Министерство образования Российской Федерации

Московский авиационный институт
(государственный технический университет)

На правах рукописи

Гуревич Павел Леонидович

Разрешимость и асимптотика решений нелокальных эллиптических краевых задач

Специальность 01.01.02 — “Дифференциальные уравнения”

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор Скубачевский А.Л.

Москва — 2002

Оглавление

Введение

1. В диссертации изучаются нелокальные эллиптические задачи в двугранных и плоских углах, а также в плоских ограниченных областях.

В настоящее время особый интерес к нелокальным задачам обусловлен, с одной стороны, значительными теоретическими достижениями в данном направлении и, с другой стороны, важными приложениями, возникающими в таких областях, как: теория плазмы [3, 28], биофизика, теория диффузионных процессов [41, 42], теория многослойных пластин и оболочек [25, 52].

В одномерном случае нелокальные задачи изучали еще A. Sommerfeld [54], Я.Д. Тамаркин [35], M. Picone [50], A.M. Krall [49] и др. В двумерном случае, по-видимому, одна из первых работ, посвященных нелокальным задачам, принадлежит T. Carleman [40]. В работе [40] ищется гармоническая в области G функция, удовлетворяющая следующему нелокальному условию на границе Υ области: значение неизвестной функции в точке $y \in \Upsilon$ связано со значением в точке $\omega(y)$, где $\omega : \Upsilon \to \Upsilon$ — преобразование границы, удовлетворяющее требованию $\omega\big(\omega(y)\big) \equiv y,\ y \in \Upsilon$. С такой постановкой задачи связаны дальнейшие исследования нелокальных эллиптических задач со сдвигами, отображающими границу области на себя, и абстрактных эллиптических задач [5, 38, 39].

В 1969 году А.В. Бицадзе и А.А. Самарский [3] рассмотрели возникающую в теории плазмы нелокальную задачу следующего вида: ищется гармоническая в прямоугольнике $G = \{y \in \mathbb{R}^2 : -1 < y_1 < 1,\ 0 < y_2 < 1\}$ и непрерывная в $\bar{G}$ функция $u(y_1,\ y_2)$, удовлетворяющая условиям

$$u(y_1,\ 0) = g_1(y_1),\ u(y_1,\ 1) = g_2(y_1),\ -1 < y_1 < 1,$$
$$u(-1,\ y_2) = g_3(y_2),\ u(1,\ y_2) = u(0,\ y_2),\ 0 < y_2 < 1,$$

где $g_1,\ g_2,\ g_3$ — заданные непрерывные функции. Данная задача решена в работе [3] сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и применением принципа максимума. В случае произвольной области и общих нелокальных условий такая задача была сформулирована как нерешенная (см. также [28, 49]). Различные варианты и обобщения нелокальных задач, которые содержат преобразования переменных, отображающие границу внутрь замыкания области, рассматривали Н.В. Житарашу и С.Д. Эйдельман [11], Я.А. Ройтберг и З.Г. Шефтель [27], А.В. Бицадзе [2], В.А. Ильин и Е.И. Моисеев [13], К.Ю. Кишкис [14], А.К. Гущин и В.П. Михайлов [9, 10] и др.; при этом особое внимание уделялось разрешимости соответствующих нелокальных эллиптических задач. Спектральные свойства нелокальных задач исследовались, в частности, В.А. Ильиным [12], Е.И. Моисеевым [22, 23], А.А. Шкаликовым [37]. Отметим, что в данных работах изучается либо одномерный или двумерный случай, либо уравнения второго порядка, либо накладываются достаточно жесткие условия на геометрию носителя нелокальных членов.

Основы общей теории для эллиптических уравнений порядка $2m$ с нелокальными краевыми условиями общего вида были заложены в работах А.Л. Скубачевского и его учеников [29, 30, 31, 32, 33, 51, 52, 26, 15]: приведена классификация по типу нелокальных условий, доказаны априорные оценки и построен правый регуляризатор в соответствующих пространствах, для определенных классов нелокальных задач изучены спектральные свойства и свойства индексов соответствующих операторов. Наиболее сложной оказывается ситуация, когда носитель нелокальных членов имеет непустое пересечение с границей области — именно такие задачи рассматриваются в диссертации. В этом случае обобщенное решение нелокальной задачи может иметь степенные особенности вблизи некоторых точек даже при бесконечно гладкой границе области и бесконечно дифференцируемой правой части [30, 53]. Поэтому для изучения такого рода задач применяются специальные весовые пространства, введенные В.А. Кондратьевым при исследовании краевых задач в областях с угловыми или коническими точками [16], а также их обобщения на случай областей с ребрами [21, 24].

2. Новизна результатов. Нелокальные эллиптические краевые задачи в двугранных углах и соответствующие им задачи с параметром в плоских углах ранее исследовались А.Л. Скубачевским [32]. Такие задачи возникают в качестве модельных при изучении нелокальных задач в n-мерных ($n \geq 3$) ограниченных областях [33]. В работе [32] с помощью априорных оценок и построения правого регуляризатора получены достаточные условия фредгольмовой и однозначной разрешимости указанных модельных задач. При этом для построения правого регуляризатора приходится накладывать ограничения как на нелокальную задачу, так и на соответствующую ей “локальную” задачу. В диссертации впервые получены необходимые и достаточные условия фредгольмовой и однозначной разрешимости модельных задач в углах; эти условия уже не содержат дополнительных ограничений на “локальную” задачу. Для этого, как и в работе [32], используются априорные оценки решений, позволяющие доказать конечномерность ядра и замкнутость образа нелокального оператора. Однако, вместо построения правого регуляризатора, применяется другой подход: выводится формула Грина, порождающая задачу, формально сопряженную к исходной нелокальной задаче. Формально сопряженная задача представляет собой систему эллиптических уравнений в двугранных углах Ξ_{jt} ($\bigcup\limits_{t=1}^{R_j} \Xi_{jt} = \Xi_j$, где Ξ_j, $j = 1, \dots, N$, — система исходных углов) с нелокальными условиями сопряжения, связывающими скачки неизвестной функции и ее производных на сторонах углов Ξ_{jt} со значениями неизвестной функции и ее производных на сторонах исходных углов Ξ_j. Такую задачу мы называем *нелокальной задачей трансмиссии*. Ранее нелокальные задачи трансмиссии изучались либо в одномерном случае [13], либо в многомерном, но лишь при условии, что многообразия, на которых задаются условия сопряжения, лежат строго внутри области и попарно не пересекаются [27]; при этом решения рассматривались в пространствах Соболева без веса. В диссертации получены априорные оценки решений нелокальной задачи трансмиссии в весовых пространствах, гарантирующие конечномерность ядра соответствующего оператора. Далее при помощи формулы Грина установлена связь между ядрами оператора, сопряженного к оператору нелокальной краевой задачи (и действующего в пространствах распределений), и оператора нелокальной задачи трансмиссии. Таким образом доказана конечномерность коядра исходной нелокальной краевой задачи. Данные результаты получены в гл. 1.

Как отмечалось выше, гладкость обобщенных решений нелокальных эллиптических задач может нарушаться вблизи некоторого множества точек на границе области даже при бесконечно гладкой границе области и бесконечно дифференцируемой правой части [30, 53]. При этом за счет наличия нелокальных членов особенности могут “переноситься” в другие точки границы и даже внутрь области, образуя некоторое множество $\mathcal{K}$. Таким образом, встает вопрос об асимптотике решений вблизи множества $\mathcal{K}$. В работе А.Л. Скубачевского [30] получены асимптотические формулы для решений нелокальных задач в плоских областях для случая, когда преобразования переменных не содержат растяжения (сжатия) аргумента вблизи точек множества $\mathcal{K}$. В диссертации выводится аналогичная асимптотика решений для случая произвольных линейных вблизи $\mathcal{K}$ преобразований переменных. Кроме того, впервые получены явные формулы для коэффициентов асимптотики. Коэффициенты вычисляются как в терминах сопряженных нелокальных операторов, так и в терминах собственных и присоединенных векторов нелокальных задач трансмиссии, изученных в гл. 1. Отметим, что полученная асимптотика формально "похожа" на асимптотику решений "локальных" задач (см. [20, 24]) и определяется собственными числами, а также собственными и присоединенными векторами соответствующей модельной задачи с параметром. Однако, за счет наличия нелокальных членов возникают следующие принципиальные особенности: во-первых, изменяется расположение на комплексной плоскости собственных чисел модельных задач с параметром; во-вторых, при вычислении коэффициентов возникают нелокальные задачи трансмиссии, не характерные для случая "локальных" краевых задач; в-третьих, оказывается, что асимптотика решения и значения коэффициентов вблизи некоторой точки множества $\mathcal{K}$ зависят не только от данных задачи в окрестности данной точки, но и от данных вблизи других точек множества $\mathcal{K}$, связанных с данной посредством преобразований переменных в нелокальных членах. Именно этими особенностями объясняется упомянутое выше нарушение гладкости решений нелокальных эллиптических задач. Исследованию асимптотики решений посвящены гл. 2 и 3.

Кроме того, в гл. 3 впервые получена формула индекса операторов, соответствующих одной и той же нелокальной задаче, но действующих в пространствах с разными показателями веса.

