Spiralwellen in Reaktions-Diffusions-Systemen
Das reduzierte Vektorfeld

Diplomarbeit eingereicht von Marc Georgi

Betreuer: Prof. Dr. B.Fiedler

Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
9.September 2003

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Spiralwellen treten in etlichen physikalischen sowie chemischen Reaktionen auf. Ein Beispiel ist die Belousov-Zhabotinsky Reaktion. Die Dynamik dieser Reaktion ist mit Hilfe einer Reaktion-Diffusions Gleichung

$$u_t = D \triangle u + F(u) \tag{1.1}$$

modelliert. Diese betrachten wir in dem Phasenraum $L^2 := L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^N)$. D ist eine $(N \times N)$ Diagonalmatrix mit positiven Einträgen. F ist eine glatte, möglicherweise nichtlineare Abbildung. Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^N$ kann man sich als Vektor von ortsabhängigen Konzentrationen von chemischen Substanzen vorstellen.

Gleichung (1.1) erzeugt auf L^2 einen lokalen Semifluss $\phi_t(u_0)$ unter geeigneten Voraussetzungen an die Abbildung F.

Die Euklidische Gruppe $SE(2)$ ist das semi-direkte Produkt von $SO(2)$ und $\mathbb{R}^2$, wobei $SO(2)$ die orthogonale Gruppe bezeichnet. Ein Element g aus $SE(2)$ schreiben wir als Tupel (R, S), wobei R aus $SO(2)$ ist und S aus R^2. Die Gruppenmultiplikation sieht wie folgt aus:

$$(R_1, S_1)(R_2, S_2) = (R_1 R_2, S_1 + R_1 S_2). \tag{1.2}$$

Mit dieser Verknüpfung wird $SE(2)$ sogar zu einer Lie-Gruppe.Die Gruppenaktion $\rho : G \longrightarrow GL(X)$ auf dem Funktionenraum L^2 ist durch

$$(\rho_{(R,S)} u)(x) := u(R^{-1}(x - S)) \tag{1.3}$$

gegeben. Gleichung (1.1) ist äquivariant unter $SE(2)$. Dies bedeutet, falls $\phi_t(u)$ eine Lösung ist, so auch $\rho_g \phi_t(u)$ für jedes $g \in SE(2)$.

Desweiteren nehmen wir an, dass es eine Lösung in Form einer *rotierenden Welle* gibt, d.h. eine Lösung der Form

$$\phi_t(u_*) = \rho_{(R(t),S)} u_* \tag{1.4}$$

für ein spezielles $u_* \in L^2$ und $S \in \mathbb{R}^2$. In diesem Fall ist $R(t)$ eine Drehmatrix aus $SO(2)$, mit $R(t) = exp^{(r_* t)}$ und einem festem $r_* \in so(2)$, der Lie-Algebra von $SO(2)$. Die rotierende Welle ist ein spezielles Beispiel eines *relativen Equilibriums*, also eine Lösung der Form

$$\phi_t(u_0) = \rho_{(R(t),S(t))} u_* \tag{1.5}$$

wobei $(R(t), S(t)) = exp^{(r_*, s_*)t}$ und $(r_*, s_*) \in se(2)$, der Lie-Algebra von $SE(2)$. Diese Lösungen haben die Eigenschaft, dass ihr Zeit-Orbit im Gruppen-Orbit von $SE(2)u_*$ liegt.

Wir addieren nun zu der ursprünglichen Gleichung einen Störungsterm H und erhalten damit also folgende Gleichung

$$u_t = D \triangle u + F(u) + \varepsilon H(u). \tag{1.6}$$

Der Störungsterm H ist so gewählt, dass (1.6) nur noch äquivarint unter der Gruppe $G_{lat} \subset SE(2)$ ist, was wir im folgenden als *Lattice* Äquivarianz bezeichnen. Unter G_{lat} verstehen wir die Menge aller Elemente der Form (id, S) und $S \in \mathbb{Z}^2$.

System (1.6) besitzt für $\varepsilon = 0$ eine fluss- und unter $SE(2)$ invariante Mannigfaltigkeit M_0, die dreidimensional ist und auf der die rotierende Welle lebt. Diese Mannigfaltigkeit ist durch den Gruppenorbit $SE(2)u_*$ gegeben. Mit Hilfe einer globalen Zentrumsmannigfaltigkeit-Reduktion, die in Jangle [3] bereitgestellt wird, kann gezeigt werden, dass auch für (1.6), wobei ε geeignet klein ist, eine dreidimensionale, unter (1.6) flussinvariante Mannigfaltigkeit M_ε existiert, die Lattice-invariant ist. Letzteres bedeutet: Für $u(.) \in M_\varepsilon$ ist auch $\rho_g u(.) \in M_\varepsilon$, wobei $g \in G_{lat}$. Man kann diese Mannigfaltigkeit mittels geeigneter Koordinaten als Graph einer glatten Abbildung η_ε über der Gruppenmannigfaltigkeit Gu_* darstellen. Wir stellen uns vor, dass die Lösungen auf M_ε die gestörten rotierenden Wellen $u_{rot}(t, \varepsilon)$ sind. Insbesondere finden wir dann für $\varepsilon = 0$ unsere rotierende Welle (1.4) wieder. Betrachten wir nun bei der ungestört rotierende Welle (1.4) den zeitlichen Verlauf des Rotationsmittelpunktes, den wir auch als *Tip* bezeichnen, so stellen wir fest, dass sich dieser nicht bewegt.

Für $\varepsilon > 0$ kann man $u_{rot}(t, \varepsilon)$ in der Form

$$\rho_{g(t,\varepsilon)} u_* + \eta_\varepsilon(\rho_{g(t,\varepsilon)} u_*) \tag{1.7}$$

darstellen. Hierbei ist $g(t, \varepsilon) \in SE(2)$. Unter der reduzierten Dynamik von $u_{rot}(t, \varepsilon)$ verstehen wir die Dynamik von $g(t, \varepsilon)$ auf $G := SE(2)$. In dem speziellen Fall, wo $\eta_\varepsilon(\rho_{g(t,\varepsilon)} u_*) = 0$, gilt also

$$u_{rot}(t, \varepsilon) = \rho_{g(t,\varepsilon)} u_*. \tag{1.8}$$

In diesem Fall können wir also auch hier, für $\varepsilon > 0$, von der Dynamik eines *Tips* sprechen, wobei wir dann die Translationskomponente von $g(t, \varepsilon)$ meinen. Wir betonen, dass sich der Tip nun im zeitlichen Verlauf bewegen kann und wir interessieren uns für den möglichen Verlauf dieser Bewegung. Da diese von dem Störterm H abhängt, ist es eine naheliegende Frage, welche Bewegungen man durch Wahl von H realisieren kann.

Bei der Beantwortung dieser Frage beschränken wir uns in der vorliegenden Arbeit darauf, den führenden Ordnungsterm von dem durch $\rho_{g(t,\varepsilon)}u_*$ auf G induziertem Vektorfeld zu betrachten, wobei wir dieses nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ entwickeln. Dieses Vektorfeld, das in dem führenden Ordnungsterm auftritt, bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$. Es beschreibt also $\mathcal{F}$ in erster Nährung, wie sich der Tip der gestörten rotierenden Welle $u_{rot}(t, \varepsilon)$ verhält. Dabei wird natürlich $\mathcal{F}$ von der Störfunktion H abhängen. Unser Anliegen ist es, die Abbildung $\mathcal{L} : H \to \mathcal{F}(H)$ zu studieren. Das Resultat wird die Erkenntnis sein, dass $\mathcal{L}$ zumindest auf dem Raum aller zulässigen Störfunktionen ein beschränkter linearer Operator mit dichtem Bild ist, wenn wir den Bildraum geeignet wählen . Dies ist etwa der Fall, falls wir als Bildraum den Banachraum aller stetigen Vektorfelder auf G wählen, die zudem 1-periodisch in ihrer Translationskomponente sind. Viele dieser Vektorfelder kann man direkt mit einem, gegebenenfalls nichtautonomen, Vektorfeld auf dem Torus identifizieren. Die Frage, was für lineare Störfunktionen H passiert, bleibt zunächst offen und verlangt nach weiterem Studium.

Wir werden mitunter zeigen, dass wir alle genügend glatten Vektorfelder, autonome sowie nichtautonome, auf dem Torus realisieren können. Ein besonders interessantes Vektorfeld wird in dem letzten Kapitel vorgestellt: der Cherryflow.

Es wurden natürlich in den letzten Jahren auch andere Wege ausprobiert, die Rotationssymmetrie der Gleichung (1.1) zu brechen. Leblanc [5] brach die Rotationssymmetrie z.B. mit einem Störungsterm $\varepsilon g(u, \varepsilon)$ so, dass die gestörte Gleichung

$$u_t = D \triangle u + F(u) + \varepsilon g(u, \varepsilon) \tag{1.9}$$

noch äquivariant unter der Gruppe G^* aller Translationen und Rotationen der Form $\rho_{(R_k,S)}$ mit $S \in \mathbb{R}^2$ und $R_k \in Z_n \subset SO(2)$, wobei Z_n die Gruppe ist, die von der Rotation um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ erzeugt wird.

Wie Scheel et al [6] und Jangle [3] zeigten, besitzt auch in diesem Fall die Gleichung (1.9) eine flussinvariante Mannigfaltigkeit M_ε^* die noch invariant unter der Gruppe G^* ist. Man kann nun schon einige Eigenschaften des reduzierten Vektorfeldes auf der Lie-Gruppe G studieren , da aufgrund der Restsymmetrie dieses Vektorfeld bereits eine spezielle Struktur hat. Mit Hilfe des Theorems 2, ebenfalls aus [6], hat das Vektorfeld auf G in diesem Fall nämlich die Form:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi}[v + \varepsilon G^p(\phi, \varepsilon)] \\ w_* + \varepsilon G^\phi(\phi, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

Hier bezeichnet p als komplexe Zahl die Translationskomponente und $\phi \in \mathbb{R}$ die Rotationskomponente der Gruppe. Es ist v ebenfalls eine komplexe Zahl und w_* ist wie in unserem Fall die Drehfrequenz der rotierenden Welle.

Da in diesem Fall M_ε^* noch invariant unter G^* ist, sind die Funktionen G^p,G^ϕ $\frac{2\pi}{l}$ -periodisch in ϕ. Man kann nun zeigen, dass alle Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichung für $w_* \neq 0$ und ε nahe Null diskret rotierende Wellen sind, d.h Lösungen, die eine diskrete Rotationssymmetrie besitzen.

In unserem Fall sagt allerdings die Tatsache, dass das Vektorfeld auf M_ε noch unter der Gruppe G_{lat} äquivariant ist, nicht besonders viel über die Struktur des Vektorfeldes aus. Es wird allerdings folgende Form haben:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_* + \varepsilon f^\phi(\varepsilon, \phi, p, H) \\ e^{i\phi}\varepsilon f^p(\varepsilon, \phi, p, H) \end{pmatrix}$$

wobei die Funktionen $f^\phi(\varepsilon, \phi, p, H)$ und $f^p(\varepsilon, \phi, p, H)$ die Periode 1 in den Komponenten x, y mit $p = x + iy$ besitzen. In diesem Fall haben wir bereits jedes Element (R, S) aus $SE(2)$ mit einem Element aus $S^1 \times \mathbb{C}$ identifiziert.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In den ersten beiden Kapiteln 2 und 4 betrachten wir die Gleichungen (1.1) sowie (1.6). Wir stellen einige Eigenschaften dieser Systeme fest und erörten die Hyphothesen, die wir an Gleichung (1.1) stellen. Eine wichtige Tatsache wird die Existenz einer unter (1.6) flussinvarianten Mannigfaltigkeit M_ε sein.

Um den Fluss auf dieser Mannigfaltigkeit zu studieren, benötigen wir Koordinaten nahe der Gruppenmannigfaltigkeit Gu_*, über der M_ε als Graph dargestellt ist. Dies wir in Kapitel 5 getan. Ziel von Kapitel 6 ist es, bezüglich dieser Koordinaten das reduzierte Vektorfeld explizit zu bestimmen. Der wohl wichtigste Abschnitt ist der zweite in Kapitel 6. Wir werden hier das reduzierte Vektorfeld nach ε entwickeln und den führenden Ordnungsterm in Abhängigkeit einer geeigneten Klasse von Störfunktionen H analysieren.

Die Feststellung, dass das reduzierte Vektorfeld als Vektorfeld auf einem Torus angesehen werden kann, verleitet uns am Schluss dazu, ein interessantes Beispiel, aus dem komplizierte Dynamik resultiert, kurz zu erörten.

Bedanken möchte ich mich an erster Stelle bei meinem Professor Bernold Fiedler sowohl wegen dieses hoch interessanten Themas als auch wegen der sehr guten Betreuung, die ich in dieser Zeit genossen habe. Mein Dank gebührt besonders auch Stefan Liebscher und Karsten Matthies, die uns ebenfalls in schwierigen Zeiten mit ihrem Rat und ihrem Wissen zur Seite standen. Sehr geholfen hat mir auch sowohl Arnd Scheel, der immer einen Teil seiner Zeit in Berlin opferte, um sich mit mir und Nihar Jangle zusammensetzen, als auch Claudia Wulff, die mich besonders in der Anfangszeit mit guten Ratschlägen auf diese wissenschaftliche Arbeit vorbereitete. Ebenfalls Martin Väth sei wegen vieler kritischer Anmerkungen gedankt. Zuletzt, aber nicht weniger wichtig, sei Nihar Jangle erwähnt, mit dem ich viele sowohl psychologisch als auch inhaltlich wichtige Diskussionen geführt habe.

Kapitel 2

Reaktions- und Diffusionsgleichungen

Wir betrachten die folgende Reaktions-Diffusionsgleichung

$$u_t = D \bigtriangleup u + F(u) \tag{2.1}$$

auf dem Banachraum $X := L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^N)$.Dabei ist D einen Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen. Der Operator $D\bigtriangleup$ ist sektoriell (das Spektrum liegt auf der negativen x-Achse) und wenn F von $Y := X^\alpha$ nach X sogar C^{k+2} ist mit $0 \leq \alpha < 1$, $k \geq 1$, so existiert ein lokaler Semifluss ϕ_t auf Y, siehe etwa Henry.

