hat{r}_j + \hat{r}_j^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Die Winkel ψ_i , die in der Nähe von 0 liegen, treten als Argumente von Winkelfunktionen auf. Mit

$$\psi_1 = \mathcal{O}(\epsilon), \quad \psi_2 = \mathcal{O}(\epsilon),$$

der Reihenentwicklung der Winkelfunktionen

$$\begin{aligned} \sin \psi_i &= \psi_i + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ \cos \psi_i &= 1 - \frac{1}{2}\psi_i^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned}$$

und dem Additionstheorem

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c - \sin a \sin b \cos c - \sin a \cos b \sin c$$

ergibt sich unter Beachtung der Beschränktheit der Winkelfunktionen schließlich

$$\begin{aligned} &\cos(\psi_1 + \psi_2 + \rho + \chi) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\psi_1^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\psi_2^2\right)\cos(\rho + \chi) - \left(1 - \frac{1}{2}\psi_1^2\right)\psi_2\sin(\rho + \chi) \\ &\quad - \psi_1\psi_2\cos(\rho + \chi) - \psi_1\left(1 - \frac{1}{2}\psi_2^2\right)\sin(\rho + \chi) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\psi_1^2 - \frac{1}{2}\psi_2^2 - \psi_1\psi_2\right)\cos(\rho + \chi) \\ &\quad - (\psi_1 + \psi_2)\sin(\rho + \chi) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Kommen wir nun zur Berechnung von $\dot{\rho}$. Dazu setzen wir die zuvor bestimmten Entwicklungen

$$\begin{aligned} &\frac{r_i}{r_j}\cos(\psi_1 + \psi_2 + \rho + \chi) \\ &= \{ \text{Polynom 1. Grades in } \psi_1, \psi_2, \hat{r}_i, \hat{r}_j \} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}\psi_1^2 - \frac{1}{2}\psi_2^2 - \psi_1\psi_2 + \hat{r}_j^2 - \hat{r}_i\hat{r}_j\right)\cos(\rho + \chi) \\ &\quad - (\hat{r}_i - \hat{r}_j)(\psi_1 + \psi_2)\sin(\rho + \chi) \end{aligned}$$

in (7) ein. Da in einem Gleichgewichtspunkt entwickelt wird, fallen alle Terme der Ordnung ϵ^0 automatisch weg. Die \mathbb{Z}_2 -Symmetrie δ_2 operiert auf dem Unterraum I in Form eines Vorzeichenwechsels, läßt ρ jedoch unverändert. Daher verschwinden ebenfalls die Anteile aller ungeraden Ordnungen in ϵ , insbesondere die in ϵ^1 . Es können also von vornherein lediglich die Terme der Ordnung ϵ^2

