Bachelorarbeit

Stabilisierung von drei symmetrisch gekoppelten Oszillatoren durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Isabelle Schneider
Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
14195 Berlin

21. Oktober 2011

Erstgutachter und Betreuer: Herr Prof. Dr. B. Fiedler
Zweitgutachter: Herr Priv.-Doz. Dr. P. Gurevich

Zusammenfassung

Wir untersuchen drei symmetrisch gekoppelte Oszillatoren in Hopf-Normalform. Wir führen eine nichtinvasive Rückkopplungskontrolle ein, wobei wir die Symmetrie des Systems ausnutzen. Damit sind wir in der Lage, die periodischen Orbits mit einer bestimmten Symmetrie zu stabilisieren. Wir leiten explizite analytische Bedingungen für eine Stabilisierung im super- und im subkritischen Fall her, im subkritischen Fall unterscheiden wir zwischen harter und weicher Feder.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Kontrolle und Stabilisierung von instabilen dynamischen Systemen ist in der nichtlinearen Dynamik von zentraler Bedeutung. Anwendungen findet man zum Beispiel in der Optik (nichtinvasive zeitverzögerte Rückkopplungstrolle von Laserdioden), in elektrischen Schaltkreisen, bei chemischen Reaktionen und sogar in Biologie und Medizin bei der Kontrolle von neuronalen Netzwerken.

In dieser Arbeit betrachten wir ein System gekoppelter Oszillatoren, die von Golubitsky und Stewart [5] wie folgt definiert werden:

Definition 1.1 (System gekoppelter Oszillatoren)**.** *Sei $\mathcal{N} = \{1, ..., N\}$ und sei P_j eine Mannigfaltigkeit für $j \in \mathcal{N}$. Ein System gekoppelter Oszillatoren ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen*

$$\dot{z}(t) = F(z(t)), \tag{1.1}$$

das auf dem Raum $P = P_1 \times \cdots \times P_N$ definiert ist, wobei die P_j die Oszillatoren des Systems sind und die Projektionen $\pi_j : P \to P_j$ die Oszillator-Projektionen. Sei $z(t)$ eine Trajektorie von 1.1. Dann ist die Trajektorie des j-ten Oszillators gegeben durch $z_j(t) = \pi_j(z(t))$.

In dieser Bachelorarbeit betrachten wir periodische Orbits von gekoppelten Oszillatoren und deren Muster.

Die hier angewendete Stabilisierungsmethode ist die zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle: Dazu wird ein linearer Kontrollterm eingeführt, und zwar mit Zeitverzögerung. In physikalischen Systemen gibt es aufgrund der endlichen Signalgeschwindigkeit immer eine Zeitverzögerung und diese werden wir ausnutzen: Für ein n-dimensionales System mit Bifurkationsparameter λ

$$\dot{z}(t) = F(\lambda, z(t))$$

machen wir den folgenden Ansatz:

$$\dot{z}(t) = F(\lambda, z(t)) + b[z(t - \tau) - z(t)]$$

mit der verzögerten Zeit $(t - \tau)$. Es wird also die Differenz zwischen Lösung und zeitverzögerter Lösung als Kontrolle genutzt. Das System ist somit ein selbstorganisierendes

System. Dabei ist b eine passend gewählte Rückkopplungskontrollmatrix und $\tau > 0$ wird hier so gewählt, dass die Kontrolle auf dem periodischen Orbit verschwindet. Zum Beispiel könnte man für τ ein ganzzahliges Vielfaches der minimalen Periode des Orbits wählen, das nennt man Pyragas-Kontrolle [9]. Solch eine Kontrolle ist nichtinvasiv auf dem periodischen Orbit. Der Vorteil hiervon ist, dass der periodische Orbit nicht durch die Kontrolle verändert wird. Außerdem muss man für die Rückkopplungskontrolle nur die Periode dieses Orbits und nicht die Dynamik des gesamten Systems kennen. Dies ist insbesondere wichtig für experimentelle Anwendungen, da die Periode des Oszillators oft ein leicht zugänglicher Wert ist.

H. Nakajima behauptete 1997 [8], dass ein periodischer Orbit mit einer ungeraden Anzahl reeller Floquet-Multiplikatoren, die größer als 1 sind, nicht mit Hilfe der Pyragas-Kontrolle stabilisiert werden kann. Dies wurde 2007 von B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel und E. Schöll widerlegt [2], [3], [7]. Die Autoren haben gezeigt, wie man einen instabilen periodischen Orbit nahe einer subkritischen Hopf-Verzweigung stabilisieren kann. In der Folge haben B. Fiedler, V. Flunkert, P. Hövel und E. Schöll 2010 dieses Resultat auf zwei gekoppelte Oszillatoren in Hopf-Normalform verallgemeinert [4].

Matthias Bosewitz und Konstantin Bubolz untersuchen in ihren Bachelorarbeiten verschiedene Kontrollmethoden für zwei gekoppelte Oszillatoren.

Diese Bachelorarbeit bezieht sich auf die Ergebnisse, die bereits für zwei gekoppelte Oszillatoren vorliegen [4]. Dabei wird die Frage gestellt, ob es möglich ist, die Stabilisierungsmethode von zwei gekoppelten Oszillatoren auf drei Oszillatoren zu erweitern. Hier betrachten wir speziell den Fall von drei symmetrisch gekoppelten Oszillatoren in Hopf-Normalform.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 führen wir das Modell von drei gekoppelten Oszillatoren in Hopf-Normalform ein, betrachten allgemein die Hopf-Verzweigung mit Symmetrie, um anschließend die Symmetrie des Systems untersuchen zu können. Danach formulieren wir noch einmal die Problemstellung. In Kapitel 3 wird nach der Wahl eines Koordinatensystems der Kontrollterm eingeführt. In Kapitel 4 befassen wir uns mit den Sätzen und Beweisen. Abschließend kommen wir in Kapitel 5 zu der Zusammenfassung und Diskussion.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Modellierung von drei gekoppelten Oszillatoren

Wir betrachten ein dynamisches System, das aus drei gekoppelten Oszillatoren z_1, z_2 und z_3 besteht:

$$\dot{z}_1 = f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1) \tag{2.1}$$
$$\dot{z}_2 = f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2) \tag{2.2}$$
$$\dot{z}_3 = f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3) \tag{2.3}$$

mit

$$f(z_i) = (\lambda + i + \gamma|z_i|^2)z_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.4}$$

Dabei sind $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Bifurkationsparameter. $\gamma \in \mathbb{C}$ ist fest gewählt. $a > 0 \in \mathbb{R}$ ist die Kopplungskonstante. Die Oszillatoren sind symmetrisch gekoppelt, das heißt der erste Oszillator z_1 wird gleich stark von z_2 und z_3 beeinflusst, z_2 wird mit der gleichen Stärke von z_1 und z_3 beeinflusst, das gleiche gilt für z_3. Insgesamt besitzt das System eine $D_3 \times S^1$-Symmetrie, darauf werden wir in Abschnitt 2.3 genauer eingehen.

Wir betrachten hier die Normalform einer Hopf-Verzweigung, damit alle Resultate analytisch zugänglich sind. Insbesondere nutzen wir die Rotationssymmetrie der Hopf - Normalform aus.

Ein System gekoppelter Oszillatoren kann durch einen gerichteten Graphen dargestellt werden. Dabei entsprechen die N Ecken des Graphen den einzelnen Oszillatoren und eine gerichtete Kante von Ecke i nach Ecke j existiert genau dann, wenn die Bewegungsgleichung des Oszillators x_j vom Oszillator x_i abhängt. In unserem Fall sieht der Graph aus wie in Abbildung 2.1.

Wir betrachten zunächst den einzelnen Oszillator ohne Kopplung:

$$\dot{z} = f(z) = (\lambda + i + \gamma|z|^2)z.$$

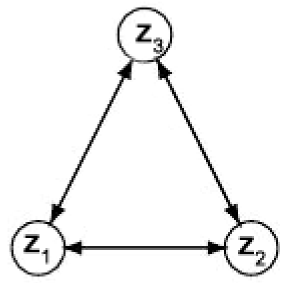

Abbildung 2.1: Gerichteter Graph des Systems (2.1)-(2.3)

Dieses System können wir in Polarkoordinaten $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ umschreiben:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (\lambda + \Re\gamma\, r^2)r\\ \dot{\theta} &= 1 + \Im\gamma\, r^2.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass es bei $r = 0$ ein Gleichgewicht gibt, das für $\lambda > 0$ instabil und für $\lambda < 0$ stabil ist. Für $\lambda\,\Re\gamma < 0$ gibt es einen periodischen Orbit $z(t) = r\exp(\frac{2\pi i t}{p})$, dessen Radius r durch

$$r^2 = \frac{-\lambda}{\Re\gamma}$$

gegeben ist und der die minimale Periode p,

$$p = \frac{2\pi}{1 + r^2\Im\gamma},$$

besitzt. Sowohl Radius als auch Periode des periodischen Orbits sind vom Bifurkationsparameter λ abhängig.

$f(z)$ ist so gewählt, dass es sich dabei um die Normalform einer Hopf-Verzweigung handelt. Die Hopf-Verzweigung findet hier bei $\lambda = 0$ statt. Dort wandern zwei komplex konjugierte Eigenwerte der Linearisierung des Gleichgewichts über die imaginäre Achse. Dabei wechselt das Gleichgewicht seine Stabilität und es entsteht ein periodischer Orbit:

Satz 2.1 (Hopf-Verzweigung)**.** *Betrachte für $x \in \mathbb{R}^N$ und den Bifurkationsparameter $\lambda \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung*

$$\dot{x}(t) = h(\lambda, x(t)) \tag{2.5}$$

mit $h(\lambda, 0) \equiv 0$, wobei $h \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ist, $k \geq 2$.