Отметим, что все результаты диссертации являются новыми не только для случая эллиптических операторов порядка $2m$, но даже для эллиптических операторов второго порядка.

3. Диссертация состоит из введения и трех глав.

В гл. 1 изучается фредгольмова и однозначная разрешимость нелокальных эллиптических задач в двугранных и плоских углах.

В § 1.1 рассматривается постановка нелокальных краевых задач в двугранных и плоских углах, определяются соответствующие весовые пространства и для них доказывается ряд свойств.

В § 1.2 приведены результаты А.Л. Скубачевского о разрешимости нелокальных краевых задач в плоских углах. Эти результаты используются в § 1.3.

§ 1.3 посвящен доказательству априорных оценок решений модельных нелокальных краевых задач с параметром θ в плоских углах. Априорные оценки решений равносильны конечномерности ядра и замкнутости образа соответствующего модельного оператора. Для доказательства конечномерности коядра нелокального оператора выводится формула Грина и изучаются формально сопряженные относительно формулы Грина задачи (§§ 1.4–1.9).

В § 1.4 выводятся формулы Грина для нелокальных задач в двугранных углах, плоских углах и на дугах. Формулы Грина порождают формально сопряженные задачи — *нелокальные задачи трансмиссии* — в двугранных углах, плоских углах и на дугах соответственно.

В § 1.5 рассматриваются соответствующие постановки нелокальных задач трансмиссии, доказываются леммы, позволяющие далее ограничиться изучением задач с однородными краевыми условиями и однородными нелокальными условиями сопряжения.

В § 1.6 изучается модельная нелокальная задача трансмиссии с параметром λ, доказывается дискретность спектра соответствующего ей оператора. Кроме того, исследуется однозначная разрешимость вспомогательной нелокальной задачи трансмиссии в плоском угле, которая, как и в случае нелокальных краевых задач, существенным образом зависит от расположения собственных чисел упомянутой модельной задачи с параметром λ. Эти результаты используются в § 1.7.

§ 1.7 посвящен доказательству априорных оценок решений модельных нелокальных задач трансмиссии с параметром θ в плоских углах. Априорные оценки решений (аналогичные оценкам решений нелокальных краевых задач, см. § 1.3) равносильны конечномерности ядра и замкнутости образа соответствующего модельного оператора нелокальной задачи трансмиссии.

В § 1.8 доказываются априорные оценки одной вспомогательной задачи в $\mathbb{R}^n$, которые используются в § 1.9 при исследовании оператора, сопряженного к оператору исходной нелокальной краевой задачи.

В § 1.9 изучается оператор, сопряженный к оператору нелокальной краевой задачи, и устанавливается связь между его ядром и ядром оператора, соответствующего нелокальной задаче трансмиссии, порожденной формулой Грина.

Основные результаты гл. 1 собраны в § 1.10. Здесь при помощи теорем из §§ 1.3, 1.7 и 1.9 устанавливаются необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости нелокальных краевых задач с параметром θ в плоских углах и однозначной разрешимости нелокальных краевых задач в двугранных углах.

В § 1.11 (в качестве примера использования общих результатов гл. 1) доказывается однозначная разрешимость нелокальных задач для уравнения Пуассона в двугранных углах. При этом для доказательства тривиальности ядер операторов, соответствующих нелокальной краевой задаче и нелокальной задаче трансмиссии, указанные задачи сводятся к краевым задачам для дифференциально–разностных уравнений [30, 31, 52]. Отметим, что, в отличие от работ [30, 31, 52], возникающие здесь уравнения содержат отклонения не по декартовым координатам, а по полярному углу.

В гл. 2 изучается асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах и “локальных” задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

В § 2.1 выводится асимптотическая формула для решения нелокальной задачи в угле с неизвестными пока коэффициентами.

В § 2.2 получены вспомогательные результаты о гладкости решений нелокальных задач с параметром λ. Эти результаты используются для доказательства гладкости собственных и присоединенных векторов нелокальных задач с параметром λ.

В § 2.3 изучаются сопряженные нелокальные операторы и их спектральные свойства. Результаты § 2.3 используются в § 2.4 при вычислении коэффициентов в асимптотике решения.

В § 2.4 получены явные формулы для коэффициентов в асимптотике решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах. Коэффициенты вычисляются в терминах собственных и присоединенных векторов как сопряженных нелокальных операторов, так и формально сопряженных относительно формулы Грина задач — нелокальных задач трансмиссии (см. гл. 1).

§ 2.5 посвящен выводу асимптотических формул (и вычислению коэффициентов в них) для решений “локальных” эллиптических задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Результаты § 2.5, так же как и результаты §§ 2.1, 2.4, будут использованы при изучении асимптотики решений нелокальных задач в плоских ограниченных областях (см. гл. 3).

В гл. 3 изучается асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских ограниченных областях.

В § 3.1 рассматривается постановка нелокальных краевых задач в плоских ограниченных областях; определяются допустимые преобразования переменных в нелокальных членах. Принципиальным (как и в работах [30, 33]) здесь является следующее условие: если носитель Υ нелокальных членов имеет непустое пересечение с точкой сопряжения нелокальных условий, то кривая Υ должна пересекаться в данной точке с границей области под ненулевым углом. Это соответствует тому, что в модельных задачах (см. гл. 1, 2) нелокальные преобразования переменных отображают стороны плоского угла K_j в лучи, лежащие *строго внутри* некоторого угла K_k (углы $K_1, \ldots, K_N$ соответствуют орбите данной точки сопряжения).

В § 3.2 при помощи результатов §§ 2.1 и 2.5 гл. 2, а также работы [24], выводятся асимптотические формулы с неизвестными пока коэффициентами для решений нелокальной задачи в плоской области вблизи множества $\mathcal{K}$, состоящего из орбит точек сопряжения нелокальных краевых условий.

В § 3.3 выводится формула для индексов операторов, соответствующих одной и той же нелокальной краевой задаче, но действующих в пространствах с разными показателями веса. Для этого применяется асимптотика решения, полученная в § 3.2.

В § 3.4 при помощи результатов §§ 2.3 и 2.5 гл. 2, а также работы [24], выводятся асимптотические формулы для решений задачи, соответствующей сопряженному нелокальному оператору, действующему в пространствах распределений.

Результаты § 3.4 позволяют в § 3.5 вывести формулы для вычисления коэффициентов в асимптотике решений нелокальной краевой задачи в плоской ограниченной области. Указанные коэффициенты вычисляются в терминах собственных и присоединенных векторов сопряженных нелокальных операторов.

4. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [7, 8, 45, 43, 46, 44, 47, 48].

Результаты диссертационной работы докладывались на семинаре в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН под руководством академика РАН С.М. Никольского и чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцева; на семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ под руководством чл.-корр. РАН Е.И. Моисеева; на семинарах механико–математического факультета МГУ: на семинаре под руководством М.С. Аграновича и М.И. Вишика, на семинаре под руководством В.А. Кондратьева и на семинаре под руководством А.А. Шкаликова; на семинаре в Московском авиационном институте под руководством Г.А. Каменского и А.Л. Скубачевского.

Результаты диссертационной работы докладывались также на международных конференциях: “Differential Equations and Related Topics”, посвященной 100-летию И.Г.Петровского, МГУ, Москва, 2001;

“Differential and Functional Differential Equations”, Москва, 2002; “Functional Differential Equations and Applications”, университет им. Бен Гуриона, Беер Шева, Израиль, 2002; Крымских осенних математических школах–симпозиумах, Симферополь, 2000, 2001.

Глава 1

Нелокальные эллиптические задачи в двугранных и плоских углах. Формула Грина

В данной главе изучается однозначная и фредгольмова разрешимость нелокальных эллиптических задач в двугранных и плоских углах (такие задачи возникают в качестве модельных при исследовании нелокальных задач в ограниченных областях — см. [30, 33], а также гл. 3 данной диссертации). С этой целью доказываются априорные оценки решений и изучаются сопряженные задачи (так называемые "нелокальные задачи трансмиссии"), для получения которых выводится формула Грина. В гл. 2 формула Грина будет также использована для вычисления коэффициентов в асимптотике решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах.

1.1 Нелокальные эллиптические краевые задачи. Сведение к задачам с однородными нелокальными условиями

1. Рассмотрим N двугранных углов

$$\Xi_j = \{x = (y,\ z):\ r > 0,\ b_{j1} < \omega < b_{j,R_j+1},\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$$
$$(j = 1,\ \ldots,\ N;\ R_j \geq 1 \text{ — целое})$$

с общим ребром

$$M = \{x = (y,\ z):\ y = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\};$$

пусть $\bar{\Xi}_j = \bigcup\limits_{t=1}^{R_j} \bar{\Xi}_{jt}$, где

$$\Xi_{jt} = \{x = (y,\ z):\ r > 0,\ b_{jt} < \omega < b_{j,t+1},\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}\ (t = 1,\ \ldots,\ R_j);$$

стороны двугранных углов Ξ_{jt} будем обозначать через Γ_{jq}:

$$\Gamma_{jq} = \{x = (y,\ z):\ r > 0,\ \omega = b_{jq},\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}\ (q = 1,\ \ldots,\ R_j + 1).$$

Здесь $x = (y,\ z) \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^2,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}$; $(\omega,\ r)$ — полярные координаты точки y; $-\pi < b_{j1} < \cdots < b_{j,R_j+1} < \pi$.