Sei nun G die Euklidische Gruppe $SE(2)$,die aus allen Rotationen und Translationen besteht.Ein Element g aus G schreiben wir als Tupel (R, S), wobei R aus $SO(2)$ ist und S aus R^2. Die Gruppenmultiplikation sieht wie folgt aus:

$$(R_1, S_1)(R_2, S_2) = (R_1 R_2, S_1 + R_1 S_2). \tag{2.2}$$

Mit dieser Verknüpfung wird G sogar zu einer Lie-Gruppe. Die Gruppenaktion $\rho : G \longrightarrow GL(X)$ auf dem Funktionenraum X ist durch

$$(\rho_{(R,S)} u)(x) := u(R^{-1}(x - S)) \tag{2.3}$$

gegeben.

So definiert ist natürlich für jedes $g \in G$ ρ_g eine Isometrie auf X. Eine weitere Eigenschaft dieser Gruppenaktion ist ihre Starkstetigkeit auf X, d.h.

$$g \to 0 \Rightarrow \rho_g u \to u. \tag{2.4}$$

Das bedeutet natürlich, dass z.B. $\phi \to \rho_{(\phi,0)}$ eine C^0-Halbgruppe ist. Diese hat den Erzeuger ∂_ϕ auf $\mathcal{D}(\partial_\phi) \subset X$. Dabei bezeichnet ∂_ϕ die Ableitung nach dem Winkel; d.h. in euklidischen Koordinaten: $\partial_\phi = (y\partial_x - x\partial_y)$, wobei hier x,y die beiden Ortsvariablen der Funktion sind.Ebenso sind $x \to \rho_{((x,0),0)}$ und $y \to \rho_{((0,y),0)}$ C^0-Gruppen mit Erzeugern ∂_x bzw. ∂_y. Beide Operatoren sind auf $H^1 := H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^N)$ erklärt. Sei nun die Funktion F G-quivariant, d.h. es gelte für alle $g \in G$:

$$\rho_g F(u) = F(\rho_g u)$$

Diese Eigenschaft ist erfüllt, falls F der Superpositionsoperator einer Funktion f aus $C^{k+2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ist. Nimmt man zusätzlich noch einige Wachstumsbeschränkungen an f an, so ist F auch genügend glatt als Abbildung von X^α nach X.

Aus der Äquivarianz des Laplaceoperators und der Funktion F folgt die der ganzen Gleichung (2.1). Das hat zur Konsequenz, dass $\rho_g \phi_t(u)$ Lösung zum Anfangswert $\rho_g u$ ist, falls $\phi_t(u)$ eine Lösung ist. Das bedeutet die Äquivarianz der Lösung unter der Gruppe.

Im folgenden bezeichnen wir mit R_β das Element aus $SO(2)$, das jeden Punkt in $\mathbb{R}^2$ um den Winkel β gegen den Uhrzeigersinn um den Nullpunkt dreht. Es folgen nun die zentralen Annahmen,die wir an unser System stellen:

Hyphothese 1 (Rotierende Welle)

1. *Es existiere ein $u_* \in Y$ und ein $w_* \in \mathbb{R}$ mit*

$$\phi_t(u_*) = \rho_{(R_{-\omega_* t},0)} u_*.$$

2. *u_* sei aus $C^{k+2}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^N)$.*

3. *u_* besitzt triviale Isometrie, d.h. $\{g \in G; \rho_g u_* = u_*\} = \{id\}$*

Hyphothese 2 (Spektralannahmen)

Die Zeit-1-Abbildung

$$D\phi_{\frac{2\pi}{\omega_*}}(u_*) \in L(Y)$$

besitzt nur den 3-fachen Eigenwert 1 auf dem komplexen Einheitskreis. Die dazugehörige Spektralprojektion $P_* \in L(Y)$ hat den Eigenraum $E_*^c := R(P_*)$. Wir nehmen an, $E_*^c := R(P_*)$ sei dreidimensional. Das restliche Spektrum liegt in der Kugel $B_{1-\delta}(0)$, mit einem $0 < \delta < 1$.

Die Annahme 1(1) besagt, dass der (zeitliche) Orbit der Lösung zu dem Anfangswert u_* im Gruppenorbit $\rho_g u_*$ liegt. Diese Annahme impliziert sofort, dass $u_* \in \mathcal{D}(\triangle)$, also H^2 ist. Denn aufgrund der Regularitätseigenschaften der Gleichung (2.1) ist $\phi_t(u_*) \in \mathcal{D}(\triangle)$ für bel $t > 0$. Also ist insbesondere $u_* = \phi_{\frac{2\pi}{\omega_*}}(u_*)$ aus H^2.

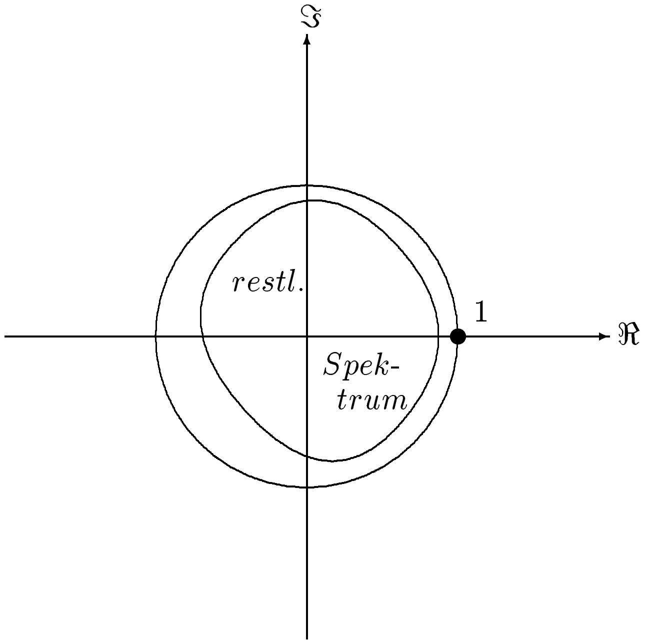

Abbildung 2.1: Spektrum von $D\phi_{\frac{2\pi}{\omega_*}}(u_*)$

Weiterhin besagt Hyphotese 1, dass die Abbildung $g \longrightarrow \rho_g u_*$ (k+1)-mal differenzierbar ist als Abbildung von G nach Y. Siehe dazu etwa Scheel et al [6].

Als Bemerkung sei festgehalten, dass aus diesen Hyphothesen auch die Differenzierbarkeit der Abbildung $g \longrightarrow \rho_g v$ für ein beliebiges $v \in T_{u_*}Gu_*$ folgt. Diese Abbildung ist dann noch k-mal differenzierbar.

Natürlich kann man von E_*^c auch nur verlangen, dass er endlichdimensional ist, siehe dazu ebenfalls letztgenanntes Paper [6]. Da der Operator $D\phi_{\frac{2\pi}{\omega_*}}(u_*)$ aber stets den dreifachen Eigenwert 1 besitzt, ist der Eigenraum E_*^c zumindest 3-dimensional. Die letzte Bemerkung ist klar, da $\phi_{\frac{2\pi}{\omega_*}}(u) = u$ ist für alle $u \in Gu_*$ und deswegen $D\phi_{\frac{2\pi}{\omega_*}}(u_*) \mid_{T_{u_*}Gu_*} = id_{T_{u_*}Gu_*}$ gilt.

Schreibe nun Gu_* für den Gruppenorbit durch u_*, also für $\{\rho_g u_* | g \in G\}$. Dann ist dieser Orbit infolge der Hyphothese 1, (2) eine C^{k+2} Mannigfaltigkeit, mit einem Tangentialraum an u_*, der von $\partial_\phi u_*$, $\partial_x u_*$ und $\partial_y u_*$ aufgespannt wird. Aufgrund dieser Feststellungen folgt natürlich sofort:

$$T_{u_*}Gu_* = E_*^c \tag{2.5}$$

Das gesamte Spektrum von $D\phi_{\frac{2\pi}{\omega_*}}(u_*)$ lässt sich qualitativ skizzieren wie in Abbildung (2.1).

2.1 Die Hyphothese 2

Am Ende dieses Kapitels wollen wir noch kurz auf eine andere Bedingung eingehen, die bewirkt, dass Hyphothese 2 erfüllt ist. Zur Vereinfachung sei nun $D = id$.
Wir betrachten nur den Fall, wo $Y = X$. Betrachte dazu den Operator A_* auf $Y = X = L^2$ definiert durch

$$A_* v = \triangle v + DF(0)v. \tag{2.6}$$

Wir haben dann folgende Proposition:

Proposition 2.1
Sei das Spektrum $specA_*$ von A_* strikt in der negativen komplexen Halbebene enthalten, also $Re\lambda < -\delta$ für alle $\lambda \in specA_*$ und ein $\delta > 0$. Gelte weiterhin für u_* das $u_* \to 0$ gleichmässig. Dann ist Hyphothese 2 erfüllt.

Wir bemerken zunächst, dass das Spektrum von $\triangle$ auf der negativen Halbachse liegt, so dass die Forderung an das Spektrum von A_* erfüllt werden kann und nicht rein hyphotethisch bleibt.
Um den Beweis dieser Proposition zu skizzieren, stellen wir vorerst fest, dass der Operator A_* sektoriell ist. Dies folgt aus der Tatsache das $\triangle$ sektoriell ist und $DF(0)$ beschränkt. Theorem 4.3, Seite 118 im Pazy [8] sagt nun, dass auch $\mid e^{A_* t} \mid_Y \leq Ce^{-\delta}$ für eine geeignete Konstante C ist (hier haben wir natürlich $\mathrm{Re}\lambda < -\delta$ für $\lambda \in \mathrm{spec}A_*$ benutzt). Wir verweisen darauf, dass diese Schlussfolgerung im allgemeinen für stark-stetige Halbgruppen und ihre Erzeuger falsch ist.
Nun erzeugt der Operator

$$L_* = \triangle - w_* \partial_\phi + DF(0) \tag{2.7}$$

auf Y eine stark stetige Halbgruppe $e^{L_* t}$. Dieser Operator ist nicht sektoriell, siehe etwa Remark 2.19 in Wulff [9]. Es ist weiterhin in [9] gezeigt worden, dass $e^{L_* t} = \rho_{(-\omega_* t, 0)} e^{A_* t}$ ist. Es ist aber $\rho_{-\omega_* t}$ eine Isometrie auf $Y = L^2$. Daher ist auch das Spektrum von $e^{L_* \frac{2\pi}{\omega_*}}$ enthalten in dem Kreis mit Radius $e^{-\delta}$.

Nach Scheel et al [6], Lemma 5.4, ist nun $e^{Lt} - e^{L_* t}$ kompakt für jedes feste $t > 0$. Hierbei ist L gegeben durch

$$L = \triangle - w_* \partial_\phi + DF(u_*). \tag{2.8}$$

Man gelangt zu L, indem man Gleichung (2.1) an der Stelle u_* linearisiert und danach mittels der zeitabhängigen Transformation $x \to e^{-iw_* t} x$ in ein

mitrotierendes Koordinatensystem übergeht. Also ist die rotierende Welle für L ein Equilibrium. Man beachte, dass L stets die drei Eigenwerte 0 und $\pm i w_*$ besitzt.
Da $e^{Lt} - e^{L_* t}$ kompakt ist, gilt für das *essentielle* Spektrum die Beziehung $spec_{ess} e^{L\frac{2\pi}{\omega_*}} = spec_{ess} e^{L_* \frac{2\pi}{\omega_*}} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} :\mid \lambda \mid < e^{-\delta}\}$. Das essentielle Spektrum bezeichnet die Menge aller λ aus dem Spektrum, die keine isolierten Eigenwerte mit endlicher Multiplizität sind, was wir als Punktspektrum bezeichnen. Für die Relation des Punktrumspektrums von L und $e^{L\frac{2\pi}{\omega_*}}$ benutze Theorem 2.2.4, Pazy [8]. Also folgt die Gültigkeit von Hyphothese 2, wenn wir noch bedenken, dass $e^{L\frac{2\pi}{\omega_*}} = e^{A_*} = D\phi_{\frac{2\pi}{\omega_*}}(u_*)$.

Kapitel 3

Identifikation der Gruppe $SE(2)$

Wir werden später ein Vektorfeld auf $= SE(2)$, d.h. eine Differentialgleichung

$$\dot{g} = f(g) \tag{3.1}$$

studieren, wobei $g \in SE(2)$ und $f(g) \in T_g SE(2)$ ist. Es wird die Algebra $alg(SE(2))$ der Gruppe $SE(2)$ mit $T_{id}SE(2)$ identifiziert.
Ein Element $g \in SE(2)$ kann man auch als $g = (e^{i\phi}, S)$ schreiben, wobei $S \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ für den translativen Anteil steht und $e^{i\phi} \in S^1$ für die Rotation. Es wird also ein Element $R_\phi \in SO(2)$, das stets die Form

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) \\ -sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

hat, mit $e^{i\phi} \in S^1$ identifiziert. Wir ziehen es vor, mit dem Winkel ϕ selbst zu rechnen. Die Verknüpfung sieht dann folgendermassen aus: Für $g = (\phi, S)$, $S \in \mathbb{C}$ gilt

$$g(\beta, T) = (\phi, S)(\beta, T) = (\phi + \beta, e^{i\phi}T + S) \tag{3.2}$$

für ein bel. Element (β, T), $T \in \mathbb{C}$. Die so eingeführte Gruppe bezeichnen wir weiterhin mit G.
Weiterhin kann man T_gG für ein $g \in G$ mit $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ identifizieren und wir geben diesem Tangentialraum die Standardbasis $B^g := \{(1,0), (0,1), (0,i)\}$. Wir setzen zur Abkürzung $b_1 = (1,0)$, $b_2 = (0,1)$ und $b_3 = (0,i)$. Bezeichne nun mit $l_\phi : T_gG \to T_gG$, $\phi \in [0, 2\pi]$, die lineare Abbildung definiert durch $l_\phi b_1 = b_1$, $l_\phi b_2 = (0, e^{i\phi})$, sowie $l_\phi b_3 = (0, e^{i\phi}i)$.