Sei $A(\lambda) := D_x h(\lambda, 0)$.

Es gelte weiterhin:

- *$\pm i \in specA(0)$ sind algebraisch einfache Eigenwerte*
- *$\pm ni \notin specA(0)$ für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$*

- *die Fortsetzung* $\mu(\lambda) \in specA(\lambda)$ *von* $\mu(0) = \pm i$ *überquert die imaginäre Achse bei* $\lambda = 0$ *transversal, das heißt*

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \Re\mu(\lambda) \neq 0$$

Dann existiert ein abzweigender Ast von periodischen Lösungen

$$s \mapsto (\lambda(s), T(s), x(t,s))$$

von Gleichung (2.5), sodass $T(s)$ *die minimale Periode von* $t \mapsto x(t,s)$ *für* $s > 0$ *ist, es gilt* $\lambda(0) = 0,\ T(0) = 2\pi,\ x(t,0)$ *und* $\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} x(t,0) \in Eig(\pm i, A(0))\backslash\{0\}$.

Die Hopf-Bifurkation nennt man subkritisch für $\Re\gamma > 0$, das heißt der periodische Orbit existiert für $\lambda < 0$, und superkritisch für $\Re\gamma < 0$, das heißt der periodiche Orbit existiert für $\lambda > 0$. Der subkritische Orbit ist instabil, der superkritische stabil.

Wir betrachten hier die Normalform einer Hopf-Verzweigung, da die Resultate so größtenteils analytisch zugänglich sind.

Außerdem besitzt die Normalform der Hopf-Verzweigung eine Rotationssymmetrie, denn in Polarkoordinaten ist die Gleichung für r von φ unabhängig. Dies werden wir später bei den Symmetriebetrachtungen ausnutzen.

Man unterscheidet die beiden Fälle einer harten und einer weichen Feder. Bei der harten Feder ist $\Im\gamma > 0$, die Periode nimmt mit steigender Amplitude ab. Genau umgedreht ist es bei der weichen Feder: Dort ist $\Im\gamma < 0$ und bei steigender Amplitude wächst auch die Periode.

2.2 Hopf-Verzweigung mit Symmetrie

In diesem Abschnitt werden wir zunächst die wichtigsten Definitionen aus der Darstellungstheorie und den Satz über Hopf-Verzweigung mit Symmetrie wiederholen. Allgemeine Referenzen sind hier [1], [5], [6].

Definition 2.1 (Darstellung)**.** *Sei* Γ *eine Gruppe, die auf einem Banachraum* X *operiert, das heißt es gibt eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \rho:\ \Gamma \times X &\longrightarrow X \\ (\gamma, x) &\longmapsto \rho(\gamma, x) = \rho(\gamma)x \end{aligned}$$

mit $\rho(id) = id,\ \rho(\gamma^{-1}) = \rho(\gamma)^{-1}$ *und* $\rho(\gamma_1) \circ \rho(\gamma_2) = \rho(\gamma_1 \circ \gamma_2)$. *Wir nennen* ρ *eine Darstellung auf* X, *wenn alle* $\rho(\gamma)$ *eine beschränkte lineare Abbildung* $\rho(\gamma) : X \longrightarrow X$ *sind.*

Definition 2.2 (Fixraum und Isotropie-Untergruppe). *Für jedes $x \in X$ ist die Isotropie-Unterguppe (Stabilisator) Γ_x gegeben durch*

$$\Gamma_x := \{\gamma \in \Gamma \mid \rho(\gamma)x = x\}.$$

Für jede Untergruppe K von Γ ist der K-Fixraum X_K gegeben durch

$$X_K := \{x \in X \mid \rho(\gamma)x = x \quad (\forall \gamma \in \Gamma)\}.$$

Definition 2.3 (Äquivarianz). *Sei $\mathcal{F} : W \to Z$ eine C^k-Abbildung, $k \geq 1$ zwischen zwei Banachräumen W und Z. Seien ρ_W und ρ_z Darstellungen der Gruppe Γ auf W bzw. Z. Dann nennen wir $\mathcal{F}$ äquivariant bezüglich Γ, wenn für alle $w \in W$ und für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt:*

$$\mathcal{F}(\rho_W(\gamma)) = \rho_Z(\gamma)\mathcal{F}(w).$$

Satz 2.2 (Hopf-Verzweigung mit Symmetrie). *Betrachte für $x \in \mathbb{R}^N$ und den Bifurkationsparameter $\lambda \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung*

$$\dot{x}(t) = h(\lambda, x(t)) \tag{2.6}$$

mit $h(\lambda, 0) \equiv 0$, wobei $h \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ist, $k \geq 2$. h sei Γ-äquivariant.

Sei $A(\lambda) := D_x h(\lambda, 0)$.

Es gelte weiterhin:

- *$\pm i \in specA(0)$, wobei die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen ist*
- *die reelle Dimension des Fixpunktraums der Gruppe H^ϑ*

$$H^\vartheta := \left\{(\gamma, \vartheta) \in H \times S^1 \mid \vartheta = \vartheta(\gamma) \quad (\forall \gamma \in H)\right\}$$
$$H := \left\{\gamma \in \Gamma \mid \exists \vartheta = \vartheta(\gamma) \text{ in } S^1 \text{ mit } \gamma x(t) = x\left(t + \frac{T}{2\pi}\vartheta\right) \quad (\forall t)\right\}$$

  ($T > 0$ minimale Periode) auf $Eig(\pm i, A(0))$ sei zwei, das heißt $dim_{\mathbb{R}}(Eig(\pm i, A(0))_{H^\vartheta} = 2$, wobei $(\gamma, \vartheta)y_0 := e^{i\vartheta}\gamma y_0$ für $y_0 \in Eig(\pm i, A(0))$ in komplexer Notation

- *$\pm ni \notin specA(0)$*
- *die Fortsetzung $\mu(\lambda) \in specA(\lambda)$ von $\mu(0) = \pm i$ überquert die imaginäre Achse bei $\lambda = 0$ transversal, das heißt*

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \Re\mu(\lambda) \neq 0$$

Dann folgt die lokale Abzweigung eines Astes periodischer Lösungen

$$s \mapsto (\lambda(s), T(s), x(t,s))$$

von Gleichung (2.6) in $\lambda = 0,\ x = 0$ *mit Symmetrie* H^ϑ *und* $\lambda(0) = 0,\ T(0) = 2\pi,\ x(t,0)$ *und* $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} x(t,0) \in Eig(\pm i, A(0))\backslash\{0\}$. *Dabei ist* $T(s)$ *die minimale Periode von* $t \mapsto x(t,s)$ *für* $s > 0$.

2.3 Symmetrie des Systems

Jetzt können wir die Symmetrie des Systems der drei gekoppelten Oszillatoren untersuchen. Unter der Symmetrie verstehen wir eine Permutation der Oszillatoren, die sowohl die Kopplung als auch die Dynamik der einzelnen Oszillatoren erhält. Außerdem können die Gleichungen der einzelnen Oszillatoren noch zusätzliche Symmetrien besitzen. Die Symmetrie kann zu verschiedenen sogenannten Mustern führen, die wir im folgenden untersuchen wollen.

Wir betrachten daher noch einmal das komplette System der drei gekoppelten Oszillatoren:

$$\begin{aligned}
\dot z_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1)\\
\dot z_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2)\\
\dot z_3 &= f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3)
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass diese Gleichungen (als ganzes) unverändert bleiben, wenn die drei Oszillatoren beliebig permutiert werden, das heißt entweder eine zyklische Permutation durchgeführt wird, oder Oszillatoren ausgetauscht werden. Das System ist also äquivariant bezüglich der zugehörigen Symmetriegruppe D_3. Dies ist die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Allgemein ist D_N (Diedergruppe) die Symmetriegruppe eines regulären N-Ecks.

Zusätzlich ist die Differentialgleichung jedes einzelnen Oszillators rotationssymmetrisch, das heißt es gilt

$$e^{i\vartheta}\big(f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1)\big) = f(e^{i\vartheta} z_1) + a(e^{i\vartheta} z_2 - e^{i\vartheta} z_1) + a(e^{i\vartheta} z_3 - e^{i\vartheta} z_1)$$

für alle $\vartheta \in S^1 := [0, 2\pi]$. Hier wird die Rotationssymmetrie der Hopf-Normalform ausgenutzt. Also ist jede Gleichung S^1-äquivariant.