Обозначим через $\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)$ и $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ D_z)$ однородные дифференциальные операторы с постоянными комплексными коэффициентами порядков $2m$, $m_{j\sigma\mu}$ и $m_{j\sigma\mu}$ соответственно ($m_{j\sigma\mu} \le 2m-1$; $j,\ k = 1,\ \ldots,\ N$; $\sigma = 1,\ R_j + 1$; $\mu = 1,\ \ldots,\ m$; $q = 2,\ \ldots,\ R_j$ $s = 1,\ \ldots,\ S_{j\sigma kq}$).

Будем предполагать выполненными следующие условия [19, гл. 2, §§ 1.2, 1.4].

Условие 1.1. *Для всех $j = 1,\ \ldots,\ N$ операторы $\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z)$ собственно эллиптические.*

Условие 1.2. *Для всех $j = 1,\ \ldots,\ N$; $\sigma = 1,\ R_j+1$ система операторов $\{B_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\}_{\mu=1}^m$ нормальная и накрывает оператор $\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z)$ на $\Gamma_{j\sigma}$.*

На операторы $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ D_z)$ (играющие в дальнейшем роль нелокальных) никаких условий, кроме ограничения на порядок, не накладывается.

Рассмотрим N уравнений относительно функций $\mathcal{U}_1,\ \ldots,\ \mathcal{U}_N$

$$\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_j = f_j(x) \quad (x \in \Xi_j) \tag{1.1}$$

с нелокальными условиями

$$\begin{gathered} \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{U} \equiv B_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j\sigma}} + \\ + \sum_{k,q,s} (B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y,\ z)|_{\Gamma_{j\sigma}} = g_{j\sigma\mu}(x) \quad (x \in \Gamma_{j\sigma}) \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$(j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m).$$

Здесь и ниже суммирование в формуле для $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)$ проводится по $k = 1,\ \ldots,\ N$; $q = 2,\ \ldots,\ R_k$; $s = 1,\ \ldots,\ S_{j\sigma kq}$; $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1,\ \ldots,\ \mathcal{U}_N)$; запись $(B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y,\ z)$ означает, что выражение $(B_{j\sigma\mu kqs}(D_{y'},\ D_{z'})\mathcal{U}_k)(x')$ вычисляется для $x' = (\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y,\ z)$; $\mathcal{G}_{j\sigma kqs}$

— оператор поворота на угол $\omega_{j\sigma kq}$ и растяжения в $\beta_{j\sigma kqs}$ раз в плоскости $\{y\}$ так, что $b_{k1} < b_{j\sigma} + \omega_{j\sigma kq} = b_{kq} < b_{k,R_k+1}$, $0 < \beta_{j\sigma kqs}$.

Для всякого множества $X \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ будем обозначать через $C_0^\infty(X)$ множество бесконечно дифференцируемых в $\bar{X}$ функций с компактными носителями, содержащимися в X.

Введем пространство $H_a^l(\Xi')$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar{\Xi}' \setminus M)$ по норме

$$\|w\|_{H_a^l(\Xi')} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int\limits_{\Xi'} r^{2(a-l+|\alpha|)} |D_x^\alpha w(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $\Xi' = \{x = (y,\ z):\ r > 0,\ b_1 < \omega < b_2,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ $(-\pi < b_1 < b_2 < \pi)$; $a \in \mathbb{R}$, $l \geq 0$ целое. Обозначим через $H_a^{l-1/2}(\Gamma')$ (для $l \geq 1$) пространство следов на $(n-1)$-мерной полуплоскости $\Gamma' = \{x = (y,\ z):\ r > 0,\ \omega = b,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ $(b_1 \leq b \leq b_2)$, лежащей в $\bar{\Xi}'$, с нормой

$$\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma')} = \inf \|w\|_{H_a^l(\Xi')} \quad (w \in H_a^l(\Xi'):\ w|_{\Gamma'} = \psi).$$

Введем пространства вектор–функций

$$H_a^{l+2m,\,N}(\Xi) = \prod_{j=1}^N H_a^{l+2m}(\Xi_j),\ H_a^{l,\,N}(\Xi,\ \Gamma) = \prod_{j=1}^N H_a^l(\Xi_j,\ \Gamma_j),$$

$$H_a^l(\Xi_j,\ \Gamma_j) = H_a^l(\Xi_j) \times \prod_{\sigma=1,\,R_j+1} \prod_{\mu=1}^m H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}).$$

Мы будем изучать решения $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1,\ \ldots,\ \mathcal{U}_N) \in H_a^{l+2m,\,N}(\Xi)$ задачи (1.1), (1.2) при условии, что $f = \{f_j,\ g_{j\sigma\mu}\} \in H_a^{l,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$. Введем ограниченный оператор, соответствующий задаче (1.1), (1.2),

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z),\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\} : H_a^{l+2m,\,N}(\Xi) \to H_a^{l,\,N}(\Xi,\ \Gamma).$$

Лемма 1.1. *Для любых* $g_{j\sigma\mu} \in H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})$ $(j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j+1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m)$ *существует вектор–функция* $\mathcal{U} \in H_a^{l+2m,\,N}(\Xi)$, *такая, что*

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{U} = g_{j\sigma\mu}(x) \qquad (x \in \Gamma_{j\sigma}),$$

$$\|\mathcal{U}\|_{H_a^{l+2m,\,N}(\Xi)} \leq c \sum_{j,\,\sigma,\,\mu} \|g_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})},$$

где $c > 0$ *не зависит от* $g_{j\sigma\mu}$.

Лемма 1.1 доказана в [32, § 1].

Для целых $l \geq 0$ будем обозначать через $W^l(G) = W_2^l(G)$ пространство Соболева с нормой $\|u\|_{W^l(G)} = \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq l} \int\limits_G |D^\alpha u|^2\,dx\right)^{1/2}$ (при $l = 0$ полагаем $W^0(G) = L_2(G)$) где $G \subset \mathbb{R}^n$ — область с Липшицевой границей. Через $W^{l-1/2}(\Upsilon)$ (для $l \geq 1$) обозначим пространство следов на $(n-1)$-мерном гладком многообразии $\Upsilon \subset \bar{G}$. Далее нам потребуются некоторые интерполяционные неравенства в пространствах Соболева и в весовых пространствах.

Лемма 1.2. *Пусть G — ограниченная область; тогда для любого $w \in W^l(G)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$|\lambda|^{l-s}\,\|w\|_{W^s(G)} \leq c_{ls}(\|w\|_{W^l(G)} + |\lambda|^l\,\|w\|_{L_2(G)}). \tag{1.3}$$

Здесь $0 < s < l$; $c_{ls} > 0$ не зависит от w, λ.

Лемма 1.3. *Пусть G — ограниченная область; тогда для любого $w \in W^1(G)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$|\lambda|^{1/2}\,\|w|_{\partial G}\|_{L_2(\partial G)} \leq c(\|w\|_{W^1(G)} + |\lambda|\,\|w\|_{L_2(G)}). \tag{1.4}$$

Здесь $c > 0$ не зависит от w, λ.

Леммы 1.2 и 1.3 доказаны в [1, гл. 1, § 1]. Используя лемму 1.2 и свойства весовых пространств, можно получить следующий результат (см. [30, § 1]).

Лемма 1.4. *Для любого $w \in H_a^l(\Xi')$ и $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$|\lambda|^s\,\|w\|_{H_{a-s}^{l-s}(\Xi')} \leq c_{ls}(\|w\|_{H_a^l(\Xi')} + |\lambda|^l\,\|w\|_{H_{a-l}^0(\Xi')}). \tag{1.5}$$

Здесь $0 < s < l$; $c_{ls} > 0$ не зависит от w, λ.

2. Теперь рассмотрим отдельно случай пространства $\mathbb{R}^2$. Положим $K' = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ b_1 < \omega < b_2\}$ $(-\pi < b_1 < b_2 < \pi)$. Аналогично предыдущему вводятся пространства $H_a^l(K')$ и $H_a^{l-1/2}(\gamma')$, где $\gamma' = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ \omega = b\}$ $(b_1 \leq b \leq b_2)$ — луч, лежащий в $\bar{K}'$.

Введем пространство $E_a^l(K')$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar{K}' \setminus \{0\})$ по норме

$$\|w\|_{E_a^l(K')} = \left(\sum_{|\alpha|\leq l} \int\limits_{K'} r^{2a}(r^{2(|\alpha|-l)} + 1)|D_y^\alpha w(y)|^2 dy\right)^{1/2}.$$

Через $E_a^{l-1/2}(\gamma')$ (для $l \ge 1$) обозначим пространство следов на луче $\gamma' \subset \bar{K}'$ с нормой

$$\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')} = \inf \|w\|_{E_a^l(K')} \quad (w \in E_a^l(K') : \ w|_{\gamma'} = \psi).$$

Конструктивные определения пространств $H_a^{l-1/2}(\Gamma')$ и $E_a^{l-1/2}(\gamma')$, эквивалентные данным выше, можно найти в [21, § 1].