und höherer Ordnungen übrigbleiben. Dies bedeutet dann:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\alpha}\dot{\rho} &= +\frac{r_2}{r_1}\cos(+\psi_1+\psi_2+\rho+\chi)-\frac{r_4}{r_1}\cos(+\psi_1-\psi_2+\rho+\chi) \\
&+ \frac{r_4}{r_3}\cos(-\psi_1-\psi_2+\rho+\chi)-\frac{r_2}{r_3}\cos(-\psi_1+\psi_2+\rho+\chi) \\
&- \frac{r_3}{r_2}\cos(+\psi_1-\psi_2-\rho+\chi)+\frac{r_1}{r_2}\cos(-\psi_1-\psi_2-\rho+\chi) \\
&- \frac{r_1}{r_4}\cos(-\psi_1+\psi_2-\rho+\chi)+\frac{r_3}{r_4}\cos(+\psi_1+\psi_2-\rho+\chi) \\
&= +\left(-\frac{1}{2}\psi_1^2-\frac{1}{2}\psi_2^2-\psi_1\psi_2+\hat{r}_1^2-\hat{r}_2\hat{r}_1\right)C_+-\left(\hat{r}_2-\hat{r}_1\right)\left(+\psi_1+\psi_2\right)S_+ \\
&- \left(-\frac{1}{2}\psi_1^2-\frac{1}{2}\psi_2^2+\psi_1\psi_2+\hat{r}_1^2-\hat{r}_4\hat{r}_1\right)C_++\left(\hat{r}_4-\hat{r}_1\right)\left(+\psi_1-\psi_2\right)S_+ \\
&+ \left(-\frac{1}{2}\psi_1^2-\frac{1}{2}\psi_2^2-\psi_1\psi_2+\hat{r}_3^2-\hat{r}_4\hat{r}_3\right)C_+-\left(\hat{r}_4-\hat{r}_3\right)\left(-\psi_1-\psi_2\right)S_+ \\
&- \left(-\frac{1}{2}\psi_1^2-\frac{1}{2}\psi_2^2+\psi_1\psi_2+\hat{r}_3^2-\hat{r}_2\hat{r}_3\right)C_++\left(\hat{r}_2-\hat{r}_3\right)\left(-\psi_1+\psi_2\right)S_+ \\
&- \left(-\frac{1}{2}\psi_1^2-\frac{1}{2}\psi_2^2+\psi_1\psi_2+\hat{r}_2^2-\hat{r}_3\hat{r}_2\right)C_-+\left(\hat{r}_3-\hat{r}_2\right)\left(+\psi_1-\psi_2\right)S_- \\
&+ \left(-\frac{1}{2}\psi_1^2-\frac{1}{2}\psi_2^2-\psi_1\psi_2+\hat{r}_2^2-\hat{r}_1\hat{r}_2\right)C_- -\left(\hat{r}_1-\hat{r}_2\right)\left(-\psi_1-\psi_2\right)S_- \\
&- \left(-\frac{1}{2}\psi_1^2-\frac{1}{2}\psi_2^2+\psi_1\psi_2+\hat{r}_4^2-\hat{r}_1\hat{r}_4\right)C_-+\left(\hat{r}_1-\hat{r}_4\right)\left(-\psi_1+\psi_2\right)S_- \\
&+ \left(-\frac{1}{2}\psi_1^2-\frac{1}{2}\psi_2^2-\psi_1\psi_2+\hat{r}_4^2-\hat{r}_3\hat{r}_4\right)C_- -\left(\hat{r}_3-\hat{r}_4\right)\left(+\psi_1+\psi_2\right)S_- \\
&+ \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

Durch die spezielle Vorzeichenstruktur heben sich alle Terme in ψ_i^2 , \hat{r}_i^2 , $\hat{r}_i\psi_i$ und $\hat{r}_{i+2}\psi_i$ gegenseitig auf. Übrig bleibt:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\alpha}\dot{\rho} &= \left(-4\psi_1\psi_2-\hat{r}_1\hat{r}_2+\hat{r}_2\hat{r}_3-\hat{r}_3\hat{r}_4+\hat{r}_4\hat{r}_1\right)\left(C_++C_-\right) \\
&+ \left(-2\hat{r}_2\psi_1+2\hat{r}_4\psi_1+2\hat{r}_1\psi_2-2\hat{r}_3\psi_2\right)\left(S_++S_-\right)+\mathcal{O}(\epsilon^3)
\end{aligned}$$

In dem betrachteten Unterraum I gilt zusätzlich

$$\hat{r}_1 = -\hat{r}_3 \quad \text{und} \quad \hat{r}_2 = -\hat{r}_4,$$

was die Vereinfachung

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= 2\alpha\left(\hat{r}_1\psi_2-\hat{r}_2\psi_1\right)\left(S_++S_-\right) \\
&- 2\alpha\left(\psi_1\psi_2+\hat{r}_1\hat{r}_2\right)\left(C_++C_-\right)+\mathcal{O}(\epsilon^3)
\end{aligned} \tag{28}$$

ermöglicht. Das Vorzeichen des letzten Ausdrucks muß nun für die jeweiligen kritischen Punkte bestimmt werden, um das qualitative Verhalten des Flusses in deren Umgebung zu entscheiden.

5.4 Kritischer Punkt B (Vorzeichenwechsel eines reellen Eigenwertes)

Im Punkt B (siehe Bemerkung 10) geht die Stabilität der Linie von Gleichgewichten durch einen Nulldurchgang eines einzelnen Eigenwertes verloren. Das Verhalten des Flusses in der Nähe dieses Punktes soll nun untersucht werden.