Insgesamt haben wir so eine $D_3 \times S^1$-Symmetriegruppe. In der Tabelle 2.1 notieren wir die Isotropie-Untergruppen von $D_3 \times S^1$ bis auf Konjugation und die zugehörigen Fixräume, wobei $D_3 \times S^1$ auf $\mathbb{C}^2$ wie folgt operiert:

$$\begin{aligned}
\beta(z_1, z_2) &= (e^{2\pi i/3} z_1, e^{-2\pi i/3} z_2)\\
\sigma(z_1, z_2) &= (z_2, z_1)\\
\vartheta(z_1, z_2) &= (e^{i\vartheta} z_1, e^{i\vartheta} z_2)
\end{aligned}$$

Isotropie-Untergruppe	Fixraum
$D_3 \times S^1$	$\{(0,0)\}$
$\{(\sigma,0),(id,0)\}$	$\{(z,z) \mid z \in \mathbb{C}\}$
$\{(\sigma,\pi),(id,0)\}$	$\{(z,-z) \mid z \in \mathbb{C}\}$
$\{(\beta^k,-2\pi ik/n) \mid k=0,1,2\}$	$\{(z,0) \mid z \in \mathbb{C}\}$
$\{(id,0)\}$	$\mathbb{C}$

Tabelle 2.1: Isotropie-Untergruppen und Fixräume der Gruppe $D_3 \times S^1$ bis auf Konjugation (siehe auch [6] Seite 368)

Was bedeutet diese Tabelle für die drei gekoppelten Oszillatoren? Zuerst betrachten wir das im Gleichgewicht $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv 0$ linearisierte System :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+i-2a & a & a \\ a & \lambda+i-2a & a \\ a & a & \lambda+i-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Folgende Unterräume sind bezüglich der Dynamik des Systems invariant (siehe [6] Seite 390-392):

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(z,z,z) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ X_2 &= \{(z,e^{-2\pi i/3}z,e^{2\pi i/3}z) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ X_3 &= \{(z,e^{2\pi i/3}z,e^{-2\pi i/3}z) \mid z \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Da diese Unterräume sich in Abschnitt 3.1.2 auf andere Weise noch einmal ergeben werden, verzichten wir hier auf einen Beweis. Auf X_1 eingeschränkt erhalten wir den Eigenwert $\lambda+i$, auf die Räume X_2 bzw. X_3 eingeschränkt jeweils den Eigenwert $\lambda-3a+i$ (und natürlich jeweils den komplex konjugierten Eigenwert aus der komplex konjugierten Gleichung).

Eine Hopf-Verzweigung tritt auf, wenn ein Eigenwert transversal über die imaginäre Achse geht:

Auf X_1 eingeschränkt haben wir also bei $\lambda = 0$ die Hopf-Verzweigung aus Satz 2.1. Auf X_1 operiert D_3 trivial und das heißt für die Oszillatoren, dass sie alle mit der gleichen Form und Phase oszillieren.

Bei $\lambda = 3a$ gehen zwei Paare Eigenwerte gleichzeitig über die imaginäre Achse, nämlich die Eigenwerte aus X_2 und X_3. Das heißt, wir brauchen hier den Satz 2.2 über Hopf-Verzweigung mit Symmetrie. Da es bis auf Konjugation drei verschiedene Isotropie-Untergruppen der Dimension zwei gibt, erhalten wir drei Äste periodischer Lösungen mit verschiedenen Symmetrien:

- Zuerst betrachten wir die Gruppe $\{(\sigma,0),(id,0)\}$, der zugehörige Fixraum ist $\{(z,z) \mid z \in \mathbb{C}\}$. Es ändert sich also nichts, wenn zwei Oszillatoren ausgetauscht werden. Daraus können wir schließen, dass diese zwei Oszillatoren mit gleicher Phase und Form oszillieren.
- Analog folgt für die Gruppe $\{(\sigma,\pi),(id,0)\}$ mit zugehörigem Fixraum $\{(z,-z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ dass zwei Oszillatoren mit gleicher Form aber mit um π verschobener Phase

oszillieren. Dann muss der dritte Oszillator mit doppelter Frequenz wie die ersten beiden oszillieren.

- Für die Gruppe $\{(\beta^k, -2\pi ik/n) \mid k = 0, 1, 2\}$ mit dem Fixraum $\{(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}\}$ wissen wir, dass alle drei Oszillatoren mit gleicher Form oszillieren, aber mit jeweils um $2\pi/3$ verschobener Phase. Das heißt es gilt entweder $z_1 = e^{2\pi i/3} z_2 = e^{-2\pi i/3} z_3$ oder $z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3$.

Auf diese letzte Symmetrie werden wir uns im folgenden beschränken. Die instabile Dimension des periodischen Orbits ist mindestens zwei, da diese von der Hopf-Bifurkation bei $\lambda = 0$ geerbt wird. Mit der instabilen Dimension ist die Anzahl der Floquet-Exponenten mit Realteil größer Null gemeint.

2.4 Problemstellung und Ziel

Wir betrachten drei symmetrisch gekoppelte Oszillatoren in Hopf-Normalform wie in den Gleichungen (2.1) bis (2.4). Wie wir gesehen haben, findet bei $\lambda = 0$ eine Hopf-Verzweigung statt und bei $\lambda = 3a$ eine Hopf-Verzweigung mit Symmetrie. Dabei verzweigt unter anderem ein periodischer Orbit mit der Symmetrie $z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3$ oder $z_1 = e^{2\pi i/3} z_2 = e^{-2\pi i/3} z_3$. Es handelt sich dabei um einen instabilen Orbit!

Das Ziel ist die Stabilisierung dieses periodischen Orbits. Die Stabilisierung soll mit Hilfe nichtinvasiver zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle erreicht werden.

Kapitel 3

Einführung des Kontrollterms

3.1 Wahl eines symmetrieorientierten Koordinatensystems

3.1.1 Koordinatentransformation

Bevor wir den Kontrollterm einführen, ist es hilfreich, eine Koordinatentransformation durchzuführen. Die neuen Koordinaten nennen wir $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Wir suchen nach Koordinaten, sodass die im Gleichgewicht $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv 0$ linearisierten Gleichungen entkoppeln. Gleichzeitig wollen wir Koordinaten, die nur bei einer gewissen Symmetrie ungleich Null sind. Wir wollen den Ast mit der Symmetrie $z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3$ untersuchen, also setzen wir folgendermaßen an:
Gesucht sind $x_1,\ x_2,\ x_3$ mit:

$$x_1 = 0 \iff \begin{cases} z_1 = e^{2\pi i/3} z_2 = e^{-2\pi i/3} z_3 \\ z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3 \end{cases}$$

$$x_2 = 0 \iff \begin{cases} z_1 = z_2 = z_3 \\ z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3 \end{cases}$$

$$x_3 = 0 \iff \begin{cases} z_1 = z_2 = z_3 \\ z_1 = e^{2\pi i/3} z_2 = e^{-2\pi i/3} z_3 \end{cases}$$

Ein Koordinatensystem $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, das diese drei Bedingungen erfüllt, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \\ x_2 &= \frac{1}{3}(z_1 + e^{2\pi i/3} z_2 + e^{-2\pi i/3} z_3) \\ x_3 &= \frac{1}{3}(z_1 + e^{-2\pi i/3} z_2 + e^{2\pi i/3} z_3) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ z_2 &= x_1 + e^{-2\pi i/3} x_2 + e^{2\pi i/3} x_3 \\ z_3 &= x_1 + e^{2\pi i/3} x_3 + e^{-2\pi i/3} x_3 \end{aligned}$$

Damit können wir das ursprüngliche System in den neuen Koordinaten aufschreiben:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{3}\Big(f(x_1+x_2+x_3) + f(x_1+e^{-2\pi i/3}x_2+e^{2\pi i/3}x_3) + f(x_1+e^{-2\pi i/3}x_2+e^{2\pi i/3}x_3)\Big)$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{3}\Big(f(x_1+x_2+x_3) + f(e^{2\pi i/3}x_1+x_2+e^{-2\pi i/3}x_3) + f(e^{-2\pi i/3}x_1+x_2+e^{2\pi i/3}x_3)\Big) - 3ax_2$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{3}\Big(f(x_1+x_2+x_3) + f(e^{-2\pi i/3}x_1+e^{2\pi i/3}x_2+x_3) + f(e^{2\pi i/3}x_1+e^{-2\pi i/3}x_2+x_3)\Big) - 3ax_3$$

Das linearisierte System sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\lambda + i)x_1\\ \dot{x}_2 &= (\lambda - 3a + i)x_2\\ \dot{x}_3 &= (\lambda - 3a + i)x_3.\end{aligned}$$

Es entkoppelt also wie gewünscht und vereinfacht so weitere Rechnungen.

3.1.2 Invariante Unterräume

In diesem Abschnitt führen wir drei invariante Unterräume X_1, X_2 und X_3 ein. Auf dem Unterraum $X_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = x_3 = 0\}$ reduziert sich die Dynamik wie folgt, wenn man die Rotationssymmetrie der Hopf-Normalform benutzt:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1)\\ \dot{x}_2 &= 0\\ \dot{x}_3 &= 0.\end{aligned}$$

Für ein Tripel (z_1, z_2, z_3) in den urspünglichen Koordinaten gilt:

$$(z_1, z_2, z_3) \in X_1 \iff z_1 = z_2 = z_3.$$

In X_1 gibt es eine Hopf-Bifurkation bei $\lambda = 0$. Für diesen Unterraum X_1 ist die Stabilisierungsmethode bereits bekannt [2], [3], [7], da die Kopplung der Oszillatoren verschwindet und jeder Oszillator im subkritischen Fall einzeln stabilisiert werden kann.