Введем пространства вектор–функций

$$E_a^{l+2m,\,N}(K) = \prod_{j=1}^{N} E_a^{l+2m}(K_j), \ E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma) = \prod_{j=1}^{N} E_a^l(K_j,\ \gamma_j),$$

$$E_a^l(K_j,\ \gamma_j) = E_a^l(K_j) \times \prod_{\sigma=1,\,R_j+1} \prod_{\mu=1}^{m} E_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}),$$

где $K_j = \{y : \ r > 0,\ b_{j1} < \omega < b_{j,R_j+1}\}$, $\gamma_{j\sigma} = \{y : \ r > 0,\ \omega = b_{j\sigma}\}$.

Рассмотрим вспомогательную задачу для $u = (u_1,\ \ldots,\ u_N) \in E_a^{l+2m,\,N}(K)$

$$\mathcal{P}_j(D_y,\ \theta)u_j = f_j(y) \quad (y \in K_j), \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)u \equiv B_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)u_j|_{\gamma_{j\sigma}} + \sum_{k,q,s} (B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ \theta)u_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y)|_{\gamma_{j\sigma}} = \\ = g_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j\sigma}) \\ (j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j+1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m), \end{gathered} \tag{1.7}$$

где θ — произвольная точка на единичной сфере $S^{n-3} = \{z \in \mathbb{R}^{n-2} : |z| = 1\}$, $f = \{f_j,\ g_{j\sigma\mu}\} \in E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$.

Введем ограниченный оператор, соответствующий задаче (1.6), (1.7),

$$\mathcal{L}(\theta) = \{\mathcal{P}_j(D_y,\ \theta),\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)\} : E_a^{l+2m,\,N}(K) \to E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma).$$

Лемма 1.5. *Для любых* $g_{j\sigma\mu} \in E_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ $(j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j+1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m)$ *и* $\theta \in S^{n-3}$ *существует вектор–функция* $u \in E_a^{l+2m,\,N}(K)$, *такая, что*

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)u = g_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j\sigma}),$$

$$\|u\|_{E_a^{l+2m,\,N}(K)} \le c \sum_{j,\,\sigma,\,\mu} \|g_{j\sigma\mu}\|_{E_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})},$$

где $c > 0$ *не зависит от* $g_{j\sigma\mu},\ \theta$.

Лемма 1.5 доказана в [32, § 1].

3. В заключение данного параграфа установим несколько свойств весовых пространств, которые потребуются нам ниже. Наша цель — доказать следующие две теоремы.

Теорема 1.1. *Для всех* $\Psi \in H_a^{l-1/2}(\Gamma')$

$$\left(\int\limits_{\Gamma'} r^{2(a-(l-1/2))}|\Psi|^2\,d\Gamma'\right)^{1/2} \le c\|\Psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma')},$$

где $c > 0$ *не зависит от* Ψ.

Теорема 1.2. *Для всех* $\psi \in E_a^{l-1/2}(\gamma')$

$$\left(\int\limits_{\gamma'} r^{2(a-(l-1/2))}|\psi|^2\,d\gamma'\right)^{1/2} \le c\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')},$$

где $c > 0$ *не зависит от* ψ.

Вначале сформулируем две леммы [24, гл. 6, § 1.3].

Лемма 1.6. *Норма* $\|\mathcal{U}\|_{H_a^l(\Xi')}$ *эквивалентна норме*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\eta|^{2(l-a)-2}\|w(\cdot,\ \eta)\|^2_{E_a^l(K')}\,d\eta\right)^{1/2},$$

где $w(y,\ \eta) = \hat{\mathcal{U}}(|\eta|^{-1}y,\ \eta)$, $\hat{\mathcal{U}}(y,\ \eta)$ *есть преобразование Фурье функции* $\mathcal{U}(y,\ z)$ *по переменной* z.

Лемма 1.7. *Норма* $\|u\|_{E_a^l(K')}$ *эквивалентна норме*

$$\left(\sum_{k=0}^{l}\int\limits_0^\infty r^{2(a-(l-1/2))}\sum_{j=0}^{l-k}(1+r)^{2(l-k-j)}\|(rD_r)^k u(\cdot,\ r)\|^2_{W^j(b_1,\ b_2)}\,dr\right)^{1/2},$$

$u(\omega,\ r)$ *есть функция* $u(y)$, *записанная в полярных координатах.*

Докажем теорему 1.2. Рассмотрим функцию $u \in E_a^l(K')$, такую, что $u|_{\gamma'} = \psi$, $\|u\|_{E_a^l(K')} \le 2\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')}$. Поскольку $u(\omega,\ r)|_{\omega=b} = \psi(r)$ и оператор взятия следа в пространствах Соболева ограничен, имеем $|\psi(r)|^2 \le k_1\|u(\cdot,\ r)\|^2_{W^l(b_1,\ b_2)}$. Следовательно, в силу леммы 1.7, получим

$$\int\limits_{\gamma'} r^{2(a-(l-1/2))}|\psi|^2\,d\gamma' \le k_1\int\limits_0^\infty r^{2(a-(l-1/2))}\|u(\cdot,\ r)\|^2_{W^l(b_1,\ b_2)}\,dr \le k_2\|u\|^2_{E_a^l(K')}. \tag{1.8}$$

Теперь теорема 1.2 следует из (1.8) и неравенства $\|u\|_{E_a^l(K')} \le 2\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')}$.

Докажем теорему 1.1. Рассмотрим функцию $\mathcal{U} \in H_a^l(\Xi')$, такую, что $\mathcal{U}|_{\Gamma'} = \Psi$, $\|\mathcal{U}\|_{H_a^l(\Xi')} \le 2\|\Psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma')}$. Используя преобразование Фурье по переменной z и равенство Парсеваля, получим

$$\int\limits_{\Gamma'} r^{2(a-(l-1/2))}|\Psi|^2\,d\Gamma' = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}}\int\limits_{\mathbb{R}^1} r^{2(a-(l-1/2))}|\hat\Psi(r,\ \eta)|^2\,drd\eta,$$

где $\hat\Psi(r,\ \eta)$ есть преобразование Фурье функции $\Psi(r,\ z)$ по z. Делая в последнем интеграле замену переменных $r = |\eta|^{-1}r'$ и применяя (1.8), получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma'} r^{2(a-(l-1/2))}|\Psi|^2\,d\Gamma' = \\ \le \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}}\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\eta|^{-2(a-(l-1/2))-1}(r')^{2(a-(l-1/2))}|\hat\Psi(\eta^{-1}r',\ \eta)|^2\,dr'd\eta \le \\ \le k_2\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\eta|^{2(l-a)-2}\|w(\cdot,\ \eta)\|^2_{E_a^l(K')}\,d\eta,\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $w(y,\ \eta) = \hat{\mathcal{U}}(|\eta|^{-1}y,\ \eta)$. Теперь теорема 1.1 вытекает из (1.9), леммы 1.6 и неравенства $\|\mathcal{U}\|_{H_a^l(\Xi')} \le 2\|\Psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma')}$.

1.2 Разрешимость нелокальных краевых задач в плоских углах

1. Результаты данного параграфа (полученные А.Л. Скубачевским [32, § 2]) будут использованы в § 1.3 при изучении априорных оценок решений нелокальных краевых задач в двугранных углах.

Рассмотрим следующую нелокальную задачу для $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1,\ \ldots,\ \mathcal{U}_N) \in H_a^{l+2m,\,N}(K)$

$$\mathcal{P}_j(D_y,\ 0)\mathcal{U}_j = f_j(x) \quad (y \in K_j), \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0)\mathcal{U} \equiv B_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0)\mathcal{U}_j|_{\gamma_{j\sigma}} + \\ + \sum_{k,q,s}(B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ 0)\mathcal{U}_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y)|_{\gamma_{j\sigma}} = g_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j\sigma})\end{gathered} \tag{1.11}$$

$$(j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m),$$

где $f = \{f_j,\ g_{j\sigma\mu}\} \in H_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$.

Запишем операторы $\mathcal{P}_j(D_y,\ 0)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0)$, $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ 0)$ в полярных координатах: $\mathcal{P}_j(D_y,\ 0) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0) = r^{-m_{j\sigma\mu}}\tilde{B}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ 0) = r^{-m_{j\sigma\mu}}\tilde{B}_{j\sigma\mu kqs}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, где $D_\omega = -i\dfrac{\partial}{\partial\omega}$, $D_r = -i\dfrac{\partial}{\partial r}$.