3.1 Die Abbildung $\rho_g u_*$

Sofern im folgenden nichts anderes gesagt wird, versehen wir Gu_* stets mit der Norm bezgl.Y. Dann ist die Abbildung $\rho_g u_* : G \to Gu_*$ mit $g \to \rho_g u_*$

nach den Voraussetzungen an u_* differenzierbar. Die Verknüpfung auf G bewirkt unter anderem, dass $\rho_g u_*$ ein Gruppenhomomorphismus wird. Es gilt also:

$$\rho_{gh} u_* = \rho_g(\rho_h u_*) \tag{3.3}$$

mit $g, h \in G$ beliebig, wobei mit gh natürlich die Verknüpfung in G gemeint ist. Sei nun $c_i(t)$ ein Weg in G mit $c_i(0) = id$ und $\dot{c}_i(0) = b_i$. Bezeichne weiterhin mit $D\rho_g u_*(h)$ die Ableitung an einer beliebigen Stelle $h = (\phi, (x, y)) \in G$. Diese lineare Abbildung bildet dann den Tangentialraum $T_h G$ in den Tangentialraum $T_{\rho_h u_*} G u_*$ ab, der die Basis $\{\rho_h \partial_\phi u_*, \rho_h \partial_x u_*, \rho_h \partial_y u_*\}$ besitzt. Aufgrund von (3.3) gilt dann

$$\begin{aligned} D\rho_g u_*(h)[b_1] &= \rho_h \partial_\phi u_*, \\ D\rho_g u_*(h)[l^\phi b_2] &= \rho_h \partial_x u_*, \\ D\rho_g u_*(h)[l^\phi b_3] &= \rho_h \partial_y u_*. \end{aligned}$$

Um dies einzusehen, betrachten wir für $i = 1, 2, 3$ den Weg $d_i(t) := hc_i(t)$. Dann gilt $d_i(0) = h$, $\partial_t d_1(t) \mid_{t=0} = b_1$ bzw. $\partial_t d_k(t) \mid_{t=0} = l^\phi b_k$ mit $k = 2, 3$ und $h = (\phi, (x, y))$. Die Behauptung ergibt sich nun aus $\rho_{d_i(t)} u_* = \rho_{hc_i(t)} u_* = \rho_h \rho_{c_i(t)} u_*$ und differenzieren dieser Identität nach t an der Stelle $t = 0$.

Kapitel 4

Die gestörte Gleichung

Ziel ist es nun, die Äquivarianz der Gleichung 2.1 durch einen Störungsterm der Form $\varepsilon H(u)$ so zu brechen, dass das resultierende System seine Symmetrie unter den Rotationen verliert und nur noch eine *lattice Symmetrie* beibehält.

Wir betrachten also nun die Gleichung

$$u_t = D \triangle u + F(u) + \varepsilon H(u). \tag{4.1}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von 2.1 nur durch den Term $\varepsilon H(u)$. Dabei ist H eine $(k+2)$-mal differenzierbare Abbildung von Y nach X mit folgender Eigenschaft:

$$H(\rho_g u) = \rho_g H(u) \tag{4.2}$$

für alle $g \in G_{lat} := \{(0, l) | l \in \mathbb{Z}^2\} \subset G$. Es wird vorerst nicht verlangt, dass H linear in u ist. Man sieht nun, dass (4.1) i.a. nicht mehr äquivariant unter ganz G ist für positives ε, sondern nur noch eine Restsymmetrie G_{lat} besitzt.

Man könnte für H beispielsweise einen Multiplikationsoperator wählen, also eine Abbildung der Form $H(u) = hu$. Es ist h hierbei eine Funktion aus $C := C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, wobei gilt:

$$h(x + l) = h(x) \tag{4.3}$$

für alle $x \in R^2$ und $l \in \mathbb{Z}^2$. Das bedeutet $h((0, (l_1, l_2))x) = h(x)$ für $(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2$, wobei hier die Notation von Kapitel 2 verwendet wird. Diese Symmetrie wird auch öfters als *lattice Symmetrie* bezeichnet. Man kennt also h vollständig, wenn man die Werte auf $[0, 1]^2$ vorgibt. So definiert ist $H(u) = hu$ eine beschränkte lineare Abbildung von Y nach X, als solche also genügend oft differenzierbar, und erfüllt aufgrund der Voraussetzungen an die Funktion h auch die Bedingung 4.2.

Man kann den Störungsterm nicht in der Form εh, mit einem $h \in C$ was (4.3) erfüllt, wählen. Denn da $h \in L^2$ gelten muss, müsste bereits $h = 0$ sein, da sonst die L^2-Norm unbeschränkt wäre.

Da die Abbildung H $(k+2)$-mal differenzierbar von Y nach X ist, existiert weiterhin ein lokaler Semifluss ϕ_t^ε von (4.1). Es hängt sogar die Lösung ϕ_t^ε differenzierbar vom Parameter ε ab.[1]

In dem Fall $\varepsilon = 0$ besitzt 4.1 eine flussinvariante Mannigfaltigkeit $M := M_0$, nämlich Gu_*, die invariant unter ρ_g, $g \in G$ ist. Nach den Ergebnissen von Scheel et al [6] und N.Jangle [3] besitzt nun auch 4.1 eine flussinvariante Mannigfaltigkeit M_ε, die aber nur noch invariant unter G_{lat} ist; letzteres heisst, dass mit $u \in M_\varepsilon$ auch $\rho_g u \in M_\varepsilon$ ist für alle $g \in G_{lat}$. Die gewünschte Mannigfaltigkeit wird mit Hilfe der *Graphen-Transformation* gewonnen.

Dies ist eine Methode, mit der man M_ε als Fixpunkt einer Abbildung Γ_ε, die eine Kontraktion auf einem geeigneten Funktionenraum ist, gewinnt. Jangle [3] wählte $\sum_\sigma := \{\beta \in \mathbb{C}^{0,1}(Gu_*, Y) | Lip(\beta) < 1, |\beta(gu_*)| < \delta\}$ als Funktionenraum.

Die Wahl des Funktionenraumes hat zur Folge, dass die gewünschte Mannigfaltigkeit M_ε der Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion σ_ε über der Gruppenmannigfaltigkeit Gu_* ist. Der Vollständigkeit halber zitieren wir noch einmal den Satz, wie er in Jangle [3] aufgeführt ist:

Satz 4.1
Gegeben sei das gestörte System (4.1). Das ungestörte System (2.1) erfülle die Hypothesen (1) und (2). Dann existiert für ε hinreichend klein eine G_{lat}-invariante Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_*^\varepsilon \subset Y$, die invariant unter ϕ_t^ε für alle $t \geq 0$ ist. Ferner ist $\mathcal{M}_*^\varepsilon$ eine lokal exponentiell anziehende $C^{k,1}$-Mannigfaltigkeit, die auch $C^{k,1}$ in ε ist.

Für $\varepsilon = 0$ ist die Grupenmannigfaltigkeit Gu_* selbst die flussinvariante Mannigfaltigkeit; deswegen ist in diesem Fall $\sigma_0(\rho_g u_*) = 0$ für alle $\rho_g u_*$.

Da wir später noch einige Informationen über σ_ε benötigen, werden wir etwas genauer auf die Abbildung Γ_ε eingehen. Nach Jangle ([3]) existieren für jedes $u_0 \in Y$ mit $dist(u_0, Gu_*) < \delta$ und $0 < \delta$ geeignet, eindeutige Elemente $\rho_g u_* \in Gu_*$ und $v \in gW^*$ mit

$$u_0 = \rho_g u_* + v. \tag{4.4}$$

Wir haben hierbei $W^* := Kern P_*$ und $gW^* := \{\rho_g u \mid u \in W^*\}$ gesetzt. P_* bezeichnet wie üblich die Spektralprojektion. Seien nun Π^g bzw. Π^w die zu der Zerlegung (4.4) assoziierten Projektionen auf die Gruppenkomponente Gu_* bzw. die gW^*-Komponente.

Sei $0 < T$. Definiere nun $\Gamma_\varepsilon : \sum_\sigma \to \sum_\sigma$ durch

$$[\Gamma_\varepsilon(\eta)](\rho_g u_*) = (\Pi^w[\phi_T^\varepsilon(id + \eta)])(\Pi^g[\phi_T^\varepsilon(\rho_g u_* + \eta(\rho_g u_*))])^{-1} \tag{4.5}$$

[1] siehe z.B Henry[2] Theorem 3.4.4

Der Term $(\Pi^g[\phi_T^\varepsilon(\rho_g u_* + \eta(\rho_g u_*))])^{-1}$ ist dann für T genügend gross wohldefiniert und ist aus Gu_*. Es soll nun $(id + \eta)(\rho_{g_0} u_*) = \rho_{g_0} u_* + \eta(\rho_{g_0} u_*)$ bedeuten für $g_0 \in G$ beliebig. Für die Wohldefiniertheit sowie die Idee hinter der Definition dieser Abbildung sei wieder auf die Arbeit von Jangle [3] verwiesen. Von dieser Abbildung zeige man nun, dass sie eine Kontraktion darstellt, d.h. dass sie eine lipschitzstetige Funktion mit Lipschitz-Konstante kleiner als 1 ist.

Wir halten noch eine wichtige Bemerkunge über M_ε in Form einer Proposition fest:

Proposition 4.1
(i) Sei $u \in M_\varepsilon$ beliebig. Dann ist $u \in H^2 := H^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^N)$.

Beweis.
Hier gibt es zwei Möglichkeiten, dies zu zeigen. Der erste Weg würde darin bestehen, zu zeigen, dass die Lösung $\phi_t^\varepsilon(u)$ für $u \in M_\varepsilon$ auch rückwärts in der Zeit für beliebig kleine Zeiten existiert. Das wäre z.B. der Fall, falls wir eine gewöhnliche Differentialgleichung auf M_ε hätten mit einem lokal Lipschitz-stetigen Vektorfeld. Dann wäre aufgrund der regularisierenden Eigenschaft des Semiflusses $\phi_t^\varepsilon(u)$ die Behauptung gezeigt, da ja $\phi_t^\varepsilon(u) \in H^2$ für beliebig kleine $0 < t$.
Wir zeigen die Behauptung anders und benutzen die Tatsache, dass σ_ε Fixpunkt der Abbildung Γ_ε ist.
Es ist sicher $w_0 := \phi_T^\varepsilon(id + \sigma)(\Pi^g[\phi_T^\varepsilon(\rho_g u_* + \sigma(\rho_g u_*))])^{-1} \in H^2$ aufgrund der regularisierenden Eigenschaft des Semiflusses. w_0 kann nun nach (4.4) als $w_0 = \rho_g u_* + v$ für ein $g \in G$ und $v = \Pi^w(w_0) \in gW^*$ geschrieben werden. Also ist auch $\eta_\varepsilon = \Pi^w(w_0) = w_0 - \rho_g u_* \in H^2$ und die Behauptung ist gezeigt.

Kapitel 5

Die Parametrisierung nahe Gu_*

Um das Vektorfeld auf der gestörten Mannigfaltigkeit M_ε explizit ausrechnen zu können, sollten zunächst geeignete Koordinaten gewählt werden. Ziel dieses Abschnitts ist es, Koordinaten anzugeben mit denen wir konkret rechnen können. Da wir später noch einige allgemeinere Aussagen über die reduzierte Gleichung machen, werden wir in den nächsten Kapitel noch zeigen, dass es nicht auf die spezielle Wahl der im folgenden gewählten Koordinaten ankommt. Wir werden im folgenden in Y arbeiten, solange nichts anderes gesagt wird.

Es ist ja bereits bekannt, dass sich M_ε als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion σ_ε über Gu_* schreiben lässt. Man sollte also die Koordinaten so wählen, dass ein beliebieges $u \in Y$ in der Form $u = \rho_g u_* + v$ geschrieben werden kann, wobei $\rho_g u_*$ die Komponente von u auf Gu_* und v die Normalenkomponente bezeichnet. Dies sollte zumindest für us möglich sein, die nahe der Gruppenmannigfaltigkeit Gu_* sind. Im folgenden werden diese Aussagen nun präzisiert.

Bezeichne nun mit S die Menge aller $u \in Y$ mit $< u, w >= 0$ für alle $w \in T_{u_*}Gu_*$. Hierbei bezeichnet $< .,. >$ das Standard-Skalarprodukt in $X = L^2$. Weiterhin sei $gS := \{\rho_g w | w \in S\}$, für ein festes $g \in G$.

Im folgenden sei $u \in Y$. Wir zeigen nun folgendes Lemma:

Lemma 5.1
Es existiert ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass jedes $u \in B_\delta(u_*)$, wobei sich diese Kugel auf die Norm in Y bezieht, eindeutig in der Form

$$u = \rho_g u_* + v \tag{5.1}$$

geschrieben werden kann, mit $v \in gS$ und $g \in B_\varepsilon(id)$.

Dies wird mit Hilfe des impliziten Funktionensatzes erreicht. Betrachte dazu folgende Abbildung $\chi : Y \times G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch:

$$\chi(u,g) := (< \rho_g^{-1}(u - \rho_g u_*), a_i u_* >)_i \tag{5.2}$$

mit $i = 1,2,3$ und $a_1 := \partial_\phi$, $a_2 := \partial_x$, $a_3 := \partial_y$. Was bedeutet es nun für ein u, falls ein $g \in G$ existiert mit $\chi(u,g) = 0$?