Der Unterraum $X_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_3 = 0\}$ besitzt diese reduzierte Dynamik:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0\\ \dot{x}_2 &= f(x_2) - 3ax_2\\ \dot{x}_3 &= 0.\end{aligned}$$

Diesmal gilt für ein Tripel (z_1, z_2, z_3) in den urspünglichen Koordinaten

$$(z_1, z_2, z_3) \in X_2 \iff z_1 = e^{2\pi i/3}z_2 = e^{-2\pi i/3}z_3.$$

Bei der Dynamik in X_2 handelt es sich um die gleiche Dynamik wie in X_1, aber um $3a$ nach rechts verschoben. Der Hopfpunkt befindet sich jetzt also bei $\lambda = 3a$. Radius r_2 und minimale Periode p_2 des periodischen Orbits sind gegeben durch:

$$r_2^2 = -\frac{\lambda - 3a}{\Re\gamma}$$

und

$$p_2 = \frac{2\pi}{1 + r_2^2 \Im\gamma}.$$

Analog besitzt der Unterraum $X_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = 0\}$ die reduzierte Dynamik

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 0 \\
\dot{x}_2 &= 0 \\
\dot{x}_3 &= f(x_3) - 3ax_3
\end{aligned}$$

und es gilt

$$(z_1, z_2, z_3) \in X_3 \iff z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3.$$

Also gilt für die Hopf-Verzweigung auf X_3: Der Hopfpunkt befindet sich wieder bei $\lambda = 3a$. Der Radius r_3 des periodischen Orbits ist ebenfalls durch

$$r_3^2 = -\frac{\lambda - 3a}{\Re\gamma}$$

gegeben und die minimale Periode p_3 durch

$$p_3 = \frac{2\pi}{1 + r_3^2 \Im\gamma}.$$

3.2 Einführung des Kontrollterms

3.2.1 Ausnutzen der $D_3 \times S^1$-Symmetrie

In diesem Abschnitt werden wir die Symmetrie des periodischen Orbits ausnutzen, um eine nichtinvasive Kontrollmethode zu finden. Es ist wichtig, dass die Rückkopplungskontrolle so gewählt wird, dass der periodische Orbit mit Symmetrie $z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3$ unverändert bleibt, denn dieser soll ja stabilisiert werden. Außerdem wird die Kontrolle so gewählt, dass das im Gleichgewicht linearisierte System auch mit dem Kontrollterm entkoppelt. Dies vereinfacht die Eigenwertberechnungen sehr. Wir beschränken uns hier auf den speziellen Symmetrie-Fall $z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3$ (das entspricht dem Unterraum X_3). In Anlehnung an die Pyragas-Kontrolle [9] setzen wir mit $\tau = \frac{p_3}{3}$ folgendermaßen an:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1) + \mathbf{b}\left(-\mathbf{z_1}(\mathbf{t}) + \mathbf{e^{2\pi i/3}} \mathbf{z_1}(\mathbf{t} - \tau)\right) \\
\dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2) + \mathbf{b}\left(-\mathbf{z_2}(\mathbf{t}) + \mathbf{e^{2\pi i/3}} \mathbf{z_2}(\mathbf{t} - \tau)\right) \\
\dot{z}_3 &= f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3) + \mathbf{b}\left(-\mathbf{z_3}(\mathbf{t}) + \mathbf{e^{2\pi i/3}} \mathbf{z_3}(\mathbf{t} - \tau)\right)
\end{aligned}$$

Diese Kontrolle ist auf jeden Fall nichtinvasiv auf dem zu stabilisierenden Orbit, denn dort gilt für $\tau = \frac{p_3}{3}$:

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= e^{2\pi i/3} z_1(t - \tau) \\
z_2(t) &= e^{2\pi i/3} z_2(t - \tau) \\
z_3(t) &= e^{2\pi i/3} z_3(t - \tau).
\end{aligned}$$

Wegen der speziellen Symmetrie $z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3$ gilt

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_2(t-\tau) \\ z_2(t) &= z_3(t-\tau) \\ z_3(t) &= z_1(t-\tau) \end{aligned}$$

und deshalb können wir die Kontrolle auch wie folgt aufschreiben:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_1(t)} + \mathbf{z_2(t-\tau)}\big) \\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_2(t)} + \mathbf{z_3(t-\tau)}\big) \\ \dot{z}_3 &= f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_3(t)} + \mathbf{z_1(t-\tau)}\big). \end{aligned}$$

In x-Koordinaten gilt dann:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \frac{1}{3}&\Big(f(x_1 + x_2 + x_3) + f(x_1 + e^{-2\pi i/3}x_2 + e^{2\pi i/3}x_3) + f(x_1 + e^{-2\pi i/3}x_2 + e^{2\pi i/3}x_3)\Big) \\ &+\mathbf{b}\big(-\mathbf{x_1(t)} + \mathbf{x_1(t-\tau)}\big) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{3}&\Big(f(x_1 + x_2 + x_3) + f(e^{2\pi i/3}x_1 + x_2 + e^{-2\pi i/3}x_3) + f(e^{-2\pi i/3}x_1 + x_2 + e^{2\pi i/3}x_3)\Big) - 3ax_2 \\ &+\mathbf{b}\big(-\mathbf{x_2(t)} + \mathbf{e^{-2\pi i/3}x_2(t-\tau)}\big) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{3}&\Big(f(x_1 + x_2 + x_3) + f(e^{-2\pi i/3}x_1 + e^{2\pi i/3}x_2 + x_3) + f(e^{2\pi i/3}x_1 + e^{-2\pi i/3}x_2 + x_3)\Big) - 3ax_3 \\ &+\mathbf{b}\big(-\mathbf{x_3(t)} + \mathbf{e^{2\pi i/3}x_3(t-\tau)}\big) \end{aligned}$$

Wenn man im Gleichgewicht $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv 0$ linearisiert, erhält man folgendes entkoppeltes System:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\lambda + i)x_1 \qquad\quad + \mathbf{b}\big(-\mathbf{x_1} + \mathbf{x_1(t-\tau)}\big) \\ \dot{x}_2 &= (\lambda - 3a + i)x_2 + \mathbf{b}\big(-\mathbf{x_2} + \mathbf{e^{-2\pi i/3}x_2(t-\tau)}\big) \\ \dot{x}_3 &= (\lambda - 3a + i)x_3 + \mathbf{b}\big(-\mathbf{x_3} + \mathbf{e^{2\pi i/3}x_3(t-\tau)}\big) \end{aligned}$$

Die Rückkopplungskontrolle ist invasiv auf den anderen periodischen Orbits, die bei der Hopf-Verzweigung entstehen.

3.2.2 Pyragas-Kurve

Wir definieren die lokale Pyragas-Kurve in der (λ, τ)-Ebene als

$$\begin{aligned} \tau_p(\lambda) &= \frac{p_3(\lambda)}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3}\frac{1}{1 + r_3^2 Im\gamma} \\ &= \frac{2\pi}{3}\frac{1}{1 - (\lambda - 3a)\frac{Im\gamma}{Re\gamma}}. \end{aligned}$$

Die Pyragas-Kurve gibt die Zeitverzögerung in Abhängigkeit vom Parameter λ, auf dieser Kurve veschwindet der Kontrollterm auf dem periodischen Orbit. Sie geht durch den Punkt $\lambda = 3a,\ \tau = \frac{2\pi}{3}$.

Kapitel 4

Sätze und Beweise

4.1 Erfolgreiche Stabilisierung

Satz 4.1 (Superkritischer Fall). *Betrachte folgendes System symmetrisch gekoppelter Oszillatoren*

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1)\\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2)\\ \dot{z}_3 &= f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3)\end{aligned}$$

mit $f(z_i) = (\lambda + i + \gamma|z_i|^2)z_i,\ i = 1,2,3,$ *für den superkritischen Fall* $\Re\gamma < 0$. *Dann existiert eine positive Zahl* a^*, *sodass für alle Kopplungskonstanten* a *mit*

$$0 < a < a^*$$

folgendes gilt: Es existiert ein Bereich reeller Zahlen

$$b_-(a) < b < b_+(a),$$

sodass der in $\lambda = 3a$ *verzweigende periodische Orbit mit Symmetrie* $z_1 = e^{-2\pi i/3}z_2 = e^{2\pi i/3}z_3$ *für Parameter* λ *nahe der Hopf-Bifurkation bei* $\lambda = 3a$ *durch folgende Kontrolle stabilisiert wird:*

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_1}(\mathbf{t}) + \mathbf{z_2}(\mathbf{t} - \tau)\big)\\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_2}(\mathbf{t}) + \mathbf{z_3}(\mathbf{t} - \tau)\big)\\ \dot{z}_3 &= f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_3}(\mathbf{t}) + \mathbf{z_1}(\mathbf{t} - \tau)\big),\end{aligned}$$

wobei $\tau = \frac{p_3(\lambda)}{3}$ *ist, also ein Drittel der minimalen Periode des zu stabilisierenden Orbits. Es gilt*

$$\lim_{a\to 0} b_-(a) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{a\to 0} b_+(a) = \infty.$$

Wir sehen also, dass im superkritischen Fall ein reeller Kontrollparameter b ausreichend ist.