Положим $\tau = \ln r$ и сделаем преобразование Фурье по τ; тогда из (1.10), (1.11) получим

$$\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}_j(\omega,\ \lambda) = \tilde{F}_j(\omega,\ \lambda) \quad (b_{j1} < \omega < b_{j,R_j+1}), \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}(\omega,\ \lambda) \equiv \tilde{B}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}_j(\omega,\ \lambda)|_{\omega=b_{j\sigma}} + \\ + \sum_{k,q,s}\beta_{j\sigma kqs}^{i\lambda - m_{j\sigma\mu}}\tilde{B}_{j\sigma\mu kqs}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}_k(\omega + \omega_{j\sigma kq},\ \lambda)|_{\omega=b_{j\sigma}} = \\ = \tilde{G}_{j\sigma\mu}(\lambda),\end{gathered} \tag{1.13}$$

где $F_j(\omega,\ \tau) = e^{2m\tau}f_j(\omega,\ \tau)$, $G_{j\sigma\mu}(\tau) = e^{m_{j\sigma\mu}\tau}g_{j\sigma\mu}(\tau)$; $\tilde{\mathcal{U}}_j(\omega,\ \lambda) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{U}_j(\omega,\ \tau)e^{-i\lambda\tau}d\tau$.

Данная задача представляет собой систему N обыкновенных дифференциальных уравнений (1.12) относительно функций $\tilde{\mathcal{U}}_j \in W^{l+2m}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})$ с нелокальными условиями (1.13), связывающими значения $\tilde{\mathcal{U}}_j$ и их производных в точке $\omega = b_{j\sigma}$ во значениями $\tilde{\mathcal{U}}_k$ и их производных во внутренних точках интервалов $(b_{k1},\ b_{k,R_k+1})$.

2. Рассмотрим оператор–функцию

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = \{\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega,\ D_\omega,\ \lambda),\ \tilde{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\} : \\ W^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2) \to W^{l,\,N}[b_1,\ b_2],\end{gathered}$$

соответствующую задаче (1.12), (1.13). Здесь

$$W^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2) = \prod_{j=1}^{N} W^{l+2m}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1}),$$

$$W^{l,\,N}[b_1,\ b_2] = \prod_{j=1}^{N} W^{l}[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}],$$

$$W^l[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}] = W^l(b_{j1},\ b_{j,R_j+1}) \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m.$$

Введем эквивалентные нормы, зависящие от параметра λ, в гильбертовых пространствах $W^l(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})$ и $W^l[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]$:

$$|||\tilde{\mathcal{U}}_j|||_{W^l(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})} = \big(\|\tilde{\mathcal{U}}_j\|^2_{W^l(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})} + |\lambda|^{2l}\,\|\tilde{\mathcal{U}}_j\|^2_{L_2(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})}\big)^{1/2},$$

$$|||\{\tilde{F}_j,\ \tilde{G}_{j\sigma\mu}\}|||_{W^l[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]} = \Big(|||\tilde{F}_j|||^2_{W^l(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})} + \\ + \sum_{\sigma,\mu}\big(1+|\lambda|^{2(l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2)}\big)|\tilde{G}_{j\sigma\mu}|^2\Big)^{1/2},$$

где $\tilde{\mathcal{U}}_j \in W^l(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})$, $\{\tilde{F}_j,\ \tilde{G}_{j\sigma\mu}\} \in W^l[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]$. Введем также нормы

$$|||\tilde{\mathcal{U}}|||_{W^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)} = \Big(\sum_j |||\tilde{\mathcal{U}}_j|||^2_{W^{l+2m}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})}\Big)^{1/2},$$

$$|||\tilde{\Phi}|||_{W^{l,\,N}[b_1,\ b_2]} = \Big(\sum_j |||\tilde{\Phi}_j|||^2_{W^l[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]}\Big)^{1/2},$$

где $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\mathcal{U}}_1,\ \dots,\ \tilde{\mathcal{U}}_N) \in W^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)$, $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_1,\ \dots,\ \tilde{\Phi}_N) \in W^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$.

Следующие две леммы доказаны в [32, § 2].

Лемма 1.8. *Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) : W^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2) \to W^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$ фредгольмов, $\operatorname{ind}\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = 0$; для любого $h \in \mathbb{R}$ существует $q_0 > 0$, такое, что для $\lambda \in J_{h,\,q_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Im}\ \lambda = h,\ |\mathrm{Re}\ \lambda| \ge q_0\}$ оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda) : W^{l,\,N}[b_1,\ b_2] \to W^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)$ и*

$$|||\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)\tilde{\Phi}|||_{W^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)} \le c|||\tilde{\Phi}|||_{W^{l,\,N}[b_1,\ b_2]}$$

для всех $\tilde{\Phi} \in W^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$, где $c > 0$ не зависит от λ и $\tilde{\Phi}$. Оператор–функция $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda) : W^{l,\,N}[b_1,\ b_2] \to W^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)$ конечномероморфная.

Лемма 1.9. *Для любых $0 < \varepsilon < 1/d$ существует $q > 1$, такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\mathrm{Im}\ \lambda| \le \varepsilon \ln |\mathrm{Re}\ \lambda|,\ |\mathrm{Re}\ \lambda| \ge q\}$ не содержит собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, где $d = \max |\ln \beta_{j\sigma kqs}|$; для каждого собственного числа λ_0 оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ существует $\delta > 0$, такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ 0 < |\mathrm{Im}\,\lambda - \mathrm{Im}\,\lambda_0| < \delta\}$ не содержит собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.*

3. Следующая теорема доказывается при помощи леммы 1.8 (см. [32, § 2]).

Теорема 1.3. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*; тогда нелокальная краевая задача (1.10), (1.11) имеет единственное решение* $\mathcal{U}\in H_a^{l+2m,\,N}(K)$ *для любой правой части* $f\in H_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$ *и*

$$\|\mathcal{U}\|_{H_a^{l+2m,\,N}(K)}\le c\|f\|_{H_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)},$$

где $c>0$ *не зависит от* f*. При этом имеет место представление*

$$\mathcal{U}(\omega,\ r)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty+i(a+1-l-2m)}^{+\infty+i(a+1-l-2m)} r^{i\lambda}\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)\{\tilde{F}_j(\omega,\ \lambda),\ \tilde{G}_{j\sigma\mu}(\lambda)\}\,d\lambda.^{1)}$$

1.3 Априорные оценки решений нелокальных краевых задач

1. Положим $d_1=\min\{1,\ \beta_{j\sigma kqs}\}/2,\ d_2=2\max\{1,\ \beta_{j\sigma kqs}\}$; введем множества $\Xi_j^p=\Xi_j\cap\{r_1d_1^{6-p}<r<r_2d_2^{6-p},\ |z|<2^{-p-1}\}$, где $j=1,\ \dots,\ N;\ p=0,\ \dots,\ 6;\ 0<r_1<r_2$.

Лемма 1.10. *Пусть* $\mathcal{U}_j\in W^{2m}(\Xi_j^0)$,

$$\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_j\in W^l(\Xi_j^0),\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{U}\in W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}\cap\bar{\Xi}_j^0) \tag{1.14}$$

---

1) Данное соотношение понимается в следующем смысле:

$$\lim_{A\to\infty}\sum_{j=1}^N\int\limits_{b_{j1}}^{b_{j,R_j+1}}\int\limits_0^\infty\Big|\mathcal{U}_j(\omega,\ r)- \\ -(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-A+i(a+1-l-2m)}^{A+i(a+1-l-2m)} r^{i\lambda}[\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)\{\tilde{F}_j(\omega,\ \lambda),\ \tilde{G}_{j\sigma\mu}(\lambda)\}]_j\,d\lambda\Big|^2\times \\ \times r^{2(a+1-l-2m)-1}dr d\omega=0,$$

где $[\cdot]_j$ обозначает j-ю координату N-мерного вектора.

$$(j=1,\ \dots,\ N;\ \sigma=1,\ R_j+1;\ \mu=1,\ \dots,\ m);$$

тогда $\mathcal{U}\in\prod\limits_j W^{l+2m}(\Xi_j^3)$ *и для* $|\lambda|\geq 1$

$$\sum_j \|\mathcal{U}_j\|_{W^{l+2m}(\Xi_j^6)}\leq c\sum_j\big\{\|\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_j\|_{W^l(\Xi_j^3)}+ \\ +\sum_{\sigma,\,\mu}\|\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{U}\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}\cap\Xi_j^3)}+|\lambda|^{-1}\|\mathcal{U}_j\|_{W^{l+2m}(\Xi_j^3)}+ \\ +|\lambda|^{l+2m-1}\|\mathcal{U}_j\|_{L_2(\Xi_j^3)}\big\}, \tag{1.15}$$

где $c>0$ *не зависит от* λ *и* $\mathcal{U}$.