Für den Parameter χ ist nur der Bereich

$$\cos(2\chi) < 0$$

relevant, da andernfalls kein stabiler Bereich vorhanden ist. Ferner gilt im kritischen Punkt B

$$\cos(2\rho) = \cos(2\chi) - 8\alpha^2,$$

also ist

$$\cos(2\rho) < \cos(2\chi) < 0.$$

Die in (12) eingeführten Hilfsvariablen haben im Punkt B für den kritischen Eigenwert $0 = \lambda_{\text{krit}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w$ die Werte

$$\begin{aligned} 0 < w &= 1, \\ 0 < v &= -4\alpha^2 \cos(2\chi). \end{aligned}$$

Der zum kritischen Eigenwert gehörende Eigenvektor (siehe (13)) ist somit ¹⁰

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha S_- \\ 2S_+ S_- \\ -4\alpha C_- \\ 2C_+ S_- \end{pmatrix}.$$

Nach dem Einsetzen der Werte

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich aus der Gleichung (28) die Entwicklung

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= 16\alpha^2 \epsilon^2 (S_+ S_- C_- + S_-^2 C_+) (S_+ + S_-) \\ &\quad + 16\alpha^2 \epsilon^2 (S_- C_+ C_- - S_+ S_-^2) (C_+ + C_-) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= 16\alpha^2 \epsilon^2 S_- (S_+ C_- + S_- C_+) (S_+ + S_-) \\ &\quad + 16\alpha^2 \epsilon^2 S_- (C_+ C_- - S_+ S_-) (C_+ + C_-) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

¹⁰Daß dies ein Eigenvektor zum Eigenwert Null ist, kann man auch sofort durch Einsetzen in (11) überprüfen. Dabei ist lediglich die Beziehung $2S_+ S_- = \cos(2\rho) - \cos(2\chi) = -8\alpha^2$ zu beachten. Ferner ist der Vektor nicht Null, da $\alpha > 0$ gilt.

Unter Ausnutzung der Additionstheoreme liefert das:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= 16\alpha^2\epsilon^2 S_-(\sin(2\chi)(S_+ + S_-) + \cos(2\chi)(C_+ + C_-)) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= 32\alpha^2\epsilon^2 S_-(\sin(2\chi)\sin\chi\cos\rho + \cos(2\chi)\cos\chi\cos\rho) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= 32\alpha^2\epsilon^2 \cos\rho \sin(\chi - \rho) \cos\chi + \mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned}$$

Nun ist $8\alpha^2\epsilon^2 \cos\rho > 0$, da $-\frac{1}{2}\pi < \rho < \frac{1}{2}\pi$. Zuletzt gilt noch

$$\begin{aligned}4 \sin(\chi - \rho) \cos\chi \sin\rho &= 4 \sin\chi \cos\chi \cos\rho \sin\rho - 4 \cos^2\chi \sin^2\rho \\ &= \sin(2\chi) \sin(2\rho) + (\cos(2\chi) + 1)(\cos(2\rho) - 1) \\ &= \sin(2\chi) \sin(2\rho) + \cos(2\chi) \cos(2\rho) - 1 + \cos(2\rho) - \cos(2\chi) \\ &= (\cos(2\chi - 2\rho) - 1) + (\cos(2\rho) - \cos(2\chi)) \\ &< 0, \quad \text{da } \cos(2\rho) < \cos(2\chi).\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß das Vorzeichen des Terms zweiter Ordnung von $\dot{\rho}$ gerade dem von $\sin\rho$ und damit dem von ρ entgegengesetzt ist.¹¹ Berücksichtigen wir nun die generellen Möglichkeiten des Flusses (Bemerkung 11) und die Tatsache, daß der betrachtete kritische Punkt für negatives ρ links und für positives ρ rechts vom stabilen Bereich liegt (Abbildung 9), können wir folgendes feststellen.

Schlußfolgerung 12 *Die beiden Intervalle von ρ , in denen der invariante Torus T im System (7) stabil ist, werden auf einer Seite (für $\rho < 0$ links und für $\rho > 0$ rechts) von Punkten B begrenzt, in denen die Stabilität durch Wechsel des Vorzeichens eines reellen Eigenwertes verlorengeht. Die zwei-dimensionale lokale Zentrumsmannigfaltigkeit dieser Punkte ist aufgefüllt mit heteroklinen Verbindungen der Gleichgewichte in T (Abbildung 11).*

5.5 Kritischer Punkt D (Vorzeichenwechsel des Realteils zweier konjugiert komplexer Eigenwerte)

Im Punkt D (siehe Bemerkung 10) geht die Stabilität der Linie von Gleichgewichten durch Übertritt eines Paares konjugiert komplexer Eigenwerte über die imaginäre Achse verloren. Das Verhalten des Flusses in der Nähe dieses Punktes soll nun untersucht werden.