Satz 4.2 (Subkritischer Fall, weiche Feder)**.** *Betrachte folgendes System symmetrisch gekoppelter Oszillatoren*

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1)\\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2)\\ \dot{z}_3 &= f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3)\end{aligned}$$

mit $f(z_i) = (\lambda + i + \gamma|z_i|^2)z_i,\ i = 1,2,3,$ *für den subkritischen Fall* $\Re\gamma > 0$. *Es sei* $\Im\gamma < 0$. *Dann existiert eine positive Zahl* a^* *und eine stetige, streng monoton wachsende Funktion* $\beta(a)$ *mit*

$$\lim_{a\to 0}\beta(a) = \bar{\beta} > 0 \quad und \quad \lim_{a\to a^*}\beta(a) = \infty,$$

sodass für alle Kopplungskonstanten a *mit*

$$0 < a < a^*$$

folgendes gilt: Für jedes γ, *das die Ungleichung*

$$|\Im\gamma| > \beta(a)\Re\gamma$$

erfüllt, existiert ein offenes Kontrollgebiet $\Omega = \Omega(a,\gamma) \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, *das von* a *und* γ *abhängt, sodass der periodische Orbit mit Symmetrie* $z_1 = e^{-2\pi i/3}z_2 = e^{2\pi i/3}z_3$ *für Parameter* λ *nahe der Hopf-Bifurkation bei* $\lambda = 3a$ *durch folgende Kontrolle für alle* $b \in \Omega$ *stabilisiert wird:*

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_1}(\mathbf{t}) + \mathbf{z_2}(\mathbf{t} - \tau)\big)\\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_2}(\mathbf{t}) + \mathbf{z_3}(\mathbf{t} - \tau)\big)\\ \dot{z}_3 &= f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_3}(\mathbf{t}) + \mathbf{z_1}(\mathbf{t} - \tau)\big),\end{aligned}$$

wobei $\tau = \frac{p_3(\lambda)}{3}$ *ist, also ein Drittel der minimalen Periode des zu stabilisierenden Orbits.*

Satz 4.3 (Subkritischer Fall, harte Feder)**.** *Betrachte folgendes System symmetrisch gekoppelter Oszillatoren*

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1)\\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2)\\ \dot{z}_3 &= f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3)\end{aligned}$$

mit $f(z_i) = (\lambda + i + \gamma|z_i|^2)z_i,\ i = 1,2,3,$ *für den subkritischen Fall* $\Re\gamma > 0$. *Es sei* $\Im\gamma > 0$. *Dann existiert eine positive Zahl* a^* *und eine Konstante* $\bar{\beta}$, *sodass für alle Kopplungskonstanten* a *mit*

$$0 < a < a^{**}$$

folgendes gilt: Für jedes γ, *das die Ungleichung*

$$|Im\gamma| > \bar{\beta}Re\gamma$$

erfüllt, existiert ein offenes Kontrollgebiet $\Omega = \Omega(a,\gamma) \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, *das von* a *und* γ *abhängt, sodass der periodische Orbit mit Symmetrie* $z_1 = e^{-2\pi i/3}z_2 = e^{2\pi i/3}z_3$ *für Parameter* λ

nahe der Hopf-Bifurkation bei $\lambda = 3a$ durch folgende Kontrolle für alle $b \in \Omega$ stabilisiert wird:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + a(z_3 - z_1) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_1}(\mathbf{t}) + \mathbf{z_2}(\mathbf{t} - \tau)\big)\\
\dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + a(z_3 - z_2) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_2}(\mathbf{t}) + \mathbf{z_3}(\mathbf{t} - \tau)\big)\\
\dot{z}_3 &= f(z_3) + a(z_1 - z_3) + a(z_2 - z_3) + \mathbf{b}\big(-\mathbf{z_3}(\mathbf{t}) + \mathbf{z_1}(\mathbf{t} - \tau)\big),
\end{aligned}$$

wobei $\tau = \frac{p_3(\lambda)}{3}$ ist, also ein Drittel der minimalen Periode des zu stabilisierenden Orbits.

Die Kontrollregionen für die harte Feder und die weiche Feder sind nicht identisch. Wie sich in Abschnitt 4.5. herausstellen wird, ist im Falle der weichen Feder $\Im b > 0$, im Falle der harten Feder jedoch $\Im b < 0$.

4.2 Charakteristische Gleichungen

Mit Hilfe des Exponentialansatzes ergeben sich die drei charakteristischen Gleichungen:

$$0 = \lambda + i + b\left(e^{-\tau\eta} - 1\right) - \eta \tag{4.1}$$

$$0 = \lambda - 3a + i + b\left(e^{-2\pi i/3 - \tau\eta} - 1\right) - \eta \tag{4.2}$$

$$0 = \lambda - 3a + i + b\left(e^{2\pi i/3 - \tau\eta} - 1\right) - \eta \tag{4.3}$$

Die Linearisierung entkoppelt, das heißt jede der Gleichungen trägt mit ihren eigenen unabhängigen Eigenwerten zum Spektrum bei.

Wir berechnen zunächst die Eigenwerte bei $\lambda = 3a$ und $b = 0$. In X_1 ergeben sich die Eigenwerte $\eta = 3a \pm i$, in X_2 und X_3 jeweils $\pm i$. Wie in [4] bezeichnen wir die reelle Vielfachheit der Eigenwerte mit Realteil größer Null im Gleichgewicht (in Abhängigkeit von der Kontrolle b) als $E(b)$. Bei $\lambda = 3a$ gilt also $E(0) = 2$.

Es fällt auf, dass die Eigenwerte, die sich aus den charakteristischen Gleichungen (4.2) und (4.3) ergeben, nur für $b = 0$ übereinstimmen. Dies ist sehr wichtig, da dadurch die symmetrische Hopf-Verzweigung durch eine gewöhnliche Hopf-Verzweigung ersetzt wird und die vierdimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit zu einer zweidimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit wird.

Im folgenden werden wir zuerst die instabile Dimension des Gleichgewichts im Parameter b bestimmen, siehe Abschnitt 4.3. Danach bestimmen wir die instabilen Dimensionen des Gleichgewichts in der λ-τ-Ebene, siehe Abschnitt 4.4.

Angenommen, b kann so gewählt werden, dass die Pyragas-Kurve bei $\lambda = 3a$, $\tau = \frac{2\pi}{3}$ aus einer Region mit $E(b) = 0$ transversal in eine Region mit $E(b) = 2$ kommt, dann tauschen dort das Gleichgewicht und der periodische Orbit ihre Stabilität aus: Die Zentrumsmannigfaltigkeit ist zweidimensional und somit ist es möglich, den Stabilitätsaustausch in zwei Dimensionen anzuwenden. Das heißt, dass der verzweigende instabile Orbit durch eine Rückkopplungskontrolle für den richtigen Wert b und für Zeitverzögerungen, die auf der Pyragas-Kurve liegen, nichtinvasiv stabilisiert wird.

4.3 Stabilisierungsregionen

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Region im Parameter b, in denen eine Stabilisierung möglich ist. Dazu bestimmen wir drei Hopf-Kurven $b_1(\omega)$, $b_2(\omega)$ und $b_3(\omega)$, wo die charakteristischen Gleichungen jeweils rein imaginäre Eigenwerte haben. Das System ändert sein Verhalten genau auf diesen Kurven und das heißt, dass auch $E(b)$ sich nur dort ändern kann.

Aus der Gleichung (4.1): $0 = \lambda + i + b(e^{-\tau\eta} - 1) - \eta$ ergibt sich für $\eta = i\tilde{\omega} = i(1 + 3\omega)$ bei $\lambda = 3a$ und $\tau = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned} b = b_1(\omega) &= -3e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{a - \omega i}{e^{-2\pi i\omega} - e^{2\pi i/3}} \\ &= \frac{3}{2}\left(a + \omega \cot(-\frac{\pi}{3} - \pi\omega) + i(-\omega + a\cot(-\frac{\pi}{3} - \pi\omega))\right). \end{aligned}$$

Wir nennen die Schlaufe der Kurve $b_1(\omega)$ zwischen dem Schnittpunkt mit sich selbst B_a. Die komplexe Ableitung von $b_1(\omega)$ verschwindet genau bei $a = a^{**} \approx 0,2959....$ und $\omega^* \approx 0,0813....$ An dieser Stelle entsteht die Schlaufe B_a, die für kleiner werdendes a wächst. Erst bei $a^* \approx 0,0974....$ schneidet die Schlaufe die $\Re b$-Achse. Wir zeigen hier umgekehrt, dass die Schlaufe B_a für größer werdendes a schrumpft. Das erkennen wir, wenn wir die Abbildung

$$(\omega, a) \mapsto (\Re b_1(\omega),\ \Im b_1(\omega)),$$

die den Rand der Schlaufe B_a beschreibt, betrachten. Für $0 < a < a^*$ und $\omega_-(a) < \omega^* < \omega_+(a)$ ist die Abbildung ein lokaler orientierungserhaltender Diffeomorphismus. ω ist wie in Abbildungen 4.1 und 4.2 eingezeichnet orientiert. Also folgt die Behauptung, dass die Schlaufe B_a für größer werdendes a schrumpft.

Aus der Gleichung (4.2): $0 = \lambda - 3a + i + b(e^{-2\pi i/3 - \tau\eta} - 1) - \eta$ ergibt sich für $\eta = i\tilde{\omega} = i(1 + 3\omega)$ bei $\lambda = 3a$ und $\tau = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned} b = b_2(\omega) &= 3\frac{\omega i}{e^{-4\pi i/3 - 2\pi i\omega} - 1} \\ &= -\frac{3}{2}\omega\left(\cot(\pi(\frac{2}{3} + \pi\omega)) + i\right). \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (4.3): $0 = \lambda - 3a + i + b(e^{2\pi i/3 - \tau\eta} - 1) - \eta$ ergibt sich für $\eta = i\tilde{\omega} = i(1 + 3\omega)$ bei $\lambda = 3a$ und $\tau = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned} b = b_3(\omega) &= 3\frac{\omega i}{e^{-2\pi i\omega} - 1} \\ &= -\frac{3}{2}\omega\left(\cot(\pi\omega) + i\right). \end{aligned}$$

Die Kurven $b_1(\omega)$, $b_2(\omega)$ und $b_3(\omega)$ sind komplex analytisch und somit orientierungserhaltend. Daraus können wir jetzt schließen, dass $E(b)$ rechts von den orientierten Kurven um zwei höher ist als links davon. Wir wissen, dass im Ursprung gilt: $E(0) = 2$. Wir erhalten somit, dass $\mathbf{E(b) = 0}$ innerhalb der **gelb schattierten Region** ist, siehe Abbildungen 4.1 und 4.2. Diese Region nennen wir $\mathbf{\Lambda_a}$. Eine Stabilisierung ist nur möglich, wenn b sich in Λ_a befindet, da sich eine Instabilität des Gleichgewichts auf den periodischen Orbit übertragen würde und somit wäre die Stabilisierung unmöglich.