Доказательство. Обозначим

$$\varepsilon=\min\{b_{j,q+1}-b_{jq}\}/4\ (j=1,\ \dots,\ N;\ q=1,\ \dots,\ R_j) \tag{1.16}$$

и введем функции $\zeta_{jq}\in C^\infty(\mathbb{R})$, такие, что

$$\zeta_{jq}(\omega)=1 \text{ для } |b_{jq}-\omega|<\varepsilon/2,\ \zeta_{jq}(\omega)=0 \text{ для } |b_{jq}-\omega|>\varepsilon \tag{1.17}$$

$$(j=1,\ \dots,\ N;\ q=1,\ \dots,\ R_j+1).$$

Положим $\zeta_j(\omega)=\zeta_{j1}(\omega)+\zeta_{j,R_j+1}(\omega)$. Поскольку функции ζ_j являются мультипликаторами в $W^l(\Xi_j^p)$, имеем $(1-\zeta_j)\mathcal{U}_j\in W^{2m}(\Xi_j^0)$. Применим теорему 5.1 [19, гл. 2, § 5.1] к функции $(1-\zeta_j)\mathcal{U}_j$ и оператору $\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z)$; тогда из (1.14) и формулы Лейбница получим

$$(1-\zeta_j)\mathcal{U}_j\in W^{l+2m}(\Xi_j^1). \tag{1.18}$$

Положим $\mathcal{V}_{j\sigma\mu}=\sum\limits_{k,\,q,\,s}(B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ D_z)((1-\zeta_k)\mathcal{U}_k))(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y,\ z)$. Очевидно,

$$\mathcal{V}_{j\sigma\mu}|_{\Gamma_{j\sigma}\cap\bar\Xi_j^2}=\sum_{k,\,q,\,s}(B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y,\ z)|_{\Gamma_{j\sigma}\cap\bar\Xi_j^2}. \tag{1.19}$$

Из равенства (1.19) и соотношений (1.14), (1.18) следует, что

$$B_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j\sigma}\cap\bar\Xi_j^2}=\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{U}-\mathcal{V}_{j\sigma\mu}|_{\Gamma_{j\sigma}\cap\bar\Xi_j^2}\in \\ \in W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}\cap\bar\Xi_j^2). \tag{1.20}$$

Снова применяя теорему 5.1 [19, гл. 2, § 5.1] к функции $\mathcal{U}_j$ и оператору $\{\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z),\ B_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)|_{\Gamma_{j\sigma}\cap\bar\Xi_j^2}\}$ $(\sigma=1,\ R_j+1;\ \mu=1,\ \dots,\ m)$, из (1.14), (1.20) получаем $\mathcal{U}_j\in W^{l+2m}(\Xi_j^3)$.

Теперь оценка (1.15) следует из леммы 3.1 [32, § 3]. □

Обозначим через $W^l_{\mathrm{loc}}(\bar{\Xi}_j \setminus M)$ множество функций, принадлежащих пространству W^l на внутренности любого компакте из $\bar{\Xi}_j$, не пересекающегося с M.

Теорема 1.4. *Пусть* $\mathcal{U} \in \prod\limits_j W^{2m}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Xi}_j \setminus M)$ *есть решение нелокальной краевой задачи (1.1), (1.2), такое, что* $\mathcal{U} \in H^{0,\,N}_{a-l-2m}(\Xi)$ *и* $f \in H^{l,\,N}_a(\Xi,\ \Gamma)$*; тогда* $\mathcal{U} \in H^{l+2m,\,N}_a(\Xi)$ *и*

$$\|\mathcal{U}\|_{H^{l+2m,\,N}_a(\Xi)} \le c\big(\|f\|_{H^{l,\,N}_a(\Xi,\ \Gamma)} + \|\mathcal{U}\|_{H^{0,\,N}_{a-l-2m}(\Xi)}\big), \tag{1.21}$$

где $c > 0$ *не зависит от* $\mathcal{U}$.

Доказательство. Из леммы 1.10 следует, что $\mathcal{U} \in \prod\limits_j W^{l+2m}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Xi}_j \setminus M)$. Далее, используя лемму 3.2 [32, § 3], получим, что $\mathcal{U} \in H^{l+2m,\,N}_a(\Xi)$ и выполняется априорная оценка (1.21). □

2. Положим $K^{ps}_j = K_j \cap \{r_1 d_1^{6-p} \cdot 2^s < r < r_2 d_2^{6-p} \cdot 2^s\}$, где $0 < r_1 < r_2$; $s \ge 1$; $j = 1,\ \dots,\ N$; $p = 0,\ \dots,\ 6$.

Лемма 1.11. *Пусть* $s \ge 1$, $\theta \in S^{n-3}$*. Предположим, что* $u_j \in W^{2m}(K^{0s}_j)$,

$$\mathcal{P}_j(D_y,\ \theta)u_j \in W^l(K^{0s}_j),\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)u = 0 \quad (y \in \gamma_{j\sigma} \cap \bar{K}^{0s}_j)$$

$$(j = 1,\ \dots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ \mu = 1,\ \dots,\ m);$$

тогда $u \in \prod\limits_j W^{l+2m}(K^{3s}_j)$ *и для* $|\lambda| \ge 1$

$$\begin{gathered}\sum_j 2^{sa}\|u_j\|_{W^{l+2m}(K^{6s}_j)} \le c\sum_j\big\{2^{sa}\|\mathcal{P}_j(D_y,\ \theta)u_j\|_{W^l(K^{3s}_j)} + \\ + |\lambda|^{-1}2^{sa}\|u_j\|_{W^{l+2m}(K^{3s}_j)} + |\lambda|^{l+2m-1}2^{s(a-l-2m)}\|u_j\|_{L_2(K^{3s}_j)}\big\},\end{gathered} \tag{1.22}$$

где $c > 0$ *не зависит от* u, θ, λ *и* s.

Доказательство. Повторяя доказательство леммы 1.10 и подставляя K^{ps}_j, вместо Ξ^p_j, и θ, вместо D_z, получим $u \in \prod\limits_j W^{l+2m}(K^{3s}_j)$. Теперь априорная оценка (1.22) следует из леммы 3.3 [32, § 3]. □

Теорема 1.5. *Пусть* $u \in \prod_j W^{2m}_{\mathrm{loc}}(\bar K_j \setminus \{0\})$ *— решение задачи (1.6), (1.7), такое, что* $u \in E^{0,\,N}_{a-l-2m}(K)$ *и* $f \in E^{l,\,N}_a(K,\ \gamma)$*; тогда* $u \in E^{l+2m,\,N}_a(K)$ *и*

$$\|u\|_{E^{l+2m,\,N}_a(K)} \le c\big(\|f\|_{E^{l,\,N}_a(K,\ \gamma)} + \|u\|_{E^{0,\,N}_{a-l-2m}(K)}\big), \tag{1.23}$$

где $c > 0$ *не зависит от* u, $\theta \in S^{n-3}$.

Доказательство. 1) В силу леммы 1.5, достаточно рассмотреть случай $g_{j\sigma\mu} = 0$. Так как $f_j \in E^l_a(K_j) \subset W^l_{\mathrm{loc}}(\bar K_j \setminus \{0\})$, аналогично предыдущему можно показать, что $u \in \prod_j W^{l+2m}_{\mathrm{loc}}(\bar K_j \setminus \{0\})$. Положим $r_1 = d_1$, $r_2 = d_2$ и обозначим $K^{ps}_j = K_j \cap \{d_1^{7-p} \cdot 2^s < r < d_2^{7-p} \cdot 2^s\}$, где $s \ge 1$; $j = 1,\ \ldots,\ N$; $p = 0,\ \ldots,\ 6$. Обозначим также $K^{60}_j = K_j \cap \{r < d_2\}$. Введем функции $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(r) = 1$ для $r < d_2$, $\psi(r) = 0$ для $r > 2d_2$; $\hat\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\hat\psi(r) = 1$ для $r < 2d_2^2$, $\hat\psi(r) = 0$ для $r > 3d_2^2$.

Применяя теорему 1.4 к оператору $\{\mathcal{P}_j(D_y,\ 0),\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0)\}$ (при $n = 2$), получаем

$$\begin{gathered}\sum_j \|u_j\|_{E^{l+2m}_a(K^{60}_j)} \le k_1 \sum_j \|\psi u_j\|_{H^{l+2m}_a(K_j)} \le \\ \le k_2 \sum_j \big\{\|\mathcal{P}_j(D_y,\ 0)(\psi u_j)\|_{H^l_a(K_j)} + \\ + \sum_{\sigma,\,\mu} \|\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0)(\psi u_j)\|_{H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} + \|\psi u_j\|_{H^0_{a-l-2m}(K_j)}\big\}.\end{gathered} \tag{1.24}$$

Оценим $\|\mathcal{P}_j(D_y,\ 0)(\psi u_j)\|_{H^l_a(K_j)}$. Используя формулу Лейбница, условие $\theta \in S^{n-3}$ и ограничения на носители функций $\psi,\ \hat\psi$, получим

$$\begin{gathered}\|\mathcal{P}_j(D_y,\ 0)(\psi u_j)\|_{H^l_a(K_j)} \le \\ \le k_3(\|\mathcal{P}_j(D_y,\ \theta)(\psi u_j)\|_{H^l_a(K_j)} + \|\psi u_j\|_{H^{l+2m-1}_{a-1}(K_j)}) \le \\ \le k_4(\|\mathcal{P}_j(D_y,\ \theta)u_j\|_{E^l_a(K_j)} + \|\hat\psi u_j\|_{H^{l+2m-1}_{a-1}(K_j)}).\end{gathered} \tag{1.25}$$

Оценим $\|\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0)(\psi u_j)\|_{H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})}$. Используя формулу Лейбница, условие $\theta \in S^{n-3}$, ограничения на носители функций $\psi,\ \hat\psi$ и условие $g_{j\sigma\mu} = 0$, получим

$$\begin{gathered}\|\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0)(\psi u_j)\|_{H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} \le \\ \le k_5(\|\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)(\psi u_j)\|_{H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} + \|\hat\psi u_j\|_{H^{l+2m-1}_{a-1}(K_j)}) \le \\ \le k_6\big(\|\psi \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)u_j\|_{H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} + \sum_{k,\,q,\,s} \|(\psi(\beta_{j\sigma kqs}y) - \\ - \psi(y))(B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ \theta)u_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y)|_{\gamma_{j\sigma}}\|_{H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} + \\ + \|\hat\psi u_j\|_{H^{l+2m-1}_{a-1}(K_j)}\big) \le k_7\big(\sum_k \|u_k\|_{W^{l+2m}(K_j \cap S_0)} + \|\hat\psi u_j\|_{H^{l+2m-1}_{a-1}(K_j)}\big),\end{gathered} \tag{1.26}$$

где $S_0 = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < r < 2d_2/d_1\}$.