¹¹Man beachte, daß ρ im Fundamentalebereich $-\frac{1}{2}\pi \leq \rho \leq \frac{1}{2}\pi$ liegt und daß $\rho \neq 0$ ist, da $\cos(2\rho) < 0$ gilt.

Im kritischen Punkt D gilt

$$\cos(2\rho) = -\cos(2\chi) - 8\alpha^2(1 - \cos^2(2\chi)),$$

also ist

$$\cos(2\rho) + \cos(2\chi) = -8\alpha^2 \sin^2(2\chi) < 0.$$

Die in (12) eingeführten Hilfsvariablen haben für den rein imaginären Eigenwert $i \mathbb{R} \ni \lambda_{\text{krit}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w = v$ die Werte (vergleiche (15))

$$\begin{aligned} w &= 1 + 2v, \\ v &= 2i \alpha \sqrt{-\cos(2\chi)}. \end{aligned}$$

Zunächst müssen die beiden reellen Vektoren e, f bestimmt werden, die den zu den beiden kritischen Eigenwerten $\lambda, \bar{\lambda}$ von $A := \left. \frac{d}{dy} G(y_{\text{fix}}) \right|_I$ (vergleiche (11)) gehörenden Unterraum aufspannen, und für die gilt:

$$\begin{aligned} Ae &= -\Im(\lambda_{\text{krit}}) f = -2\alpha \sqrt{-\cos(2\chi)} f, \\ Af &= \Im(\lambda_{\text{krit}}) e = 2\alpha \sqrt{-\cos(2\chi)} e. \end{aligned} \tag{29}$$

Gleichung (13) liefert einen Eigenvektor für λ . Der Realteil davon ist als Vektor e geeignet. Der Vektor f berechnet sich dann entsprechend (29):¹²

$$e = 2 \begin{pmatrix} 2\alpha \sin(2\chi) C_+ \\ C_+ C_- \\ -2\alpha \sin(2\chi) S_+ \\ S_- C_+ \end{pmatrix}, \quad f = 2\sqrt{-\cos(2\chi)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_+ \\ 2\alpha \sin(2\chi) \end{pmatrix}.$$

Beide Vektoren müssen nun in (28) eingesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \epsilon e \quad \text{bzw.} \quad \epsilon f.$$

¹²Daß die angegebenen Vektoren e und f korrekt sind, läßt sich durch Einsetzen in die beiden Beziehungen (29) sofort überprüfen. Dabei ist lediglich zu beachten, daß die Beziehungen $\sin(2\chi) = S_+ C_- + S_- C_+$, $\cos(2\chi) = C_+ C_- - S_+ S_-$ und $-8\alpha^2 \sin^2(2\chi) = \cos(2\rho) + \cos(2\chi) = 2C_+ C_-$ erfüllt sind. Ferner sind die Vektoren nicht Null, da $\alpha > 0$ und $\sin(2\chi) \neq 0$ gilt.

Das Vorzeichen der Summe der resultierenden Terme zweiter Ordnung von $\dot{\rho}$ bestimmt dann das qualitative Verhalten des gemittelten Systems aus Abschnitt 5.2.

Das Einsetzen von e in (28) ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_e &= 16\alpha^2\epsilon^2 \sin(2\chi) (S_-C_+^2 + S_+C_+C_-)(S_+ + S_-) \\ &\quad + 16\alpha^2\epsilon^2 \sin(2\chi) (S_+S_-C_+ - C_+^2C_-)(C_+ + C_-) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= 16\alpha^2\epsilon^2 \sin(2\chi) C_+(S_-C_+ + S_+C_-)(S_+ + S_-) \\ &\quad + 16\alpha^2\epsilon^2 \sin(2\chi) C_+(S_+S_- - C_+C_-)(C_+ + C_-) + \mathcal{O}(\epsilon^3).\end{aligned}$$