$\chi(u,g) = 0$ sagt aus, dass $\rho_g^{-1}(u - \rho_g u_*)$ senkrecht auf $T_{u_*}Gu_*$ steht, da die $a_i u_*$ eine Basis bilden. Dass ist aber äquivalent dazu, dass $(u - \rho_g u_*)$ orthogonal auf $T_{\rho_g u_*}Gu_*$ ist, was nach voriger Definition $u - \rho_g u_* =: v \in gS$ bedeutet. Schliesslich folgt daraus die gewünschte Darstellung $u = \rho_g u_* + v$ mit $v \in gS$ für u.

Da $\chi(u_*, id) = 0$ trivialerweise gilt, liegt es nahe den impliziten Funktionensatz anzuwenden. Z.z. wäre also, dass $D_g\chi(u,g)$ an der Stelle $(u,g) = (u_*, id)$ invertierbar ist. Ein grosses Problem ist aber stets die Differenzierbarkeit der Abbildung

$$g \longrightarrow \rho_g u \tag{5.3}$$

für ein festes u. Ist etwa (5.3) differenzierbar bei $g = 0$, so impliziert das z.B. $u \in \mathcal{D}(\partial_\phi)$ wenn man g in der Form $g = (R, 0)$ wählt und gegen Null gehen lässt. Es gilt aber nicht $Y = X^\alpha \subset \mathcal{D}(\partial_\phi)$ für $0 < \alpha \leq 1$ weswegen (5.3) nicht differenzierbar zu sein braucht. Nach Hyphothese 1 gilt aber, dass $g \longrightarrow \rho_g(\rho_h u_*)$ differenzierbar ist für ein $h \in G$. D.h., für jedes u aus der Gruppenmanigfaltigkeit Gu_* ist (5.3) differenzierbar. Da ρ_g eine Isometrie ist gilt aber:

$$\chi(u,g) = (< u, \rho_g(a_i u_*) > - < u_*, a_i u_* >)_i$$

für $i = 1,2,3$. Jetzt kann man nach g differenzieren und erhält an der Stelle $g = (\phi, (x,y))$

$$D_g\chi(u,g)b_1 = (< u, \rho_g a_1 a_j u_* >)_j \tag{5.4}$$

für $j = 1,2,3$ und

$$D_g\chi(u,g)[l^\phi b_k] = (< u, \rho_g a_k a_j u_* >)_j \tag{5.5}$$

für $k = 2,3$ sowie $j = 1,2,3$. Beachte, dass die Elemente $\{b_1, b_2, b_3\}$ die Basis von T_gG bilden. Also an der Stelle $(u,g) = (u_*, id)$

$$D_g\chi(u_*, id)b_i = (- < a_i u_*, a_j u_* >)_j \tag{5.6}$$

wo partielle Integration benutzt wurde. Da aber die $(a_i u_*)_i$ eine Basis von $T_{u_*}Gu_*$ bilden, ist die Matrix in 5.6 invertierbar. Damit ist die Behauptung des Lemmas gezeigt.

Wir wollen nun zeigen, dass die Darstellung aus dem Lemma für jedes $u \in Y$ mit $dist(Gu_*, u) < \delta$ gilt. Sei nun u δ-nah an Gu_*, existiere also ein $\rho_h u_*$, so dass $u \in B_\delta(\rho_h u_*)$. Dann liegt $(\rho_h)^{-1} u$ in $B_\delta(u_*)$, es existieren also $g \in G$ und ein $v \in gS$ mit

$$(\rho_h)^{-1} u = \rho_g u_* + v.$$

u besitzt also die Darstellung

$$u = \rho_{hg} u_* + \rho_h v.$$

mit $\rho_h v \in ghS$. Man kann nun zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist. Es gilt also der folgende Satz:

Satz 5.1 (Koordinaten)
Es existiert ein $\delta > 0$, so dass jedes $u \in Y$ mit $dist(u, Gu_*) < \delta$ eindeutig in der Form

$$u = \rho_g u_* + v \tag{5.7}$$

mit $v \in gS$ geschrieben werden kann.

Es wird nun nahe Gu_* nur noch mit den Koordinaten (g, v) statt u gearbeitet, wobei (5.7) gilt. Zu beachten ist, dass der Koordinatenwechsel, also die Abbildung $\Theta : u \longrightarrow (g, v)$ als Funktion von $\mathcal{D}(\Theta) \subset Y$ nach $G \times Y$ differenzierbar ist. Als $\mathcal{D}(\Theta) = \mathcal{T}_{ub}$ ist hier eine Tubenumgebung von Gu_* gemeint, in der man jedes u wie in (5.7) darstellen kann. Nach dem impliziten Funktionensatz ist nämlich die Abbildung $u \longrightarrow g(u)$ eine C^{k+1}-Funktion auf $\mathcal{T}_{ub}$, wobei auch hier $u \in Y$ ist. [1] Und für v gilt dann

$$v = u - \rho_g u_*$$

und hier ist die rechte Seite differenzierbar in u, da neben der Abbildung $g(u)$ auch die Abbildung $g \to \rho_g u_*$ differenzierbar ist. Also ist der Koordinatenwechsel differenzierbar. Auch die Inverse: $G \times Y \to Y$

$$(g, v) \longrightarrow u \tag{5.8}$$

mit $u = \rho_g u_* + v$ ist differenzierbar. Denn die rechte Seite ist linear in v und da auch $g \longrightarrow \rho_g u_* \in C^{k+1}$ ist, ist die rechte Seite auch differenzierbar nach g und damit kann man auch (5.8) $(k+1)$-mal ableiten. Wir halten fest:

Satz 5.2 (Koordinatenwechsel)
Sei $dist(u, Gu_*) < \delta$. Die Abbildung $\Theta : \mathcal{T}_{ub} \subset Y \to G \times Y$ und $\Theta : u \longrightarrow (g, v)$, mit den eindeutigen $g \in G$, $v \in gS$ für die $u = \rho_g u_* + v$ gilt, ist $(k+1)$-mal differenzierbar, mit $(k+1)$ differenzierbarer Umkehrabbildung $(g, v) \longrightarrow u$.

[1] siehe den Bew.von Lemma 4.1

Wir führen nun einige Bezeichnungen ein.

Bezeichne mit P und Π die zu diesen Koordinaten assoziierten nichtlinearen Projektionen, d.h. definiere $\Pi : \mathcal{T}_{ub} \subset Y \longrightarrow Y$ durch:

$$\Pi(u) = \rho_g u_* \tag{5.9}$$

mit dem eindeutigen $g \in G$ für das 5.7 gilt. Setze schliesslich $P : \mathcal{T}_{ub} \subset Y \longrightarrow G$ durch $P(u) = g(u)$ fest. Zu bemerken ist, dass P und Π (k+1)-mal differenzierbar sind und dass

$$\Pi'(\rho_g u_*)w = w \tag{5.10}$$

für alle $w \in T_{\rho_g u_*} G u_*$. Zur Begründung der letzten Behauptung wähle einen differenzierbaren Weg $\mho(-\tau, \tau) \longrightarrow Gu_*$ mit $\mho(0) = \rho_g u_*$ und $\partial_t \mho(0) = w$. Dann gilt nach Definition von Π: $\Pi(\mho(t)) = \mho(t)$ und ableiten nach t an der Stelle $t = 0$ ergibt die Behauptung. Ähnlich sieht man Kern$[\Pi'(\rho_g u_*)] = gS$, so dass $\Pi'(\rho_g u_*)$ eine Orthogonalprojektion ist.
Da wir das gestörte Vektorfeld auf der Lie Gruppe G statt auf Gu_* studieren wollen, ist im Moment allerdings die zu den Koordinaten u=(g,v) gehörende Projektion P wichtiger. Insbesondere wollen wir im folgenden die Ableitung $P'(u)$ in den Koordinaten der jeweiligen Tangentialräume beschreiben.
Bezeichne nun mit

$$C(g, u) := (c_{kl}(g, u, u_*))_{1 \leq k,l \leq 3} \tag{5.11}$$

die Umkehrabbildung der (3×3)-Matrix $D_g\chi(g, u)$ definiert durch $(D_g\chi(g, u))[e_1] = (< u, \rho_g a_1 a_i u_* >)_i$ bzw. $(D_g\chi(g, u))[l^\phi b_k] = (< u, \rho_g a_k a_i u_* >)_i$ für $i = 1, 2, 3$, $k = 2, 3$ und $g = (\phi, (x, y)) \in G$.

Dabei ist $D_g\chi(g(u), u)$ für alle u nahe Gu_* aufgrund des impliziten Funktionensatzes invertierbar. Es ist dann 5.11 die Umkehrabbilung dieser Matrix. Da es vorerst nicht auf die expliziten Einträge in der Matrix $C(g, u)$ ankommt, wird der Übersicht halber darauf verzichtet, diese auszurechnen. Es sei jedoch noch eine wichtige Bemerkung festgehalten:

Für $u = \rho_g u_*$ hängen die Einträge c_{lk} der Matrix $C(u, g)$ für $1 \leq l, k \leq 3$ nicht von g ab, d.h. es ist $c_{lk}(g, \rho_g u_*, u_*) = c_{lk}(u_*)$.

Diese letzte Bemerkung ist klar, wenn man bedenkt, dass $D_g\chi(g, \rho_g u_*)$ unabhängig von g ist, da ρ_g eine Isometrie ist. Falls die Matrix $C(u, g)$ an der Stelle $(u, g) = (\rho_g u_*, g)$ berechnet wird, kann also von nun an kurz C geschrieben werden.

Da wir später das Vektorfeld auf der Lie-Gruppe G studieren wollen, werden wir in den folgenden Lemmata die Ableitungen der Projektion P

bestimmen. Die Gruppe G hat gegenüber der Gruppenmannigfaltigkeit Gu_* den Vorteil, das wir das reduzierte Vektorfeld in Komponenten ϕ, x und y schreiben können.

Lemma 5.2
Die Ableitung $P'(\rho_g u_*)$ an einer beliebigen Stelle $\rho_g u_* \in Gu_*$ ist gegeben durch: $P'(\rho_g u_*)x = -C(< x, \rho_g a_i u_* >)_i$, $x \in Y$.

Beweis.
Nach dem impliziten Funktionensatz existiert also eine (k+1)-mal differenzierbare Funktion $g(u)$ mit $\chi(g(u), u) = 0$, für u geeignet.[2] Ableiten nach u ergibt:

$$g'(u)x = -D_g\chi(g(u), u)^{-1}(D_u\chi(g(u), u)x) \tag{5.12}$$

für $x \in Y$. Nach Definition von χ ergibt sich $D_u\chi(g, u)x = (< x, \rho_g a_i u_* >)_i$, für $i = 1, 2, 3$ und $x \in Y$. Da ausserdem $C(g(u), u)$ der Matrix $D_g\chi(g(u), g)^{-1}$ entspricht, ergibt sich die Behauptung.

Lemma 5.3
Die Ableitung $P''(\rho_g u_*)$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} P''(\rho_g u_*)[x_1, x_2] = -C[&(< x_1, \{g'(\rho_g u_*)x_2\}a_i u_* >)_i \\ &+ (< x_2, \{g'(\rho_g u_*)x_1\}a_i u_* >)_i \\ &+ \zeta_{(\rho_g u_*)}(g'(\rho_g u_*)x_1, g'(\rho_g u_*)x_2)] \end{aligned}$$

mit $i = 1, 2, 3$. Sei $g = (\phi, (x, y))$. Dann ist $\zeta_{(\rho_g u_*)} : (T_g G) \times (T_g G) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch:
$\zeta_{(\rho_g u_*)}(b_1, b_1) = (< \rho_g u_*, \rho_g a_1 a_1 a_k u_* >)_k$, $k = 1, 2, 3$.
$\zeta_{(\rho_g u_*)}(l_\phi b_j, b_1) = (< \rho_g u_*, \rho_g a_j a_1 a_k u_* >)_k$, $k = 1, 2, 3$ und $j = 2, 3$.
$\zeta_{(\rho_g u_*)}(b_1, l_\phi b_j) = (< \rho_g u_*, \rho_g a_1 a_j a_k u_* >)_k$, $k = 1, 2, 3$ und $j = 2, 3$
$\zeta_{(\rho_g u_*)}(l_\phi b_j, l_\phi b_i) = (< \rho_g u_*, \rho_g a_j a_i a_k u_* >)_k$, $k = 1, 2, 3$ und $i, j = 2, 3$.
und diese Abbildung ist bilinear.

Beweis
Die Behauptung ergibt sich sofort aus 2-maligen ableiten der Identität $\chi(u, g(u)) = 0$ nach u. Man beachte dabei, dass etwa $D^2_{uu}\chi(u, g) = 0$ ist, da bereits χ linear in u ist.

[2] siehe dazu den Beweis von Lemma 4.1

Kapitel 6

Das reduzierte Vektorfeld

Es wird nun das Vektorfeld auf der flussinvarianten Mannigfaltigkeit für das System 4.1 ausgerechnet. Wir unterteilen dieses Kapitel in zwei Abschnitte. Das erste ist für die explizite Bestimmung des reduzierten Vektorfeldes auf G mit den in Kapitel 5 bestimmten Koordinaten gedacht. Wir werden dabei auf einige technische Schwierigkeiten stossen.
In Abschnitt zwei dieses Kapitels werden wir, nachdem wir das Vektorfeld nach dem Störungsparameter ε entwickelt haben, den führenden Ordnungsterm in Abhängigkeit der Störfunktion H studieren. Da es hierbei nicht konkret auf die in Kapitel 5 bestimmten Koordinaten ankommt, werden wir unsere Überlegungen auf eine ganze Klasse von Koordinaten und den dazugehörigen Projektionen ausdehnen. Wir werden in diesem Abschnitt unser Haupttheorem formulieren.