Из неравенств (1.24)–(1.26), леммы 1.10 и интерполяционных неравенств (1.5) следует, что

$$\begin{gathered}\sum_j \|u_j\|_{E_a^{l+2m}(K_j^{60})} \le k_8 \sum_j \bigl\{\|f_j\|_{E_a^l(K_j)} + \\ +|\lambda|^{-1}\|u_j\|_{E_a^{l+2m}(K_j)} + |\lambda|^{l+2m-1}\|u_j\|_{E^0_{a-l-2m}(K_j)}\bigr\}.\end{gathered} \tag{1.27}$$

2) В силу леммы 1.11, для $s \ge 1$ имеем

$$\begin{gathered}\sum_j \|u_j\|_{E_a^{l+2m}(K_j^{6s})} \le k_9 \sum_j \bigl\{\|f_j\|_{E_a^l(K_j^{3s})} + \\ +|\lambda|^{-1}\|u_j\|_{E_a^{l+2m}(K_j^{3s})} + |\lambda|^{l+2m-1}\|u_j\|_{E^0_{a-l-2m}(K_j^{3s})}\bigr\}.\end{gathered} \tag{1.28}$$

Суммируя (1.27), (1.28) при всех $s \ge 1$ и выбирая достаточно большое $|\lambda|$, получим (1.23). □

Из теоремы 1.3 и леммы 1.11 получаем следующий результат (см. теорему 3.1 [32, § 3]).

Теорема 1.6. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*; тогда для всех решений* $u \in E_a^{l+2m,\,N}(K)$ *нелокальной краевой задачи (1.6), (1.7) и всех* $\theta \in S^{n-3}$

$$\|u\|_{E_a^{l+2m,\,N}(K)} \le c\bigl(\|f\|_{E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)} + \sum_j \|u_j\|_{L_2(K_j\cap S)}\bigr), \tag{1.29}$$

где $S = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < R_1 < r < R_2\}$, $c > 0$ *не зависит от* θ *и* u.

Если при некотором $\theta \in S^{n-3}$ *оценка (1.29) имеет место для всех решений нелокальной краевой задачи (1.6), (1.7), то на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *нет собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Из теоремы 1.6 следует, что ядро оператора $\mathcal{L}(\theta)$ конечномерно, а образ — замкнут. Для того чтобы доказать конечномерность коядра оператора $\mathcal{L}(\theta)$, мы выведем формулу Грина для нелокальных задач и изучим задачи, сопряженные с нелокальными краевыми задачами относительно формулы Грина.

1.4 Формула Грина для нелокальных эллиптических задач

1. В данном параграфе мы выведем формулу Грина, устанавливающую связь между нелокальными краевыми задачами и так называемыми нелокальными задачами трансмиссии, которые будут изучены в §§ 1.5–1.7.

Рассмотрим нелокальную краевую задачу (1.1), (1.2).

Пусть n_{kq} — единичный вектор нормали к Γ_{kq}, направленный внутрь Ξ_{kq} $(q = 1, \ldots, R_k)$, n_{k,R_k+1} — единичный вектор нормали к Γ_{k,R_k+1}, направленный внутрь Ξ_{kR_k}.

Обозначим через $C^\infty(\bar{\Xi}_{jt} \setminus M)$ $(C^\infty(\bar{\Xi}_j \setminus M), C^\infty(\Gamma_{jq}))$ множество бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Xi}_{jt} \setminus M$ (в $\bar{\Xi}_j \setminus M$, в Γ_{jq}) функций.

Для $\mathcal{U}_{jt} \in C_0^\infty(\bar{\Xi}_{jt} \setminus M)$, $\mathcal{V}_{jt} \in C^\infty(\bar{\Xi}_{jt} \setminus M)$ (или $\mathcal{U}_{jt} \in C^\infty(\bar{\Xi}_{jt} \setminus M)$, $\mathcal{V}_{jt} \in C_0^\infty(\bar{\Xi}_{jt} \setminus M)$) положим

$$(\mathcal{U}_{jt},\ \mathcal{V}_{jt})_{\Xi_{jt}} = \int\limits_{\Xi_{jt}} \mathcal{U}_{jt} \cdot \bar{\mathcal{V}}_{jt}\, dx \quad (j = 1,\ \ldots,\ N;\ t = 1,\ \ldots,\ R_j).$$

Для $\mathcal{U}_{\Gamma_{jq}} \in C_0^\infty(\Gamma_{jq})$, $\mathcal{V}_{\Gamma_{jq}} \in C^\infty(\Gamma_{jq})$ (или $\mathcal{U}_{\Gamma_{jq}} \in C^\infty(\Gamma_{jq})$, $\mathcal{V}_{\Gamma_{jq}} \in C_0^\infty(\Gamma_{jq})$) положим

$$(\mathcal{U}_{\Gamma_{jq}},\ \mathcal{V}_{\Gamma_{jq}})_{\Gamma_{jq}} = \int\limits_{\Gamma_{jq}} \mathcal{U}_{\Gamma_{jq}} \cdot \bar{\mathcal{V}}_{\Gamma_{jq}}\, d\Gamma \quad (j = 1,\ \ldots,\ N;\ q = 1,\ \ldots,\ R_j + 1).$$

Предположим, что функции $\mathcal{V}_{jt}(x)$ заданы в Ξ_{jt}; тогда через $\mathcal{V}_j(x)$ обозначим следующую функцию, определенную в Ξ_j: $\mathcal{V}_j(x) \equiv \mathcal{V}_{jt}(x)$ для $x \in \Xi_{jt}$.

При изучении формулы Грина для краткости мы будем опускать аргументы $(D_y,\ D_z)$ в обозначении дифференциальных операторов. Пусть $\mathcal{Q}_j$ есть оператор формально сопряженный с $\mathcal{P}_j$.

Теорема 1.7. *Для операторов $\mathcal{P}_j$, $B_{j\sigma\mu}$ и $B_{j\sigma\mu kqs}$, определенных в § 1.1, можно выбрать (не единственным образом)*

1) систему $\{B'_{j\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ нормальных на $\Gamma_{j\sigma}$ операторов порядков $2m - 1 - m'_{j\sigma\mu}$ с постоянными коэффициентами, таких, что $\{B_{j\sigma\mu},\ B'_{j\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ является системой Дирихле на $\Gamma_{j\sigma}$ порядка $2m$ [2)] $(\sigma = 1,\ R_j + 1)$;

2) систему Дирихле $\{B_{jq\mu},\ B'_{jq\mu}\}_{\mu=1}^m$ на Γ_{jq} порядка $2m$, такую, что операторы $B_{jq\mu}$ и $B'_{jq\mu}$ имеют порядки $2m - \mu$ и $m - \mu$ соответственно $(q = 2,\ \ldots,\ R_j)$.

Если этот выбор сделан, то существуют операторы $C_{j\sigma\mu}$, $F_{j\sigma\mu}$, $T_{jq\nu}$ и $T_{jq\nu k\sigma s}$ $(j,\ k = 1,\ \ldots,\ N$; $\sigma = 1,\ R_j + 1$ для операторов $C_{j\sigma\mu}$ и $F_{j\sigma\mu}$, $\sigma = 1,\ R_k + 1$ для операторов $T_{jq\nu k\sigma s}$; $\mu = 1,\ \ldots,\ m$; $q = 2,\ \ldots,\ R_j$; $\nu =$

[2)]Определение системы Дирихле см. в [19, гл. 2, § 2.2].