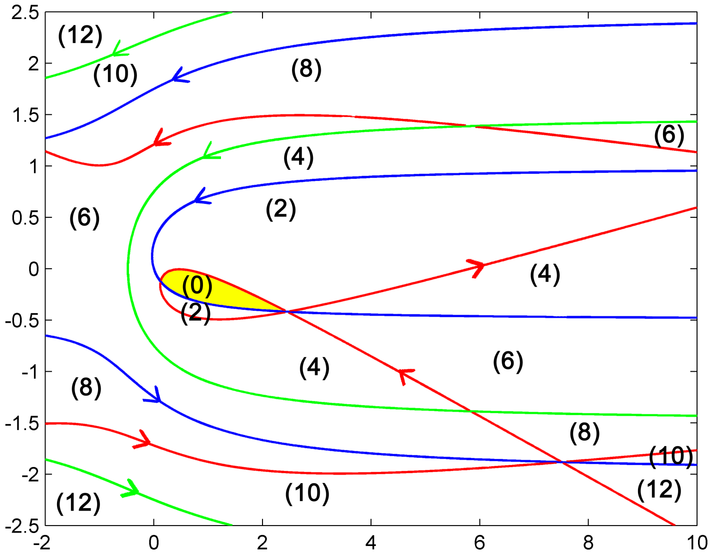

Abbildung 4.1: Orientierte Hopf-Kurven $b_1(\omega)$ (rot), $b_2(\omega)$ (blau) und $b_3(\omega)$ (grün) für $a = 0.1$. Die Zahlen in Klammern geben die instabile Dimension des Gleichgewichts $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv 0$ bei $\lambda = 3a$ an. Für die gelb gefärbten Region gilt $E(b) = 0$. Horizontale Achse: $\Re b$, vertikale Achse: $\Im b$.

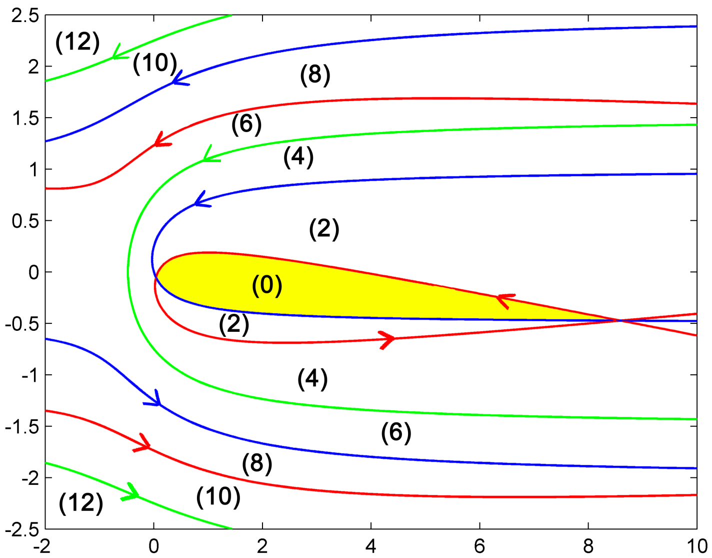

Abbildung 4.2: Orientierte Hopf-Kurven $b_1(\omega)$ (rot), $b_2(\omega)$ (blau) und $b_3(\omega)$ (grün) für $a = 0.035$. Die Zahlen in Klammern geben die instabile Dimension des Gleichgewichts $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv 0$ bei $\lambda = 3a$ an. Für die gelb gefärbten Region gilt $E(b) = 0$. Horizontale Achse: $\Re b$, vertikale Achse: $\Im b$.

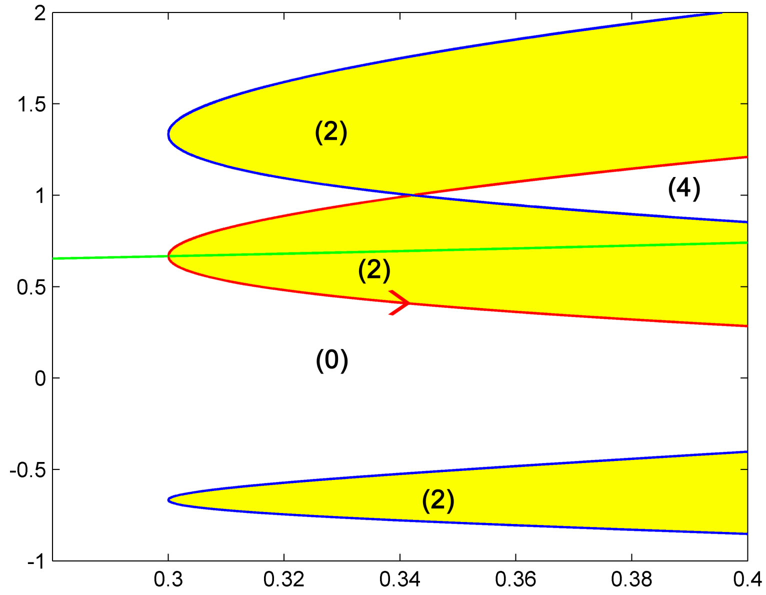

Abbildung 4.3: Hopf-Kurven τ_{H2} (blau) und τ_{H3} (rot) in der λ-τ-Ebene für $a = 0.1$, $b = 0.2$. Pyragas-Kurve τ_p (grün) für $\Re\gamma = -1$, $\Im\gamma = -1$. Die Zahlen in Klammern geben die instabile Dimension des Gleichgewichts $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv 0$ an.

4.4 Berechnung der λ-τ-Kurve

Die Hopf-Kurve besteht aus den Punkten mit rein imaginären Eigenwerten $\eta = i\tilde{\omega}$, diese berechnen wir jetzt in der λ-τ-Ebene.

Wir berechnen nur die Hopf-Kurven, die sich aus den charakteristischen Gleichungen (4.2) und (4.3) ergeben.

Zuerst teilen wir die Gleichung (4.2): $0 = \lambda - 3a + i + b(e^{-2\pi i/3 - \tau\eta} - 1) - \eta$ in Real- und Imaginärteil auf:

$$0 = \lambda - 3a + b_0 \left(\cos(\beta - \frac{2\pi}{3} - \tilde{\omega}) - \cos(\beta) \right) \tag{4.4}$$

$$\tilde{\omega} - 1 = b_0 \left(\sin(\beta - \frac{2\pi}{3} - \tilde{\omega}) - \sin(\beta) \right) \tag{4.5}$$

Durch umstellen und quadieren ergibt sich:

$$\left(\frac{b_0 \cos(\beta) - (\lambda - 3a)}{b_0} \right)^2 = \cos^2(\beta - \frac{2\pi}{3} - \tilde{\omega})$$

$$\left(\frac{b_0 \sin(\beta) + \tilde{\omega} - 1}{b_0} \right)^2 = \sin^2(\beta - \frac{2\pi}{3} - \tilde{\omega})$$

Durch Addieren der beiden Gleichungen erhält man eine quadratische Gleichung in $\tilde{\omega}$,

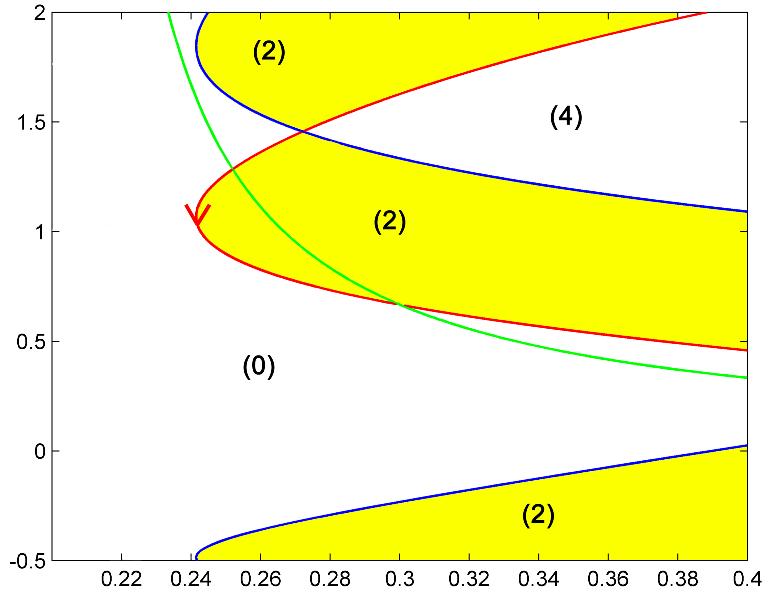

Abbildung 4.4: Hopf-Kurven τ_{H2} (blau) und τ_{H3} (rot) in der λ-τ-Ebene für $a = 0.1$, $b = 0.2e^{\pi i/4}$. Pyragas-Kurve τ_p (grün) für $\Re\gamma = 1$, $\Im\gamma = -10$. Die Zahlen in Klammern geben die instabile Dimension des Gleichgewichts $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv 0$ an.