6.1 Das Vektorfeld in Koordinaten

Wir wollen nun die Dynamik einer Lösung $u := \phi_t^\varepsilon(w)$ von 4.1 auf der flussinvarianten Mannigfaltigkeit M_ε studieren. Da man aber die M_ε aber als Graph einer glatten Funktion σ_ε über Gu_* schreiben kann, wobei $\sigma_\varepsilon : Gu_* \to Y$, gilt

$$\phi_t^\varepsilon(w) = \rho_{g(t,\varepsilon)}u_* + \sigma_\varepsilon(\rho_{g(t,\varepsilon)}u_*) \tag{6.1}$$

Wir bemerken allerdings, dass stets $\sigma_\varepsilon(\rho_g u_*) \in gW_*$! [1] Das liegt daran, dass der Graph bezüglich anderer Koordinaten als denen von uns gewählten dargestellt ist. Für $\varepsilon = 0$ gilt aber auch hier $\sigma_0 = 0$, also $M_0 = Gu_*$, da in diesem Fall Gu_* selbst flussinvariant und gruppeninvariant unter der ganzen Gruppe G ist und die Mannigfaltigkeit M_0 eindeutig ist.

[1] siehe zur Definition von gW_* die Bemerkungen nach (4.4)

Wir müssen nun klären, ob es auch eine zu (6.1) anologe Darstellung gibt, mittels einer noch zu bestimmenden Abbildung η_ε, so dass $\Pi(\phi_t^\varepsilon(w)) = \rho_{g(t,\varepsilon)}u_*$.[2] Dies impliziert natürlich $\eta_\varepsilon(\rho_g u_*) \in gS$ und wir erinnern, dass $\Pi[gS] = 0$.

Wir werden in dem nächsten Lemma zeigen, dass dies möglich ist.

Lemma 6.1
Es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ so dass man für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Mannigfaltigkeit M_ε als Graph einer C^{k+1} Funktion $\eta_\varepsilon : Gu_* \to Y$ schreiben, die ebenfalls C^{k+1} in ε ist, so dass für $w \in M_\varepsilon$ gilt:

$$\phi_t^\varepsilon(w) = \rho_{g(t,\varepsilon)}u_* + \eta_\varepsilon(\rho_{g(t,\varepsilon)}u_*). \tag{6.2}$$

Dabei ist $\rho_{g(t,\varepsilon)}u_* = \Pi(\phi_t^\varepsilon(w))$.

Beweis
Sei ε_0 klein genug gewählt, so dass M_ε in der Tubenumgebung von Gu_* liegt und man für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ jeden Punkt auf M_ε bezüglich der in Kapitel 4 darstellen kann und (6.1) gilt. Dies ist nach den Ergebnissen von Jangle [3] möglich.

Weiterhin ist dort gezeigt, dass σ_ε eine C^{k+1}-Funktion in ihrem Argument und dem Parameter ist. [3]
Man kann sich nun schnell überlegen, dass die gesuchte Funktion η_ε die Gleichung

$$\eta_\varepsilon[\Pi(id_{Gu_*} + \sigma_\varepsilon)] = (id - \Pi)(id_{Gu_*} + \sigma_\varepsilon) \tag{6.3}$$

erfüllen muss. Beide Seiten sind Abbildungen von Gu_* nach Y.

Um η_ε sinnvoll definieren zu können, müssen wir die Abbildung $K_\varepsilon := \Pi(id_{Gu_*} + \sigma_\varepsilon) : Gu_* \to Gu_*$ invertieren. Um dies zu tun, bemerken wir, dass $K_0 = \Pi = id_{Gu_*}$ ist, also $K_0'(\rho_g u_*) = id_{T_{\rho_g u_*}Gu_*}$. Dies legt die Vermutung nahe, dass wir den impliziten Funktionensatz benutzen können. Wir definieren dazu die Hilfsfunktion $J : \mathbb{R} \times G \times G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$J(\varepsilon, g, h) = \theta(K_\varepsilon(\rho_g u_*)) - \theta(\rho_h u_*)$$

Mit $\theta : Gu_* \to \mathbb{R}^3$ sei hierbei eine glatte Karte von Gu_* gemeint. Es gilt offenbar $J(0, g, g) = 0$ und nach den Vorbemerkungen auch, dass $D_2 J(0, g, g)$ invertierbar ist. Die "2"bezeichnet hierbei die Ableitung nach dem zweiten Argument von J.

Es existieren also nach dem impliziten Funktionensatz offene Umgebungen $U_g \subset G, V_g \subset G$ sowie $W_0 \subset \mathbb{R}$ und eine C^{k+2} Funktion $\Upsilon : W_0 \times U_g \to V_g$, so dass $J(\varepsilon, \Upsilon(\varepsilon, g), g) = 0$ ist für alle $\varepsilon \in W_0$ und $g \in U_g$.

[2] Die Abbildung Π ist im vorigen Kapitel definiert worden
[3] Für den Parameterfall siehe auch Scheel et al [6]

Also ist K_ε auf Gu_* lokal glatt invertierbar und ist durch $\rho_g u_* \to \rho_{\Upsilon(\varepsilon,g)} u_*$ gegeben. Man beachte, dass man den impliziten Funktionensatz eigentlich nur bei allen $g \in G$ mit $g = (\phi, T)$ und $T \in [0,1]^2$ anwenden muss, da K_ε mit G_{lat} kommutiert. Dieser Bereich ist zudem kompakt. Da aber $K_0 = id_{Gu_*}$, besitzt auch K_ε, für ε klein genug, eine untere Lipschitzkonstante, da wir uns auf eine kompakte Menge beschränken können. Also ist K_ϵ injektiv mit glatter Umkehrabbildung. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Wir bemerken, dass die Abbildung η_ε ebenfalls äquivariant unter G_{lat} ist, also $\eta_\varepsilon(\rho_g u) = \rho_g \eta_\varepsilon(u)$ gilt für $g \in G_{lat}$ und $u \in Gu_*$.

Nach dem eben gezeigten Lemma gilt also, dass eine Lösung $u := \phi_t^\varepsilon(w)$ von 4.1 auf der flussinvarianten Mannigfaltigkeit M_ε die Form

$$\phi_t^\varepsilon(w) = \rho_{g(t,\varepsilon)} u_* + \eta_\varepsilon(\rho_{g(t,\varepsilon)} u_*) \tag{6.4}$$

hat und $\rho_{g(t,\varepsilon)} u_* := \Pi(\phi_t^\varepsilon(w)) \in Gu_*$. Desweiteren ist η_ε eine C^{k+1}-Funktion in ϵ und es ist $\eta_0(\rho_g u_*) = 0$ für alle $\rho_g u_*$. Dies hängt damit zusammen, dass für $\varepsilon = 0$ die Gruppenmannigfaltigkeit Gu_* selbst die fluss- und gruppeninvariante Mannigfaltigkeit ist, also $M_0 = Gu_*$. Man kann also $\eta_\varepsilon(\rho_g u_*)$ nach ε entwickeln und $\eta_\varepsilon(\rho_g u_*) = \varepsilon \partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(\rho_g u_*) + O(\varepsilon^2)$ schreiben. Der Übersicht halber wird im folgenden $g_\varepsilon u_* := \rho_{g(t,\varepsilon)} u_*$ und $v_\varepsilon := \eta_\varepsilon(\rho_{g(t,\varepsilon)} u_*)$ gesetzt. Setze weiter $g := g(t,\varepsilon) = P(\phi_t^\varepsilon(w))$. Für die Lösung $\phi_t^\varepsilon(w)$ schreiben wir auch öfters kurz u, falls keine Missverständnisse auftreten können.

Die Dynamik auf M_ε lässt sich also durch folgende Differentialgleichung auf G beschreiben:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \partial_t P(u) = P'(u)\dot{u} \\ &= P'(u)(D \triangle u + F(u) + \varepsilon H(u)) \\ &= P'(g_\varepsilon u_* + v_\varepsilon)(D \triangle (g_\varepsilon u_* + v_\varepsilon) + F(g_\varepsilon u_* + v_\varepsilon) + \varepsilon H(g_\varepsilon u_* + v_\varepsilon)) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Wir bezeichnen das durch diese Differentialgleichung definierte Vektorfeld auch oft als das *reduzierte Vektorfeld.*

Da wir über diese Differentialgleichung in dieser Form schwer etwas sagen können, soll nun dieses Vektorfeld nach ε entwickelt werden. Man beachte nämlich, dass die Projektionen $P(u)$ für $u \notin Gu_*$ nicht explizit gegeben sind. Die Ableitung $P'(\rho_g u_*)$ kann man aber mit Hilfe des Lemmas aus dem vorigen Kapitel angeben. Um aber weiterhin eine Differentialgleichung zu erhalten, wird der Term $g_\varepsilon u_*$ nicht entwickelt. Dabei stösst man zunächst auf ein Problem. Man muss sich überlegen, warum $\varepsilon \to D \triangle v_\varepsilon$ differenzierbar ist. Dass Problem hierbei ist, dass $\triangle$ kein beschränkter linearer Operator von Y nach X ist, für $Y = X^\alpha$, $0 \le \alpha < 1$. Hier hilft aber die Feststellung, dass

$w \to P'(\rho_g u_*)(D \triangle w)$ für $w \in \mathcal{D}(\triangle)$ zu einem beschränkten Operator auf Y erweitert werden kann. Dazu folgendes Lemma:

Lemma 6.2
Setzt man in der Differentialgleichung (6.1) $g_\delta u_*$ statt $g_\varepsilon u_*$, so kann man das resultierende Vektorfeld nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ differenzieren.

Beweis:
Betrachte zum Beweis dieser Behauptung die Abbildung Γ

$$(\tau, \xi) \longrightarrow P'(g_\delta u_* + v_\tau)[D \triangle (g_\delta u_* + v_\xi)]. \tag{6.6}$$

Dann ist Γ nach τ differenzierbar, da die Abbildung $\tau \to P'(g_\delta u_* + v_\tau)$ als Komposition glatter Funktionen differenzierbar ist. Da aber für $\tau = 0$ gerade $v_0 = 0$ ist, ergibt sich $\Gamma(0, \xi) = P'(g_\delta u_*)[D \triangle (g_\delta u_* + v_\xi)]$. Es sei daran erinnert, dass $g_\delta u_* = \Pi(\phi_t^\delta(w))$ und Π die Projektion auf den Gruppenorbit Gu_* ist. Wir können daher nach Lemma (5.2) $\Gamma(0, \xi)$ auch folgendermassen angeben:

$$\mathbf{\Gamma(0}, \xi) = -C \begin{pmatrix} < D \triangle (g_\delta u_* + v_\xi), \rho_g a_1 u_* > \\ < D \triangle (g_\delta u_* + v_\xi), \rho_g a_2 u_* > \\ < D \triangle (g_\delta u_* + v_\xi), \rho_g a_3 u_* > \end{pmatrix}.$$

Da $< .,. >$ das Standardskalarprodukt in X bezeichnet, kann nun partiell integriert werden. Zu beachten ist dabei, dass aufgrund unserer Annahmen in Kapitel 1 gilt, dass $\rho_g a_i u_* \in \mathcal{D}(\triangle)$ für alle $i = 1, 2, 3$. Es ist nämlich $\rho_g a_i u_* \in T_{\rho_g u_*} G u_*$ für $i = 1, 2, 3$. Also ergibt sich

$$\mathbf{\Gamma(0}, \xi) = -C \begin{pmatrix} < (g_\delta u_* + v_\xi), D \triangle [\rho_g a_1 u_*] > \\ < (g_\delta u_* + v_\xi), D \triangle [\rho_g a_2 u_*] > \\ < (g_\delta u_* + v_\xi), D \triangle [\rho_g a_3 u_*] > \end{pmatrix}.$$

Nun erkennt man, dass $\Gamma(0, \xi)$ nach ξ differenzierbar ist, da man $\Gamma(0, .)$ als Komposition der differenzierbaren Abbildungen $\xi \to g_\delta u_* + v_\xi$ und

$$\mathbf{w} \to \begin{pmatrix} < w, D \triangle [\rho_g a_1 u_*] > \\ < w, D \triangle [\rho_g a_2 u_*] > \\ < w, D \triangle [\rho_g a_3 u_*] > \end{pmatrix}$$

schreiben kann. Letztere Abbildung ist sogar eine beschränkte lineare Abbildung von X in sich und ist deswegen auch glatt als Abbildung von Y nach X. Insgesamt ist demnach 6.8 differenzierbar.

Man kann also $\varepsilon \to P'(g_\delta u_* + v_\varepsilon)(D \triangle (g_\delta u_* + v_\varepsilon))$ ableiten, da dies aus der Differenzierbarkeit der Abbildung $\varepsilon \to \Gamma(\varepsilon, \varepsilon)$ folgt. Da nach Annahme die Abbildungen $F(u)$ und $H(u)$ genügend glatt sind, ist auch $\varepsilon \to$

$P'(g_\delta u_*+v_\varepsilon)F(g_\delta u_*+v_\varepsilon)$ bzw. $\varepsilon \to P'(g_\delta u_*+v_\varepsilon)\varepsilon H(g_\delta u_*+v_\varepsilon)$ differenzierbar. Dies zeigt die Behauptung.

Wir weisen darauf hin, dass die Differenzierbarkeit von $\varepsilon \to \triangle v_\varepsilon$ auch fast direkt folgt. Der Beweis des Lemmas zeigt aber eine stärkere Aussage.
Nach diesem Lemma können wir also nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ differenzieren und erhalten

$$\dot{g} = P'(g_\varepsilon u_*)(D \triangle g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*)) + \varepsilon\{P''(g_\varepsilon u_*)[\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), D \triangle g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*)] \tag{6.7}$$
$$+ P'(g_\varepsilon u_*)(D \triangle \partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*) + F'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*) + H(g_\varepsilon u_*))\} + O(\varepsilon^2)$$

Beachte dabei, dass nach dem vorigen Lemma [4] der Operator $w \to P'(\rho_g u_*)D\triangle w$ sogar auf $X = L^2$ Sinn bringt.