Die Zusammenfassung der Winkelfunktionen liefert:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_e &= 16\alpha^2\epsilon^2 \sin(2\chi) C_+(\sin(2\chi)(S_+ + S_-) - \cos(2\chi)(C_+ + C_-)) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= 32\alpha^2\epsilon^2 \sin(2\chi) C_+(\sin(2\chi) \sin \chi \cos \rho - \cos(2\chi) \cos \chi \cos \rho) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= 32\alpha^2\epsilon^2 \sin(2\chi) \cos \rho C_+(\sin(2\chi) \sin \chi - \cos(2\chi) \cos \chi) + \mathcal{O}(\epsilon^3).\end{aligned}$$

Das Einsetzen von f in (28) führt auf die Gleichung:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_f &= 16\alpha^2\epsilon^2 \cos(2\chi) \sin(2\chi) C_+(C_+ + C_-) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= 32\alpha^2\epsilon^2 \cos(2\chi) \sin(2\chi) C_+ \cos \chi \cos \rho + \mathcal{O}(\epsilon^3).\end{aligned}$$

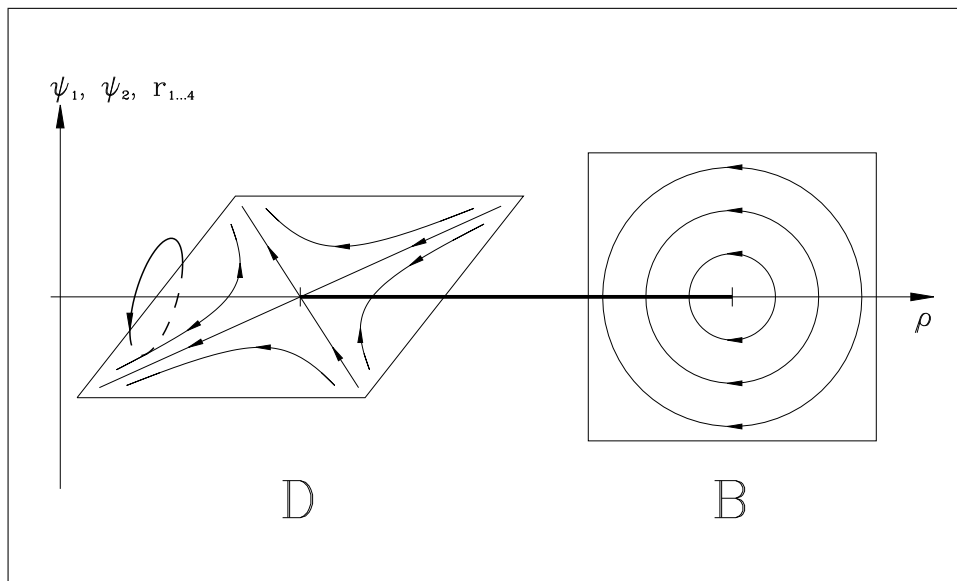
Die Summe von beiden Entwicklungen ist darstellbar als

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_e + \dot{\rho}_f &= 32\alpha^2\epsilon^2 \sin(2\chi) \cos \rho C_+ \sin(2\chi) \sin \chi + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= 32\alpha^2\epsilon^2 \sin^2(2\chi) \cos \rho \sin \chi \cos(\chi + \rho) + \mathcal{O}(\epsilon^3).\end{aligned}$$

Nun ist $8\alpha^2\epsilon^2 \sin^2(2\chi) \cos \rho > 0$, da ρ im Fundamentalbereich $-\frac{1}{2}\pi < \rho < \frac{1}{2}\pi$ liegt. Zuletzt gilt noch

$$\begin{aligned}4 \cos(\chi + \rho) \sin \chi \sin \rho &= 4 \cos \chi \cos \rho \sin \chi \sin \rho - 4 \sin^2 \chi \sin^2 \rho \\ &= \sin(2\chi) \sin(2\rho) - (\cos(2\chi) - 1)(\cos(2\rho) - 1) \\ &= \sin(2\chi) \sin(2\rho) - \cos(2\chi) \cos(2\rho) - 1 + \cos(2\chi) + \cos(2\rho) \\ &= -(\cos(2\chi + 2\rho) + 1) + (\cos(2\chi) + \cos(2\rho)) \\ &< 0.\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß das Vorzeichen des Terms zweiter Ordnung von $\dot{\rho}$ gerade dem von $\sin \rho$ und damit dem von ρ entgegengesetzt ist. Berücksichtigen wir die in Abschnitt 5.2 durchgeführten Betrachtungen sowie die Lage des kritischen Punktes (für negatives ρ rechts und für positives ρ links des stabilen Bereiches, Abbildung 9) können wir feststellen:



Es ist die rechte Hälfte der Linie T von Gleichgewichten des Systems (7) mit dem stabilen Bereich dargestellt. Bei beiden Begrenzungspunkten des Stabilitätsbereiches ist das Phasenportrait in der lokalen Zentrumsmannigfaltigkeit angedeutet. Alle Trajektorien in der Nähe der Gleichgewichte streben mit exponentieller Rate gegen diese Mannigfaltigkeit.

In der Nähe des Punktes B (ein Eigenwert wechselt das Vorzeichen) ist die zwei-dimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit mit heteroklinen Verbindungen von der instabilen zur stabilen Seite aufgefüllt. In der Nähe des Punktes D (ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte überschreitet die imaginäre Achse) gibt es keine solchen Verbindungen. Das Phasenportrait ergibt sich aus dem dargestellten zwei-dimensionalen Bild durch Rotation um die Gleichgewichtslinie, wobei die Trajektorien zu Spiralen werden.

Abbildung 11: Phasenportrait in der Nähe der kritischen Punkte

Schlussfolgerung 13 *Die beiden Intervalle von ρ , in denen der invariante Torus T im System (7) stabil ist, werden auf einer Seite (für $\rho < 0$ rechts und für $\rho > 0$ links) von Punkten D begrenzt, in denen die Stabilität durch Übertritt eines Paares konjugiert komplexer Eigenwerte über die imaginäre Achse verlorengeht. Das Phasenportrait innerhalb der drei-dimensionalen lokalen Zentrumsmannigfaltigkeit dieser Punkte besteht aus Spiralen um die Linie der Gleichgewichte. Das über die Rotation um die Gleichgewichtslinie gemittelte Vektorfeld besitzt keine heteroklinen Trajektorien. (Abbildung 11).*

Literatur

- [AA86] J. C. Alexander and G. Auchmuty. Global bifurcations of phase-locked oscillators. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 93:253–270, 1986.
- [AF89] J. C. Alexander and B. Fiedler. Global decoupling of coupled symmetric oscillators. In C. M. Dafermos, G. Ladas, and G. C. Papanicolaou, editors, *Differencial Equations*, volume 118 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pages 7–16, 1989. Proc. of the 1987 EQUADIFF Conference.
- [AI88] V. I. Arnol'd and Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations. In D. V. Anosov and V. I. Arnol'd, editors, *Dynamical Systems I*, volume 1 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, Berlin, 1988.
- [Ama83] H. Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, Berlin - New York, 1983.
- [Car81] J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*, volume 35 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 1981.
- [DGS96a] B. Dionne, M. Golubitsky, and I. Stewart. Coupled cells with internal symmetry: I. wreath products. *Nonlinearity*, 9:559–574, 1996.
- [DGS96b] B. Dionne, M. Golubitsky, and I. Stewart. Coupled cells with internal symmetry: II. direct products. *Nonlinearity*, 9:575–600, 1996.
- [FS92] A. Fässler and E. Stiefel. *Group Theoretical Methods and Their Applications*. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [GH82] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 1982.
- [Oth86] H. G. Othmer, editor. *Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry*, volume 66 of *Lecture Notes in Biomathematics*. Springer, New York, 1986.
- [Rue73] D. Ruelle. Bifurcations in the presence of a symmetry group. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 51:136–151, 1973.

- [Sch76] S. Schecter. Bifurcations with symmetry. In J. E. Marsden and M. McCracken, editors, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, volume 19 of *Applied Mathematical Sciences*, chapter 7. Springer, New York, 1976.
- [SV85] J. A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamics*, volume 59 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 1985.
- [Van82] A. Vanderbauwhede. *Local bifurcations and symmetry*, volume 75 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman, 1982.