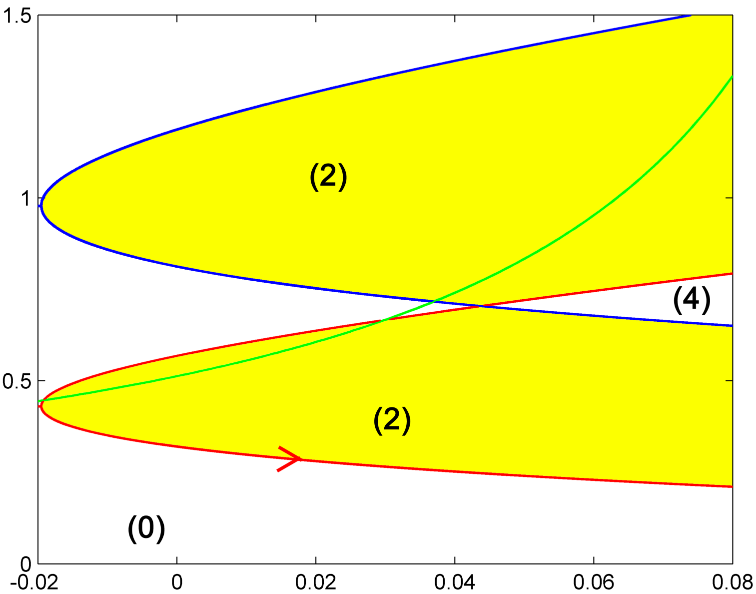

Abbildung 4.5: Hopf-Kurven τ_{H2} (blau) und τ_{H3} (rot) in der λ-τ-Ebene für $a = 0.01$, $b = 0.5e^{-\pi i/7}$. Pyragas-Kurve τ_p (grün) für $\Re\gamma = 1$, $\Im\gamma = 10$. Die Zahlen in Klammern geben die instabile Dimension des Gleichgewichts $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv 0$ an.

auflösen ergibt

$$\tilde{\omega} = 1 - b_0 \pm \sqrt{b_0^2 \sin^2\beta + (\lambda - 3a)(2b_0 \cos\beta - (\lambda - 3a))}$$

Diese Gleichung kann man in die Gleichung (4.4) einsetzen und nach τ auflösen. Schließlich erhält man die Hopf-Kurve:

$$\tau_{H2}(\lambda) = \frac{\pm \arccos\left(\frac{b_0 \cos\beta - (\lambda - 3a)}{b_0}\right) + \beta - \frac{2\pi}{3} + 2\pi n}{1 - b_0 \mp \sqrt{b_0^2 \sin^2\beta + (\lambda - 3a)(2b_0 \cos\beta - (\lambda - 3a))}}.$$

Vollkommen analog verfahren wir für die Gleichung (4.3) : $0 = \lambda - 3a + i + b(e^{2\pi i/3 - \tau\eta} - 1) - \eta$ und erhalten dann die Hopf-Kurve:

$$\tau_{H3}(\lambda) = \frac{\pm \arccos\left(\frac{b_0 \cos\beta - (\lambda - 3a)}{b_0}\right) + \beta + \frac{2\pi}{3} + 2\pi n}{1 - b_0 \mp \sqrt{b_0^2 \sin^2\beta + (\lambda - 3a)(2b_0 \cos\beta - (\lambda - 3a))}}.$$

Wenn man die Hopf-Kurven betrachtet, fällt folgendes auf: Mit Einführung des Kontrollterms ist die symmetrische Hopf-Bifurkation (Satz 2.2) zur üblichen Hopf-Bifurkation (Satz 2.1) geworden. Somit ist die Zentrumsmannigfaltigkeit zweidimensional und wir können jetzt Stabilitätsaustausch in zwei Dimensionen anwenden, so wie in [4].

4.5 Beweise

Der Kontrollparameter b wird ab jetzt immer auf Λ_a eingeschränkt, denn dort gibt es keine Eigenwerte mit Realteil größer Null, das heißt es gilt $E(b) = 0$ für alle $b \in \Lambda_a$. Das ist notwendig, wenn wir die Stabilisierung des periodischen Orbits mit Hilfe des Stabilitätsaustausches von Gleichgewicht und periodischem Orbit beweisen wollen: Denn angenommen es wäre $E(b) > 0$, dann würde die Instabilität des Gleichgewichts vom periodischen Orbit übernommen werden und somit könnte keine Stabilisierung stattfinden! Zuerst berechnen wir die Steigung der Hopf-Kurve τ_{H3} in der (λ, τ)-Ebene im Punkt $(3a|\frac{2\pi}{3})$. Dazu betrachten wir wieder die charakteristische Gleichung (4.3):

$$0 = \lambda - 3a + i + b(e^{2\pi i/3 - \tau\eta} - 1) - \eta.$$

Wir berechnen die Linearisierung dieser Gleichung ($\lambda = 3a + \tilde{\lambda}$, $\tau = \frac{2\pi}{3} + \tilde{\tau}$, $\eta = i(1 + 3\omega)$):

$$0 = \tilde{\lambda} - b(2\pi i\omega + i\tilde{\tau}) - 3i\omega.$$

Wir teilen in Real-und Imaginärteil auf und erhalten so folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= -\Im b\, 2\pi\omega - \Im b\, \tilde{\tau} \\ 0 &= \Re b\, 2\pi\omega + \Re b\, \tilde{\tau} + 3i\omega. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\tilde{\tau} = -\frac{3 + 2\pi \Re b}{\Re b}\omega$$

und

$$\tilde{\lambda} = 3\frac{\Im b}{\Re b}\omega.$$

Es gilt also

$$\tilde{\tau} = -\frac{3 + 2\pi\Re b}{\Im b}\tilde{\lambda}.$$

4.5.1 Beweis im superkritischen Fall

Wir betrachten jetzt den superkritischen Fall $\Re\gamma < 0$ aus Satz 4.1. Sei $0 < a < a^*$ fest gewählt. Als erstes müssen die Regionen mit $E(b) = 2$ in der Abbildung 4.3 bestimmt werden. Die Steigung der Hopf-Kurve τ_{H3} im Punkt $(3a|\frac{2\pi}{3})$ ist vertikal in der (λ, τ)-Ebene, da b reell und somit $\Im b = 0$ ist. Außerdem gilt für alle $b \in \Lambda_a$: $\Re b > 0$. Dazu betrachten wir noch einmal die charakteristische Gleichung (4.3) : $0 = \lambda - 3a + i + b(e^{2\pi i/3 - \tau\eta} - 1) - \eta$, wir linearisieren zunächst nach τ und λ:

$$\varphi(\lambda, \tau) = \lambda - \eta b e^{2\pi i/3 - \tau\eta}\tau = \xi$$

und anschließend nach η:

$$\psi(\eta) = 1 + \tau b e^{2\pi i/3 - \tau\eta} = \xi.$$

Also können wir schreiben:

$$(\lambda, \tau) = (\varphi^{-1} \circ \psi)(\eta)$$

ψ ist eine orientierungserhaltende Abbildung, wir betrachten also die Determinante $\det\varphi$ am Punkt $\eta = i\omega,\ \omega = 1,\ \lambda = 0,\ \tau = \frac{2\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}\det\varphi &= \Im(-\eta b e^{2\pi i/3 - \tau\eta}) \\ &= -\Re b\end{aligned}$$

Es gilt $\Re b > 0$ für $b \in \Lambda_a$ und somit folgt, dass φ eine orientierungsumkehrende Abbildung ist und ebenso $\varphi^{-1} \circ \psi$. Daraus folgt, dass die Region mit $E(b) = 2$ nun auf der linken Seite von der Hopf-Kurve in der (λ, τ)-Ebene erscheint, wie in Abbildung 4.3 eingezeichnet.

Da die Hopfkurve senkrecht nach unten orientiert ist, enthält die Region mit $E = 2$ die Tangente von jeder superkritischen Pyragas-Kurve $\tau = \frac{p_3(\lambda)}{3}$ auf der rechten Seite von der τ-Achse.

Dies beweist Satz 4.1 über die Stabilisierung von drei gekoppelten Oszillatoren im superkritischen Fall.

4.5.2 Beweise im subkritischen Fall

Hier gilt $\Re\gamma > 0$. Aus dem Beweis von Satz 4.1 ist bekannt, dass $E = 2$ auf der linken Seite der orientierten Hopf-Kurve gilt.