Der Term $O(\varepsilon^2)$ bezeichnet wie üblich einen Restterm, der durch ε^2 dividiert noch beschränkt bleibt für $\varepsilon \to 0$.
Es können noch weitere Vereinfachungen gemacht werden:

Lemma 6.3
Es ist $P'(g_\varepsilon u_*)(D \triangle g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*)) = (D \triangle g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*)) \in T_{g_\varepsilon}G$. Desweiteren gilt in der Basis B^{g_ε}:

$$P'(g_\varepsilon u_*)[D \triangle g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*)] = \begin{pmatrix} -\omega_* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beweis.
Nach Kapitel 4 ist $\Pi'(\rho_g u_*)w = w$ für alle $w \in T_{\rho_g u_*}Gu_*$. Es reicht also zu zeigen, dass $g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*) \in T_{g_\varepsilon u_*}Gu_*$. Da $g(t) := \rho_g \rho_{(\omega_* \cdot t, 0)} u_*$ nach Hyphothese (1) eine Lösung von (2.1) ist für ein bel. $g \in G$, gilt

$$D\triangle\rho_g u_*+F(\rho_g u_*) = D\triangle g(\frac{2\pi}{\omega_*})+F(g(\frac{2\pi}{\omega_*})) = -\omega_*\rho_g\partial_\phi u_* \in T_{\rho_g u_*}Gu_*. \tag{6.8}$$

Diese Gleichung besagt also, dass für jedes $g \in G$ gilt, dass $D \triangle \rho_g u_* + F(\rho_g u_*) \in T_{\rho_g u_*}Gu_*$. Also gilt insbesondere auch $D \triangle g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*) \in T_{g_\varepsilon u_*}$. Desweiteren gilt natürlich bezüglich der Basis B^{g_ε} und wegen des elementaren Zusammenhangs von $P'(\rho_g u_*)$ und $\Pi'(\rho_g u_*)$:

$$P'(g_\varepsilon u_*)[D \triangle g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*)] = \begin{pmatrix} -\omega_* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[4] siehe den Beweis

Der Übersicht halber stellen wir nun das Vektorfeld auf G beüglich einer anderen Basis dar. Wir geben jedem Tangentialraum T_gG die spezielle Basis $SpB(g) := \{(1,0),(0,e^{i\phi}),(0,e^{i\phi}i)\}$, wobei $g=(\phi,(x,y))$. Nun kann das oben nach ε entwickelte Vektorfeld (6.7) in Koordinaten geschrieben werden:

Satz 6.1 (Vektorfeld)
Das reduzierte Vektorfeld (6.7) hat bezüglich der Basis $SpB(g)$ die Form

$$
\begin{aligned}
\dot\phi = -\omega_* &- \varepsilon(c_{11} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial^2_{\phi\phi}u_* > +c_{11} < g_\varepsilon\partial_\phi u_*, [P'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*)]\partial_\phi u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{11} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), \triangle(\partial_\phi u_*) > +c_{11} < F'(g_\varepsilon u_*), \partial_\phi u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{11} < H(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_\phi u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{12} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_\phi\partial_x u_* > +c_{12} < g_\varepsilon\partial_x u_*, [P'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*)]\partial_x u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{12} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), \triangle(\partial_x u_*) > +c_{12} < F'(g_\varepsilon u_*), \partial_x u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{12} < H(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_x u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{13} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_\phi\partial_y u_* > +c_{13} < g_\varepsilon\partial_y u_*, [P'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*)]\partial_y u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{13} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), \triangle(\partial_y u_*) > +c_{13} < F'(g_\varepsilon u_*), \partial_y u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{13} < H(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_y u_* >) + O(\varepsilon^2)\\
\dot x = &- \varepsilon(c_{21} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial^2_{\phi\phi}u_* > +c_{21} < g_\varepsilon\partial_\phi u_*, [P'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*)]\partial_\phi u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{21} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), \triangle(\partial_\phi u_*) > +c_{21} < F'(g_\varepsilon u_*), \partial_\phi u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{21} < H(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_\phi u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{22} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_\phi\partial_x u_* > +c_{22} < g_\varepsilon\partial_x u_*, [P'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*)]\partial_x u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{22} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), \triangle(\partial_x u_*) > +c_{22} < F'(g_\varepsilon u_*), \partial_x u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{22} < H(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_x u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{23} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_\phi\partial_y u_* > +c_{23} < g_\varepsilon\partial_y u_*, [P'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*)]\partial_y u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{23} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), \triangle(\partial_y u_*) > +c_{23} < F'(g_\varepsilon u_*), \partial_y u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{23} < H(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_y u_* >) + O(\varepsilon^2)\\
\dot y = &- \varepsilon(c_{31} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial^2_{\phi\phi}u_* > +c_{31} < g_\varepsilon\partial_\phi u_*, [P'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*)]\partial_\phi u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{31} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), \triangle(\partial_\phi u_*) > +c_{31} < F'(g_\varepsilon u_*), \partial_\phi u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{31} < H(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_\phi u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{32} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_\phi\partial_x u_* > +c_{32} < g_\varepsilon\partial_x u_*, [P'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*)]\partial_x u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{32} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), \triangle(\partial_x u_*) > +c_{32} < F'(g_\varepsilon u_*), \partial_x u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{32} < H(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_x u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{33} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_\phi\partial_y u_* > +c_{33} < g_\varepsilon\partial_y u_*, [P'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*)]\partial_y u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{33} < \partial_\varepsilon\eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), \triangle(\partial_y u_*) > +c_{33} < F'(g_\varepsilon u_*), \partial_y u_* >)\\
&- \varepsilon(c_{33} < H(g_\varepsilon u_*), g_\varepsilon\partial_y u_* >) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

Der Beweis folgt mit Hilfe des vorigen Lemmas (6.3) und den Lemmata (5.2) und (5.3). Dazu einige Bemerkungen:
Hätten wir dieses Vektorfeld bezüglich der Basis B^g dargestellt, so würde noch der Faktor $e^{i\phi}$ vor $z = x + iy$ auftreten. Wir rufen in Erinnerung, dass g_ε, das in (6.7) auf der rechten Seite auftritt, weiterhin von t, ε und dem Startwert $u \in Y$ abhängt, genauer $g_\varepsilon = \Pi(\phi_t^\varepsilon(w))$. Da wir $g_\varepsilon = \rho_{g(t,\varepsilon)} u_*$ gesetzt haben, gilt $P(g_\varepsilon) = g(t, \varepsilon)$ und wir schreiben $g(t, \varepsilon) = (\phi(t), x(t), y(t))$.[5]
Wir haben also mit (6.7) eine gewöhnliche autonome Differentialgleichung. Die c_{ij} mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ bezeichnen wie üblich die Einträge der Matrix C. [6] Wir betonen, dass die Matrixeinträge c_{ij} von u_*, aber nicht von $g_\varepsilon u_*$ abhängen, was unsere Schreibweise rechtfertigt.

Weiterhin haben wir folgendes Korollar:

Korollar 6.1
Das Vektorfeld $\tilde{\mathcal{F}}$ aus Satz (6.7) ist translationsinvariant unter ganzzahligen Translationen in x, y Richtung, d.h. es ist $\tilde{\mathcal{F}}(\phi, x + l, y + k) = \tilde{\mathcal{F}}(\phi, x, y)$ für alle $(l, k) \in \mathbb{Z}^2$.

Für $\varepsilon = 0$ erhält man die Dynamik von der ungestörten rotierenden Welle auf G, nämlich

$$\tilde{\mathcal{F}}(\phi, x, y) = \begin{pmatrix} -\omega_* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.2 Der Operator $\mathcal{L}$

Ziel dieses Abschnitts ist es, den führenden Ordnungsterm der Taylorentwicklung von (6.7) in Abhängigkeit der Störfunktion H zu studieren. D.h. wir wollen die Abbildung $\mathcal{L}$ definiert durch

$$\begin{aligned} H \longrightarrow & P''(g_\varepsilon u_*)[\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), D \triangle g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*)] \\ & + P'(g_\varepsilon u_*)(D \triangle \partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*) + F'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*) + H(g_\varepsilon u_*)) \end{aligned}$$

studieren. Auch die Frage der geeigneten Räume bleibt zu klären. Wir sehen allerdings, dass $\mathcal{L}$ auch von der Projektion P abhängt. Da die späteren Aussagen, die wir über $\mathcal{L}$ treffen werden, nicht konkret von den in Kapitel 4 gewählten Koordinaten abhängen, lassen wir im folgenden Projektionen einer bestimmten Klasse zu, die wir nun beschreiben wollen.

[5] ϕ bezeichnet die Rotationskomponente und x,y die Translationskomponenten der Gruppe $SE(2)$

[6] Man vergleiche mit (5.11) und den dort folgenden Bemerkungen

Koordinaten 1
Es existiere ein Unterraum $\mathcal{K} \subset Y$ und ein ε_0, so dass man jedes $u \in Y$, mit $dist(u, Gu_*) < \varepsilon_0$ eindeutig in der Form

$$u = \rho_g u_* + w$$

schreiben kann. Dabei ist $w \in g\mathcal{K}$ und $g\mathcal{K} = \{\rho_g v : v \in \mathcal{K}\}$. Desweiteren seien die dazugehörigen Projektionen $P : \mathcal{T}_{ub} \subset Y \to G$ und $\Pi : \mathcal{T}_{ub} \subset Y \to Y$, wobei Π auf Gu_* projeziert, C^{k+1} Funktionen.

Dabei bezeichnet $\mathcal{T}_{ub}$ wie in Kapitel 5 eine Tubenumgebung von Gu_*, auf denen die Projektionen erklärt sind.

Wir bemerken noch, dass aufgrund des einfachen Zusammenhangs von P und Π die Differenzierbarkeit einer Projektion ausreicht. Sofern keine Missverständnisse bestehen, bezeichnen wir weiterhin die bei $\mathcal{L}$ auftretende Projektion mit P unabhängig welche Koordinaten wir gewählt haben.

Als Beispiel für die angegebene Klasse von Koordinaten seien die in Kapitel 4 angegebenen mit $\mathcal{K} = S$ und die in [3] benutzten erwähnt, wo $\mathcal{K} = KernP_*$ und P_* die Spektralprojektion aus Hyphotese 2 ist.

Seien nun Koordinaten wie unter *Koordinaten1* gegeben. Man kann dann ganz analog zu Lemma (6.1) M_ε als Graph einer glatten Funktion η_ε über Gu_* schreiben und für $w \in M_\varepsilon$ gilt

$$\phi_t^\varepsilon(w) = \rho_{g(t,\varepsilon)} u_* + \eta_\varepsilon(\rho_{g(t,\varepsilon)} u_*). \tag{6.9}$$

mit $\rho_{g(t,\varepsilon)} u_* = \Pi(\phi_t^\varepsilon(w))$. Wir betonen noch einmal, dass wir nur den eigentlichen Fixpunkt der Graphen-Transformation mit σ_ε bezeichnen. Wählen wir entsprechend *Koordinaten1* andere Koordinaten, so bezeichnen wir den Graphen, für den (6.9) gilt, mit η_ε. Wir halten noch eine andere wichtige Tatsache fest:

Bemerkung 1
Seien Koordinaten (g, w) wie in (Koordinaten1) gegeben. Dann gilt für die dazugehörige Projektion P die Eigenschaft $P(\rho_g u) = gP(u)$.

Bevor wir mit der Analyse von $\mathcal{L}$ beginnen, zeigen wir noch, dass man mittels zwei verschiedener Projektionen P_1 und P_2 zwei konjugierte Flüsse auf G erhält. Es spielt also im wesentlichen keine Rolle, welche Projektion man wählt.

Proposition 6.1
Seien P_1,P_2 zwei Projektionen. Setze $g(t, P_1 w) = P_1(\phi_t^\varepsilon(w))$ und $h(t, P_2 w) = P_2(\phi_t^\varepsilon(w))$. Dann sind diese Flüsse auf G durch einen C^{k+1} Diffeomorphismus konjugiert.

Der Beweis ist klar, wenn man bedenkt, dass man etwa $P_1 : M_\varepsilon \to Gu_*$ invertieren kann. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis von Lemma 6.1. Setzt man nun $\Psi := P_2(P_1)^{-1} : Gu_* \to Gu_*$, so ist Ψ gerade $k+1$ mal differenzierbar und es gilt $\Psi g(t, \rho_g u_*) = h(t, \Psi(\rho_g u_*))$.

Wir kommen nun wieder zum Operator $\mathcal{L}$. Seien Koordinaten, wie unter *Koordinaten1* gewählt und bezeichne mit P die dazugehörige Projektion auf G. Wir bezeichnen weiterhin das Vektorfeld $\mathcal{L}(H)$ mit $\mathcal{F}$. Da $\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}$ eine C^{k+1} Funktion ist, ist $\mathcal{F}$ in jedem Fall stetig, wie wir in der obigen Definition von $\mathcal{L}$ sehen . Wir wählen als Bildraum für $\mathcal{L}$ den Banachraum der beschränkten stetigen Vektorfelder auf G, die 1 periodisch in ihren Translationskomponenten x, y sind und bezeichnen diesen Banachraum versehen mit der Supremumsnorm mit $C_p(G, \mathbb{R} \times \mathbb{C})$. Dies wird durch die folgende Proposition gerechtfertigt.

Proposition 6.2
Seien Koordinaten (g, w) wie in (Koordinaten1) nahe Gu_* gegeben und bezeichne mit $P : Y \to G$ die dazugehörige Projektion. Dann ist das Vektorfeld $\mathcal{F}$ beschränkt und es gilt $\mathcal{F}(\phi, (x+l, y+k)) = \mathcal{F}(\phi, (x, y))$ für alle $l, k \in \mathbb{Z}$.

De Beweis dieser Aussage ergibt sich durch die Festellung, dass für $w \in M_\varepsilon$ gerade $\phi_t^\varepsilon(w) = \rho_{g(t,\varepsilon)} u_* + \eta_\epsilon(\rho_{g(t,\varepsilon)} u_*)$ mit G_{lat} kommutiert. Da die Projektion P nach der vorigen Bemerkung mit G kommutiert und $P(\phi_t^\varepsilon(w)) = g(t, \varepsilon)$ ergibt sich die Behauptung.

Wir betrachten nun den Operator $\mathcal{L} : \mathcal{H} \to C_p(G, \mathbb{R} \times \mathbb{C})$. Dabei setzen wir $\mathcal{H} = \{H : Y \to Y : H(\rho_h u) = \rho_h H(u), h \in G_{lat}, H \in C^{k+1}, \| H \|_\infty < \infty\}$. $\mathcal{H}$ ist mit der sup-Norm versehen.

Die Frage, die uns von jetzt an beschäftigt ist, welche Vektorfelder $\mathcal{F}$ in Abhängigkeit der Störfunktion H tatsächlich realisiert werden können. Genauer: Was kann man über das Bild der Abbildung $\mathcal{L} : H \to \mathcal{F}(H)$ aussagen? Ist $\mathcal{L}$ etwa surjektiv, so bedeutet dies z.B., dass wir für ein bel. vorgegebenes Vektorfeld $\mathcal{F}_0$ des Bildraumes eine Störfunktion H finden, so dass das reduzierte Vektorfeld gerade $\mathcal{F}_0$ ist.
Wir rufen in Erinnerung, dass das Vektorfeld auf G die Dynamik der gestörten rotierenden Welle beschreibt. Also beschreibt $\mathcal{L}(H)$ diese Dynamik zu führender Ordnung.

Eine direkte Analyse von $\mathcal{F}$ in Abhängigkeit von H scheint zunächst aufgrund der komplizierten Struktur sehr schwierig. Man beachte, dass die grössten Schwierigkeiten von der Funktion $\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}$ ausgehen, die ebenfalls von H abhängt. Die Hoffnung besteht nun darin, erst einmal genügend Informationen über die Abbildung σ_ε zu sammeln, von der wir wissen, dass sie Fix-

punkt der Abbildung Γ_ε[7] ist. Aufgrund des Zusammenhangs von σ_ε und η_ε, der im Beweis von Lemma 6.1 aufgezeigt ist, werden wir dann versuchen, die gesammelten Informationen auf die Abbildung η_ε zu übertragen.
Wir kommen nun zu dem Haupttheorem des ganzen Kapitels.

Satz 6.2 (Der Operator $\mathcal{L}$)
Die Abbildung $\mathcal{L} : \mathcal{H} \to C_p(G, \mathbb{R} \times \mathbb{C})$, mit $\mathcal{L}(H) = \mathcal{F}(H)$ ist ein beschränkter, linearer Operator mit dichtem Bild.

Beweis
Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte. Der erste beschäftigt sich mit der Linearität, in dem zweiten zeigen wir die Beschränktheit von $\mathcal{L}$ und zuletzt charakterisieren wir das Bild.
I.)
Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $H \to \partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}(., H)$ linear ist, wobei σ_ε der Fixpunkt der Graphen Transformation ist.
Wir bemerken, dass die Lösung $\phi_t = \phi_t(\varepsilon, H, u_0)$ von (4.1), wobei u_0 den Anfangswert für $t = 0$ angibt, die *Variation der Konstanten Formel* erfüllt:

$$\phi_t = e^{D\triangle t} u_0 + \int_0^t e^{D\triangle(t-s)}(F(\phi_t) + \varepsilon H(\phi_t))ds. \tag{6.10}$$

Dabei bezeichnet $e^{D\triangle t}u_0$ die Lösung der partiellen Differentialgleichung $\dot{u} = D \triangle u$ zum Anfangswert u_0. Wir leiten nun (6.10) formal nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ ab und erhalten:

$$v(t, H) = \int_0^t e^{D\triangle(t-s)}(F'(\phi_t(0, H, \rho_g u_*))v(t, H) + H(\phi_t(0, H, \rho_g u_*)))ds. \tag{6.11}$$

Dies definiert eine Kontraktion auf einem geeignetem Raum mit eindeutigem Fixpunkt $v(t, H) = \partial_\varepsilon \phi_t^\varepsilon(H, \rho_g u_*)$. [8] Da der Fixpunkt eindeutig ist und die Lösung $\phi_t(0, H, \rho_g u_*)$ für $\varepsilon = 0$ nicht von H abhängt, gilt $v(t, H_1 + H_2) = v(t, H_1) + v(t, H_2)$.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Gleichung (4.5) nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ abzuleiten und nach $\partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}$ aufzulösen. Hängt die andere Seite dann linear von H ab, so auch $\partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}$.
Wir betrachten also folgende Identität:

$$\sigma_\varepsilon(.) = (\Pi^w[\phi_T^\varepsilon(id_{Gu_*} + \sigma_\varepsilon)])(\Pi^g[\phi_T^\varepsilon(. + \sigma_\varepsilon(.))])^{-1}$$

und schreiben dies in der Form

$$\sigma_\varepsilon[(\Pi^g[\phi_T^\varepsilon(. + \sigma_\varepsilon(.))])] = (\Pi^w[\phi_T^\varepsilon(. + \sigma_\varepsilon(.))]). \tag{6.12}$$

[7] siehe Kapitel 3, (4.5)
[8] siehe dazu etwa Henry [2]

Wir leiten die letzte Gleichung nun nach ε bei $\varepsilon = 0$ für eine feste Stelle $\rho_g u_*$ ab. Der Übersicht halber unterdrücken wir aber diese Stelle. Unter Beachtung, dass $\partial_g \sigma_0 = 0$, gilt dann :

$$\partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}(\Pi^g(\phi_T^0(id+\sigma_0))) = (\Pi^w)'[\partial_\varepsilon(\phi_T^\varepsilon) \mid_{\varepsilon=0} (id+\sigma_0) + D\phi_T^0(id+\sigma_0)\partial_\varepsilon\sigma_{\varepsilon=0}]. \tag{6.13}$$

Es sei bemerkt, dass natürlich $\phi_t^0(\rho_g u_*)$ eine rotierende Welle ist. Das T, das in (6.13) auftritt können wir also so setzen, dass $\phi_T^0(\rho_g u_*) = \rho_g u_*$. Man kann dabei das T so gross wählen, dass die Graphen-Transformation weiterhin wohldefiniert bleibt, siehe dazu etwa Jangle [3] .
Dann vereinfacht sich (6.13) zu:

$$\partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}(\rho_g u_*) = (\Pi^w)'(\rho_g u_*)[\partial_\varepsilon(\phi_T^\varepsilon) \mid_{\varepsilon=0} (\rho_g u_*) + D\phi_T^0(\rho_g u_*)\partial_\varepsilon\sigma_{\varepsilon=0}(\rho_g u_*)].$$

für alle $\rho_g u_* \in G u_*$. Man beachte dabei, dass $P^g \mid_{Gu_*} = id$.
Es ergibt sich also

$$[id - (\Pi^w)'(\rho_g u_*)D\phi_T^0(\rho_g u_*)]\partial_\varepsilon\sigma_{\varepsilon=0}(\rho_g u_*) = (\Pi^w)'(\rho_g u_*)[\partial_\varepsilon(\phi_T^\varepsilon) \mid_{\varepsilon=0} (\rho_g u_*)]. \tag{6.14}$$

Die Behauptuntg folgt nun aus dieser Identität, wenn wir zeigen können, das die lineare Abbildung $[id - (\Pi^w)'(\rho_g u_*)D\phi_T^0(\rho_g u_*)]$ invertierbar ist. Denn dann hängt die rechte Seite linear von H ab, da der einzige Term, der von H abhängt $\partial_\varepsilon(\phi_T^\varepsilon) \mid_{\varepsilon=0}$ ist.
Um diese Behauptung zu zeigen, reicht es, dass $1 \notin spec((\Pi^w)'(\rho_g u_*)D\phi_T^0(\rho_g u_*))$ gilt. Zunächst gilt nun $\partial_\varepsilon\sigma_{\varepsilon=0}(\rho_g u_*) \in gW^*$ mit $gW^* := \{\rho_g w | w \in W^*\}$ und W^* definiert wie bei den Bemerkungen zu (4.4). Um dies zu sehen, bemerken wir, dass nach Definition $\sigma_\varepsilon(\rho_g u_*) \in gW^*$ für alle ε nahe bei Null und festem $\rho_g u_* \in G u_*$. Ableiten nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ liefert nun das gewünschte.

Weiterhin gilt, dass $D\phi_T(u_*)$ den Raum W^* invariant lässt, da dieser Eigenraum zu Eigenwerten ist, die im Inneren der komplexen Kugel mit Radius $1-\delta$ und einem geeigneten $0 < \delta < 1$ liegen. Siehe dazu auch unsere Voraussetzungen in Kapitel 2 und Kato[4]. Deswegen bildet auch $D\phi_T(\rho_g u_*)$ den Raum gW^* in sich ab. Aus diesem Grund und der Tatsache, dass $(\Pi^w)'(\rho_g u_*) \mid_{gW^*} = id_{gW_*}$ folgt nun

$$[(\Pi^w)'(\rho_g u_*)D\phi_T^0(\rho_g u_*)]\partial_\varepsilon\sigma_{\varepsilon=0} = [D\phi_T^0(\rho_g u_*)]\partial_\varepsilon\sigma_{\varepsilon=0}.$$

Wir zeigen nun, dass $1 \notin spec(D\phi_T^0(\rho_g u_*) \mid_{gW^*})$. Dies folgt aber aus $D\phi_T(\rho_g u_*) = (\rho_g)^{-1}D\phi_T(u_*)\rho_g$ und den Voraussetzungen an das Spektrum von $D\phi(u_*)_{\frac{2\pi}{\omega_*}} \mid_{W^*}$ in Kapitel 2. Man beachte noch, dass aufgrund der Semigruppeneigenschaft die Identität $D\phi_T(\rho_g u_*) = (D\phi_{\frac{2\pi}{\omega_*}}(\rho_g u_*))^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, da T ein ganzzahliges Vielfaches der Periode ist.

Wir haben damit gezeigt, dass $\partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}$ linear von der Störfunktion H abhängt. Erinnern wir uns nocheinmal an den Zusammenhang von σ_ε und η_ε, der durch folgende Gleichung wiedergespiegelt wird

$$\eta_\varepsilon[\Pi(id_{Gu_*} + \sigma_\varepsilon)] = (id - \Pi)(id_{Gu_*} + \sigma_\varepsilon).$$

Hierbei ist Π die Projektion auf G bezüglich der Koordinaten, in denen M_ε als Graph der Abbildung η_ε dargestellt ist. Differenzieren dieser Identität nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ liefert

$$\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0} = (id - D_u\Pi)[\partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}]. \tag{6.15}$$

Also hängt auch $\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}$ linear von H ab und damit ist $\mathcal{L}$ linear, nach Definition von $\mathcal{L}$. Dies zeigt I).
II.) Die Beschränktheit von $\mathcal{L}$.
Wir zeigen zunächst, dass $H \to \partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}(\rho_g u_*, H)$ stetig ist, als Abbildung von $\mathcal{H}$ nach Y und für festes $\rho_g u_*$. Hat man dies gezeigt, sieht man mittels (6.15), dass dann auch $H \to \partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(\rho_g u_*, H)$ stetig ist. Da (6.11) eine Kontraktion auf $C([0, T_*], Y)$ ist, wobei $0 < T_*$ genügend klein ist, und stetig von der Störfunktion H abhängt, hängt auch der Fixpunkt, also $\partial_\varepsilon \phi_T(H) \mid_{\epsilon=0}$ stetig von H für ein festes T ab. Aufgrund des Zusammenhangs von $\partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}(\rho_g u_*)$ und $\partial_\varepsilon \phi_T(H)$, hängt also $\partial_\varepsilon \sigma_{\varepsilon=0}(\rho_g u_*)$ stetig von H ab. Daraus folgt unmittelbar, dass auch das Vektorfeld $\mathcal{F}$ stetig von H abhängt. Da $\mathcal{F}$ weiterhin in allen Komponenten von g periodisch ist, nimmt $\mathcal{F}$ sein Supremum an, also ist $\mathcal{F} \in C_p := C_p(G, TG)$ und $\mathcal{L}$ ist stetig.
III.) Das Bild von $\mathcal{L}$
Wir machen vorerst eine wichtige Bermerkung

Bemerkung 2
Ist $H : Y \to Y$ so gewählt, dass $H(\rho_g u_*) \in T_{\rho_g u_*} Gu_*$ für alle $\rho_g u_* \in Gu_*$, so ist $\eta_\varepsilon = 0$.

Ist dies nämlich der Fall, so ist H tangential zu Gu_*, d.h. das ganze Vektorfeld von (4.1) ist tangential zu Gu_* und lässt diese Gruppenmannigfaltigkeit somit invariant. Wegen der Eindeutigkeit der flussinvarianten Mannigfaltigkeit gilt daher $M_\varepsilon = Gu_*$, was die Bemerkung zeigt.

Diese Bemerkung verschafft eine grosse Vereinfachung, weil der schwer zu handhabende Term $\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}$ verschwindet und wir in der Lage sind, $\mathcal{F}(H)$ konkret auszurechnen. Wir definieren also vorerst H auf Gu_*: Setze

$$H(\rho_g u_*) := a(g)\rho_g \partial_x u_* + b(g)\rho_g \partial_y u_* + c(g)\rho_g \partial_\phi u_*.$$

Dabei seien a, b, c drei C^{k+2} Funktionen von G nach $\mathbb{R}$, die 1-periodisch in jeder Translationskomponente x, y von g sind. So gewählt gilt $H(\rho_g u_*) \in$

$T_{\rho_g u_*} G u_*$ und $H(\rho_{hg} u_*) = \rho_h H(\rho_g u_*)$ für alle $h \in G_{lat}$. Wir erweitern nun H auf eine Tubenumgebung um Gu_*.

Um dies zu tun, wählen wir ein $\varepsilon_0 > 0$ so dass man jedes $u \in Y$ mit $dist(u, Gu_*) < \varepsilon_0$ eindeutig in der Form $u = \rho_g u_* + v$, mit $v \in gS$ schreiben kann. Wir bedienen uns also der speziellen Koordinaten aus Kapitel 5.