Weiche Feder: Hier gilt zusätzlich $\Im\gamma < 0$. Wieder sei $0 < a < a^*$ fest gewählt. Wir betrachten $b \in \Lambda_a \backslash \mathbb{R}$. Zunächst berechnen wir die Steigung der Pyragas-Kurve τ_p in der (λ, τ)-Ebene für $\lambda = 3a$:

$$\tau_p'(3a) = \frac{2\pi}{3} \frac{\Im\gamma}{\Re\gamma}.$$

die Stabilisierung tritt genau dann auf, wenn die Steigung der Pyragas-Kurve τ_p bei $\lambda = 3a$ kleiner (das heißt negativer) als die Steigung der Hopf-Kurve τ_{H3} ist, das heißt, wenn

$$\begin{aligned} 0 > -\frac{3 + 2\pi\Re b}{\Im b} &> \frac{2\pi}{3}\frac{\Im\gamma}{\Re\gamma} \\ \iff \; 0 > -\frac{\frac{3}{2\pi} + \Re b}{\Im b} &> \frac{\Im\gamma}{\Re\gamma} \end{aligned}$$

gilt und $b \in \Lambda_a$ ist. Insbesondere folgt daraus $\Im b > 0$. Sei

$$\beta(a) := \min\left\{ \frac{\Re b + \frac{3}{2\pi}}{\Im b} \,\middle|\, b \in \Lambda_a,\ \Im b > 0 \right\}.$$

Es ist also für alle γ eine Stabilisierung möglich, für die gilt

$$0 < \beta(a)\Re\gamma < |\Im\gamma|.$$

Da die Schlaufe B_a mit größer werdendem a monoton schrumpft, folgt die Monotonie von $\beta(a)$ sofort.

Harte Feder: Für die harte Feder gilt $\Im\gamma > 0$. Sei $0 < a < a^{**}$ fest gewählt und wieder sei $b \in \Lambda_a \backslash \mathbb{R}$. Analog gilt jetzt, dass Stabilisierung genau dann auftritt, wenn

$$0 < -\frac{\frac{3}{2\pi} + \Re b}{\Im b} < \frac{\Im\gamma}{\Re\gamma}$$

gilt. Daraus folgt, dass $\Im b < 0$. Es sei

$$\beta(a) := \min\left\{ -\frac{\Re b + \frac{3}{2\pi}}{\Im b} \,\middle|\, b \in \Lambda_a,\ \Im b < 0 \right\}.$$

Es gilt $\beta(a) = \bar{\beta}$ für alle a: Die Schlaufe B_a entsteht genau dort, wo die Tangente zu Λ_a, die durch den Punkt $(-\frac{3}{2\pi}|0)$ geht, $b_2(\omega)$ und somit Λ_a berührt. Das heißt hier also, dass eine Stabilisierung für alle γ möglich ist, für die gilt:

$$|\Im\gamma| > \bar{\beta}\Re\gamma.$$

Dies vervollständigt die Beweise der Sätze 4.2 und 4.3 über die Stabilisierung von drei gekoppelten Oszillatoren im subkritischen Fall.

Abschließend bemerken wir noch, dass a^* aus den Sätzen 4.1 und 4.2 übereinstimmen, da beide Male a so gewählt werden muss, dass die Schlaufe Λ_a die $\Re b$-Achse schneidet. Auch $\bar{\beta}$ aus den Sätzen 4.2 und 4.3 sind gleich. Das liegt hier daran, dass die Kurven $b_2(\omega)$ und $b_3(\omega)$ für $a = 0$ komplex konjugiert zueinander sind.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zusammenfassung

Die Fragestellung dieser Arbeit war, ob es möglich ist, die Stabilisierungsmethode von zwei gekoppelten Oszillatoren auf drei gekoppelte Oszillatoren zu erweitern. Wir betrachteten speziell den Fall von drei symmetrisch gekoppelten Oszillatoren in Hopf-Normalform. Wir führten zunächst das Modell ein und gingen dann auf den einzelnen Oszillator ohne Kopplung ein. Anschließend machten wir uns mit den wichtigsten Definitionen der Darstellungstheorie und der symmetrischen Hopf-Verzweigung vertraut. Damit konnten wir dann die Symmetrie des Systems untersuchen, wir schränkten uns auf periodische Orbits mit der Symmetrie $z_1 = e^{-2\pi i/3}z_2 = e^{2\pi i/3}z_3$ ein.

Ganz wesentlich für diese Arbeit war der nächste Schritt: Wir wählten für das Problem geeignete symmetrieorientierte Koordinaten. Bei der Einführung des Kontrollterms nutzten wir ebenfalls die Symmetrie des Systems. Wir konnten daraufhin erstmals zeigen, dass die Stabilisierung von drei symmetrisch gekoppelten Oszillatoren unter bestimmten Bedingungen möglich ist. Dabei unterschieden wir zwischen superkritischer und subkritischer Hopf-Bifurkation und teilten die subkritische Bifurkation in die Fälle der harten und der weichen Feder. Im folgenden stellten wir, wie auch in der Arbeit von B. Fiedler, V. Flunkert, P. Hövel und E. Schöll (2010) [4], zunächst die charakteristischen Gleichungen auf, um dann die Stabilisierungsregionen für den Kontrollparameter b und die Hopf-Kurven in der λ-τ-Ebene berechnen zu können. Die abschließenden Beweise folgten ebenfalls der Methode in [4].

5.2 Diskussion

Wir wählten das Modell von drei symmetrisch gekoppelten Oszillatoren in Hopf - Normalform. Dieses Modell eignete sich gut, da die Ergebnisse analytisch zugänglich sind und wir in idealer Art und Weise die Symmetrie des Systems ausnutzen konnten. Natürlich sind die Resultate auch auf allgemeine Systeme mit einer Hopf-Bifurkation anwendbar und nicht auf die Normalform beschränkt. Bei den Hopf-Bifurkationen entstehen periodische Orbits mit verschiedenen Symmetrien. Wir beschränkten uns in dieser Arbeit

auf den periodischen Orbit mit der Symmetrie $z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3$. Die Wahl des Koordinatensystems war ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit: Wir wählten die neuen Koordinaten so, dass sie nur bei bestimmten Symmetrien ungleich Null sind und die linearisierten Gleichungen entkoppeln. Dies vereinfachte die Eigenwertberechnungen sehr. Auch bei der Einführung des Kontrollterms achteten wir darauf, dass die linearisierten Gleichungen immer noch entkoppeln. Andere Möglichkeiten der Kontrolle sind nicht ausgeschlossen, wesentlich ist aber, dass der periodische Orbit unverändert bleibt, das heißt, dass die Rückkopplungskontrolle nichtinvasiv auf dem zu stabilisierenden periodischen Orbit ist.
Beim Berechnen der Eigenwerte aus den charakteristischen Gleichungen fiel auf, dass die symmetrische Hopf-Verzweigung mit Einführung des Kontrollterms zu einer einfachen Hopf-Verzweigung wurde. Das war wichtig, denn so konnten wir später den Stabilitätsaustausch in zwei Dimensionen anwenden.
Wie auch bei zwei Oszillatoren ist im superkritischen Fall ein reeller Kontrollparameter ausreichend. Im subkritischen Fall finden sich jedoch unterschiedliche Ergebnisse für die harte und die weiche Feder: Für die harte Feder ist der maximale Kopplungsparameter a größer als bei der weichen Feder. Auch für die Bedingungen an den Parameter γ ergeben sich verschiedene Bedingungen für die Stabilisierung.

Wir konnten erstmals zeigen, dass die Stabilisierungsmethode der nichtinvasiven zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle für drei gekoppelte Oszillatoren im Symmetriefall $z_1 = e^{-2\pi i/3} z_2 = e^{2\pi i/3} z_3$ erfolgreich ist.

Es bleibt offen, wie der Kontrollterm für periodische Lösungen mit den anderen Symmetrien eingeführt werden muss und ob eine Stabilisierung möglich ist. Die Erweiterung der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle auf n Oszillatoren mit instabilen periodischen Orbits wird ein weiteres größeres Projekt sein.

Literaturverzeichnis

[1] Chossat P, Lauterbach R (2000) Methods in Equivariant Bifurcations and Dynamical Systems, Advanced Series in Nonlinear Dynamics Volume 15, World Scientific, Singapore

[2] Fiedler B, Flunkert V, Georgi M, Hövel P, Schöll E (2007) Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control. Phys. Rev. Lett. 98, 114101

[3] Fiedler B, Flunkert V, Georgi M, Hövel P, Schöll E (2008) Beyond the odd-number limitation of time-delayed feedback control. In Handbook of Chaos Control, E. Schöll (ed.) et al. Wiley-VCH, Weinheim, 73-84.

[4] Fiedler B, Flunkert V, Hövel, Schöll E (2010) Delay stabilization of periodic orbits in coupled oscillator systems, Phil. Trans. Roy. Soc. A 368, 319-341.

[5] Golubitsky M, Stewart I (2002) The Symmetry Perspective. Progress in Mathematics, Volume 200, Birkhäuser, Basel

[6] Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer D (1988) Singularities and Groups in Bifurcation Theory: Vol. 2. AMS 69, Springer-Verlag, New York

[7] Just W, Fiedler B, Flunkert V, Georgi M, Hövel P, Schöll E (2007) Beyond the odd number limitation: A bifurcation analysis of time-delayed feedback control. Phys. Rev. E 76, 026210

[8] Nakajima H (1997) On analytical properties of delayed feedback control of chaos. Phys. Lett. A 232, 207-210

[9] Pyragas K (1992) Continous control of chaos by self-controlling feedback, Phys. Lett. A, 170, 421-428

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, Isabelle Schneider, dass ich die vorgelegte Bachelorarbeit mit dem Thema

Stabilisierung von drei symmetrisch gekoppelten Oszillatoren durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

selbstständig angefertigt und nur die erwähnten Quellen und Hilfen verwendet habe. Die Arbeit ist erstmalig und nur an der Freien Universität Berlin eingereicht worden.

Berlin, den 21. Oktober 2011

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Bernold Fiedler für das interessante Thema und seine Unterstützung sowie bei Herrn Dr. Stefan Liebscher für seine Hilfestellung und die anregenden Diskussionen.