Es sei nun $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion, die ihren Träger in $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ hat, die positiv ist und $\psi(0) = 1$ erfüllt. Wir verzichten darauf, ein konkretes Beispiel einer solch leicht zu konstruierenden Funktion anzugeben. Wir erweitern nun H auf der Tubenumgebung, gegeben durch alle u mit $dist(u, Gu_*) < \varepsilon_0$, durch

$$H(u) = \psi(\| v \|_X)[a(g)\rho_g \partial_x u_* + b(g)\rho_g \partial_y u_* + c(g)\rho_g \partial_\phi u_*]. \tag{6.16}$$

Diese Definition verdient einige Bemerkungen. Zunächst sind die Elemente v und g auf der rechten Seite von (6.16) die eindeutigen Elemente, für die $u = \rho_g u_* + v$ gilt. Für $u = \rho_g u_*$ ist $v = 0$ und da $\psi(0) = 1$ stimmt die Definition mit der alten auf Gu_* überein. Wir erinnern, dass $g = g(u)$ und $v = v(u)$ $(k+1)$ mal differenzierbare Funktionen sind. H ist also C^{k+1} als Funktion von Y nach Y. Wir haben weiterhin die Eigenschaft $H(\rho_h u) = \rho_h H(u)$ für $h \in G_{lat}$.
Desweiteren setzen wir $H(u) = 0$ falls $dist(u, Gu_*) \geq \varepsilon_0$. So definiert ist $H \in \mathcal{H}$, da H zusätzlich noch beschränkt ist. Mittels der Karte $\rho_g u_* \to g$, die Gu_* auf G abbildet, sieht die reduzierte Dynamik auf G wie folgt aus:

$$\dot{\phi} = -\omega_* + \varepsilon c(\phi, z) \tag{6.17}$$

$$\dot{z} = e^{i\phi}\varepsilon(a(\phi, z) + ib(\phi, z)) \tag{6.18}$$

wobei $z = x + iy$, also z die Translationskomponente von G darstellt. Der Term $e^{i\phi}$ in der z-Komponente kommt durch die Basiswahl des Tangentialraumes $T_g G$ zustande, siehe hierzu Kapitel 5.

Der ε-Term ist hier gerade $\mathcal{L}(H)$ für die obige Wahl von H. Da in diesem Fall stets $\mathcal{L}(H) \in C^{k+1}$ ist, sehen wir, dass wir jedes C^{k+1} Vektorfeld $\mathcal{F}$ auf G, dass 1 periodisch in den Translationskomponenten x, y ist, durch geeignete Wahl von H realisieren können. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{L}$ dichtes Bild hat und das Theorem ist gezeigt.

Bemerkungen:
1.) Der Raum $\mathcal{H}$, auf dem $\mathcal{L}$ definiert ist, wurde deswegen ausgewählt, da man auf ihm sinnvoll eine Norm definieren kann und er alle Störfunktionen H aus Abschnitt III) des obigen Beweises enthält. Man kann natürlich $\mathcal{L}$ auf dem Raum aller zulässigen Störfunktionen betrachten, ohne diesen Raum zu

normieren. Allerdings kann man dann nicht von Beschränktheit des Operators reden. Die Linearität und das dichte Bild bleiben natürlich nach wie vor erhalten.

2.)Der Operator $\mathcal{L} : \mathcal{H} \to C_p(G, TG)$ ist sicher nicht injektiv. Dies sieht man am leichtesten an der Definition von $\mathcal{L}$, denn da $H \in \mathcal{H}$, ist $\mathcal{L}(H)$ bereits $k+1$ mal differenzierbar und da $\mathcal{L}$ allein auf der Menge $\mathcal{H}_{sp}$ aller Störfunktionen der Form (6.16) alle C^{k+1} Vektorfelder realisiert, kann $\mathcal{L}$ nicht injektiv sein.

3.)Bezeichne $\| \ . \ \|_{k+1}$ die C^{k+1}-Norm und $C_p^{k+1}(G, \mathbb{R} \times \mathbb{C})$ den Banachraum aller $k+1$ mal stetig differenzierbaren Funktionen von G nach $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$, die 1-periodischen in x, y sind. Wenn man zeigen kann, dass der Operator $\mathcal{L} : (\mathcal{H}, \| \ . \ \|_{k+1}) \to C_p^{k+1}(G, \mathbb{R} \times \mathbb{C})$ stetig ist, dann hat man folgende Aussage. Dieser Operator ist dann nämlich nach Teil III) des Beweises surjektiv. Desweiteren ist $\mathcal{H}_{sp}$ abgeschlossen in $(\mathcal{H}, \| \ . \ \|_{k+1})$. Also ist H_{sp} versehen mit der C^{k+1}-Norm ein Banachraum, auf dem $\mathcal{L}$ injektiv ist. Aufgrund des Satzes der offenen Abbildung ist dieser Operator dann ein stetiger Isomorphismus auf $\mathcal{H}_{sp}$.

4.) Betrachtet man die Menge aller linearen Störfunktionen versehen mit der Operatornorm, so kann man ebenfalls zeigen, dass $\mathcal{L}$ als Operator von dieser Menge nach C_p linear und beschränkt ist. In diesem Fall bleibt die Charakterisierung des Bildes und die Frage nach der Injektivität aber unklar.

5.) Betrachtet man das zu $\mathcal{L}$ assozierte Vektorfeld bezüglich (6.14), (6.15), also

$$\dot{\phi} = c(\phi, z) \tag{6.19}$$

$$\dot{z} = e^{i\phi}(a(\phi, z) + ib(\phi, z)) \tag{6.20}$$

so kann man durch Umskalieren erreichen, dass $\dot{\phi} = 1$, falls etwa $c(\phi, z) \neq 0$ für alle $(\phi, z) \in G$. Interpretiert man nun ϕ als neue Zeit, so erkennt man, dass $\mathcal{L}$ ein Vektorfeld, möglicherweise nichtautonom, auf dem Torus ist.

6.) Stellt man sich die durch (6.14) und (6.15) gegebene Dynamik auf G als Dynamik des 'Tips' der rotierenden Welle und die Störfunktion H als physikalischen Parameter vor, so haben wir gezeigt, dass wir sogar jede Bewegung des 'Tips' der gestörten rotierenden Welle realisieren können und nicht nur zu führender Ordnung in ε. In dem Fall $H \in \mathcal{H}_{sp}$, existieren bei dem nach ε entwickelten, reduziertem Vektorfeld nämlich keine höheren Ordnungsterme als erster Ordnung.

Kapitel 7

Komplizierte Dynamik auf dem Torus

In diesem letzten Kapitel geben wir noch ein interessantes Beispiel eines Flusses auf dem Torus an. Wir bemerken noch einmal, dass das Vektorfeld $\mathcal{L}(H)$, definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(H) =& P''(g_\varepsilon u_*)[\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*), D \triangle g_\varepsilon u_* + F(g_\varepsilon u_*)] \\ &+ P'(g_\varepsilon u_*)(D \triangle \partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*) + F'(g_\varepsilon u_*)\partial_\varepsilon \eta_{\varepsilon=0}(g_\varepsilon u_*) + H(g_\varepsilon u_*))\end{aligned}$$

ein Vektorfeld auf dem Torus darstellt. Dieses Vektorfeld werden wir im folgenden weiterhin mit $\mathcal{F}(H)$ oder kurz mit $\mathcal{F}$ bezeichnen, wenn keine Missverständnisse zu erwarten sind. Für $H \in \mathcal{H}_{sp}$ [1] können wir $\mathcal{F} = \mathcal{F}(H)$ durch

$$\mathcal{F}(\phi, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} c(\phi, z) \\ e^{i\phi}(a(\phi, z) + ib(\phi, z)) \end{pmatrix}$$

direkt angeben. Durch geeignete Wahl der Funktionen a, b, c sowie Umskalierung der Zeit, können wir also jedes autonome C^{k+1}-Vektorfeld auf dem Torus realisieren.

Wir beschreiben nun kurz den Cherryfluss und halten uns dabei an das Buch von Palis, de Melo [7], Seite 182. Betrachten wir die Menge aller C^∞ Vektorfelder $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mathcal{F}(x + l, y + k) = \mathcal{F}(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $(l, k) \in \mathbb{Z}^2$, d.h. $\mathcal{F}$ ist ein Vektorfeld auf dem Torus.

ii) $\mathcal{F}$ ist transversal zu $\{0\} \times \mathbb{R}$ und hat im Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ genau zwei Gleichgewichte, einen Sattel und eine Senke, beide hyperbolisch.

[1] Für $\mathcal{H}_{sp}$ siehe Ende letztes Kapitel

iii) es existieren u, v mit $u < v < u+1$ so dass für $y \in (v, u+1)$ der Vorwärtsorbit durch den Punkt $(0, y)$ die Linie $\{1\} \times \mathbb{R}$ in dem Punkt $(1, f_{\mathcal{F}}(y))$ schneidet und der Vorwärtsorbit durch $(0, y)$ für $y \in (u, v)$ zur Senke geht ohne $\{1\} \times \mathbb{R}$ zu treffen.

iv) Es gilt $f'_{\mathcal{F}}(y) \to \infty$ für $y \to v$ und $f'_{\mathcal{F}}(y) \to \infty$ für $y \to u+1$

Man kann aus diesen Eigenschaften schnell zeigen, dass die ω-Limesmengen der Punkte $(0, u)$ und $(0, v)$ jeweils der Sattel ist.

Ein schönes Beispiel eines solchen Vektorfeldes ist das folgende:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - sinx + \varphi(1 - cosy) \\ -siny \end{pmatrix}$$

Hierbei ist $\varphi \neq 0$ und $0 < \gamma < 1$. Dieses Beispiel bezieht sich nun aber auf das Quadrat $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Indem man das Vektorfeld im Bereich $[2\pi - \delta, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ geeignet abhändert und $0 < \delta < 0,05$ ist, so erhält man sogar noch folgende Eigenschaften:

v)Es gilt $f'_{\mathcal{F}}(y) > 1$ für alle $y \in (v, u+1)$ und die Rotationszahl $\rho(\mathcal{F}_{\mathcal{F}})$ ist irrational.

Um von einer Rotationszahl sprechen zu können, müssen wir natürlich noch $f_{\mathcal{F}}$ auf $[u, v]$ festsetzen. Dazu bemerken wir, dass die instabile Mannigfaltigkeit des Sattels die Linie $\{1\} \times \mathbb{R}$ in einem Punkt $(1, \zeta)$ trifft. Wir definieren $f_{\mathcal{F}}(y) = \zeta$ für $y \in [u, v]$. Dann ist $f_{\mathcal{F}}$ wohldefiniert und stetig.

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 7.1 (Der Cherryflow)
Es existiert ein C^∞ Vektorfeld $\mathcal{G}$ auf dem Torus mit folgenden Eigenschaften.

1.)$\mathcal{G}$ hat genau zwei Gleichgewichte, einen Sattel S und eine Senke P, beide hyberbolisch.

2.)$W^s(P)$ ist dicht in T^2 und die kompakte Menge $\Lambda = T^2 \backslash W^s(P)$ ist transitiv, d.h. es existiert ein $q \in \Lambda \backslash \{S\}$ mit $\omega(q) = \alpha(q) = \Lambda$.

3.) Falls $q \in T^2 \backslash \Lambda$ and $q \neq P$ dann ist $\omega(q) = P$ und $\alpha(q) \in \Lambda$.

4.) Es existiert ein Kreis Γ transversal zu $\mathcal{G}$, so dass der Schnitt von Γ und Λ eine Cantormenge ist.

Den Beweis hierzu findet man in dem oben genannten Buch von Palis. Stellt man sich nun, etwa für $H \in \mathcal{H}_{sp}$, die reduzierte Dynamik auf G als die Dynamik des Tips der gestörten rotierenden Welle vor und bezeichnet diese mit $T(t)$, wobei uns nur die translative Bewegung interessiert und wir die Rotation ignorieren, so ist $T(t)$ ein Fluss auf dem Torus. Das vorige Lemma, sagt uns, dass es für den Cherryfluss ein $q \in \Lambda \cap \Gamma$ gibt, so dass $\omega(q) = \Lambda$. Ist $T(t)$ also der Cherryfluss, so bedeutet dies insbesondere für $T(0) = q$, dass wir die Linie $\{1\} \times \mathbb{R}$ für $t \to \infty$ unendlich oft schneiden.

Desweiteren finden wir ein p beliebig nahe an q, so dass $T_*(t)$ mit $T_*(0) = p$ in die Senke läuft, also $T_*(t) \to P$ für $t \to \infty$. Beachten wir noch, dass wir jeden C^{k+1} Fluss auf dem Torus erzeugen können, so haben wir folgendes interessante Korollar:

Korollar 7.1
Es existiert eine Störfunktion $H \in \mathcal{H}_{sp}$, so dass folgendes gilt:
Für die gestörte rotierende Welle existieren Tippositionen, die beliebig nah beinander sind, so dass sich die eine Tipposition schliesslich an einem Punkt festpinnt, während der Orbit der anderen Tipposition für $t \to \infty$ in keiner beschränkten Menge liegt.

Literaturverzeichnis

[1] B. Fiedler, B. Sandstede, A. Scheel, C. Wulff, *Bifurcation from relative equilibria of noncompact group actions: Skew products, meanders, and drifts*, Doc.Math.J.DMV, 1996

[2] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Math., Vol. 840 Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1981.

[3] N. Jangle, *Spiralwellen in Reaktions- und Diffusionssystemen: Existenz und Persistenz von Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Diplomarbeit, 2003.

[4] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1966

[5] V. Leblanc, *Rotational Symmetrie-Breaking for Spiral Waves*, 2001

[6] B. Sandstede, A. Scheel and C. Wulff, *Dynamics of Spiral Waves on using Center-Manifold Reductions*, J.Diff. Eq.**141** (1997)

[7] J. Palis, W. de Melo *Geometric Theory of Dynamical Systems* , Springer, 1982

[8] A. Pazy, *Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1983.

[9] C. Wulff, *Theory of Meandering and Drifting Spiral Waves in Reaction Diffusion Systems*, Doktorarbeit, FU-Berlin, 1996.