1, …, 2m; s = 1, …, $S'_{jqk\sigma} = S_{k\sigma jq}$*) с постоянными коэффициентами, такие, что*

I) операторы $C_{j\sigma\mu}$, $F_{j\sigma\mu}$, $T_{jq\nu}$ *и* $T_{jq\nu k\sigma s}$ *имеют порядки* $m'_{j\sigma\mu}$, $2m - 1 - m_{j\sigma\mu}$, $\nu - 1$ *и* $\nu - 1$ *соответственно;*

II) система $\{C_{j\sigma\mu},\ F_{j\sigma\mu}\}_{\mu=1}^{m}$ *является системой Дирихле на* $\Gamma_{j\sigma}$ *порядка* $2m$ $(\sigma = 1,\ R_j + 1)$,

система $\{C_{j\sigma\mu}\}_{\mu=1}^{m}$ *накрывает оператор* $\mathcal{Q}_j$ *на* $\Gamma_{j\sigma}$ $(\sigma = 1,\ R_j + 1)$,

система $\{T_{jq\nu}\}_{\nu=1}^{2m}$ *является системой Дирихле на* Γ_{jq} *порядка* $2m$ $(q = 2,\ \dots,\ R_j)$;

III) для всех $\mathcal{U}_j \in C_0^\infty(\bar{\Xi}_j \backslash M)$, $\mathcal{V}_{jt} \in C^\infty(\bar{\Xi}_{jt} \backslash M)$ *(или* $\mathcal{U}_j \in C^\infty(\bar{\Xi}_j \backslash M)$, $\mathcal{V}_{jt} \in C_0^\infty(\bar{\Xi}_{jt} \setminus M)$*) имеет место следующая формула Грина:*

$$\begin{gathered}\sum_j \Big\{ \sum_t (\mathcal{P}_j \mathcal{U}_j,\ \mathcal{V}_{jt})_{\Xi_{jt}} + \sum_{\sigma,\mu} (\mathcal{B}_{j\sigma\mu}\mathcal{U},\ F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}} + \\ + \sum_{q,\mu} (B_{jq\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{jq}},\ \mathcal{T}_{jq\mu}\mathcal{V})_{\Gamma_{jq}} \Big\} = \sum_j \Big\{ \sum_t (\mathcal{U}_j,\ \mathcal{Q}_j V_{jt})_{\Xi_{jt}} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} (B'_{j\sigma\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j\sigma}},\ C_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}} + \sum_{q,\mu} (B'_{jq\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{jq}},\ \mathcal{T}_{jq,m+\mu}\mathcal{V})_{\Gamma_{jq}} \Big\}.\end{gathered} \tag{1.30}$$

В формуле Грина (здесь и далее) суммирование проводится по $j = 1,\ \dots,\ N$*;* $t = 1,\ \dots,\ R_j$*;* $\sigma = 1,\ R_j + 1$*;* $q = 2,\ \dots,\ R_j$*;* $\mu = 1,\ \dots,\ m$*; оператор* $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}$ *определен в (1.2);*

$$\mathcal{T}_{jq\nu}\mathcal{V} = T_{jq\nu}\mathcal{V}_{j,q-1}|_{\Gamma_{jq}} - T_{jq\nu}\mathcal{V}_{jq}|_{\Gamma_{jq}} + \sum_{k,\sigma,s} (T_{jq\nu k\sigma s}\mathcal{V}_k)(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}y,\ z)|_{\Gamma_{jq}}$$
$$(\nu = 1,\ \dots,\ 2m),$$

в формуле для оператора $\mathcal{T}_{jq\nu}$ *(здесь и далее) суммирование проводится по* $k = 1,\ \dots,\ N$*;* $\sigma = 1, R_k + 1$*;* $s = 1,\ \dots,\ S'_{jqk\sigma} = S_{k\sigma jq}$*;* $\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}$ *— оператор поворота на угол* $\omega'_{jqk\sigma} = -\omega_{k\sigma jq}$ *и растяжения в* $\beta'_{jqk\sigma s} = 1/\beta_{k\sigma jqs}$ *раз в плоскости* $\{y\}$.

Доказательство. Для $j = 1,\ \dots,\ N$ положим $B'_{j\sigma\mu} = \left(-i\dfrac{\partial}{\partial n_{j\sigma}}\right)^{2m-1-m'_{j\sigma\mu}}$, $B_{jq\mu} = \left(-i\dfrac{\partial}{\partial n_{jq}}\right)^{2m-\mu}$, $B'_{jq\mu} = \left(-i\dfrac{\partial}{\partial n_{jq}}\right)^{m-\mu}$ $(\sigma = 1,\ R_j + 1;\ q = 2,\ \dots, R_j;\ \mu = 1,\ \dots,\ m)$, где $m'_{j\sigma\mu}$ выбираются так, чтобы числа $m_{j\sigma\mu}$ и $2m - 1 - m'_{j\sigma\mu}$ пробегали все множество $0,\ 1,\ \dots,\ 2m - 1$, когда μ изменяется от 1 до $2m$.

По теореме 2.1 [19, гл. 2, § 2.2], существуют определенные единственным образом дифференциальные операторы $F_{j\sigma\mu}$, $F'_{j\sigma\mu}$, $F_{jq\mu}$ и $F'_{jq\mu}$ $(j = 1,\ \dots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ q = 2,\ \dots, R_j;\ \mu = 1,\ \dots,\ m)$ порядков $2m - 1 - m_{j\sigma\mu}$, $m'_{j\sigma\mu}$, $\mu - 1$ и $m + \mu - 1$ соответственно с постоянными коэффициентами, такие, что система $\{F_{j\sigma\mu},\ F'_{j\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ является системой Дирихле на $\Gamma_{j\sigma}$ порядка $2m$ $(\sigma=1,\ R_j+1)$,

система $\{F'_{j\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ накрывает оператор Q_j на $\Gamma_{j\sigma}$ $(\sigma=1,\ R_j+1)$,

система $\{F_{jq\mu},\ F'_{jq\mu}\}_{\mu=1}^m$ является системой Дирихле на Γ_{jq} порядка $2m$ $(q=2,\ \dots,\ R_j)$,

для любых $\mathcal{U}_j\in C_0^\infty(\bar\Xi_j\setminus M)$, $\mathcal{V}_{jt}\in C^\infty(\bar\Xi_{jt}\setminus M)$ (или $\mathcal{U}_j\in C^\infty(\bar\Xi_j\setminus M)$, $\mathcal{V}_{jt}\in C_0^\infty(\bar\Xi_{jt}\setminus M)$) имеют место следующие формулы Грина:

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{P}_j\mathcal{U}_j,\ \mathcal{V}_{j1})_{\Xi_{j1}}+\sum_{\mu=1}^m(B_{j1\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j1}},\ F_{j1\mu}\mathcal{V}_{j1}|_{\Gamma_{j1}})_{\Gamma_{j1}}+\\
+\sum_{\mu=1}^m(B_{j2\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j2}},\ F_{j2\mu}\mathcal{V}_{j1}|_{\Gamma_{j2}})_{\Gamma_{j2}}=(\mathcal{U}_j,\ \mathcal{Q}_jV_{j1})_{\Xi_{j1}}+\\
+\sum_{\mu=1}^m(B'_{j1\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j1}},\ F'_{j1\mu}\mathcal{V}_{j1}|_{\Gamma_{j1}})_{\Gamma_{j1}}+\sum_{\mu=1}^m(B'_{j2\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j2}},\ F'_{j2\mu}\mathcal{V}_{j1}|_{\Gamma_{j2}})_{\Gamma_{j2}},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{P}_j\mathcal{U}_j,\ \mathcal{V}_{j2})_{\Xi_{j2}}-\sum_{\mu=1}^m(B_{j2\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j2}},\ F_{j2\mu}\mathcal{V}_{j2}|_{\Gamma_{j2}})_{\Gamma_{j2}}+\\
+\sum_{\mu=1}^m(B_{j3\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j3}},\ F_{j3\mu}\mathcal{V}_{j2}|_{\Gamma_{j3}})_{\Gamma_{j3}}=(\mathcal{U}_j,\ \mathcal{Q}_jV_{j2})_{\Xi_{j2}}-\\
-\sum_{\mu=1}^m(B'_{j2\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j2}},\ F'_{j2\mu}\mathcal{V}_{j2}|_{\Gamma_{j2}})_{\Gamma_{j2}}+\sum_{\mu=1}^m(B'_{j3\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j3}},\ F'_{j3\mu}\mathcal{V}_{j2}|_{\Gamma_{j3}})_{\Gamma_{j3}},
\end{gathered}
\tag{1.31}
$$

$$\cdots,$$

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{P}_j\mathcal{U}_j,\ \mathcal{V}_{jR_j})_{\Xi_{jR_j}}-\sum_{\mu=1}^m(B_{jR_j\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{jR_j}},\ F_{jR_j\mu}\mathcal{V}_{jR_j}|_{\Gamma_{jR_j}})_{\Gamma_{jR_j}}+\\
+\sum_{\mu=1}^m(B_{j,R_j+1,\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j,R_j+1}},\ F_{j,R_j+1,\mu}\mathcal{V}_{jR_j}|_{\Gamma_{j,R_j+1}})_{\Gamma_{j,R_j+1}}=\\
=(\mathcal{U}_j,\ \mathcal{Q}_jV_{jR_j})_{\Xi_{jR_j}}-\sum_{\mu=1}^m(B'_{jR_j\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{jR_j}},\ F'_{jR_j\mu}\mathcal{V}_{jR_j}|_{\Gamma_{jR_j}})_{\Gamma_{jR_j}}+\\
+\sum_{\mu=1}^m(B'_{j,R_j+1,\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j,R_j+1}},\ F'_{j,R_j+1,\mu}\mathcal{V}_{jR_j}|_{\Gamma_{j,R_j+1}})_{\Gamma_{j,R_j+1}}.
\end{gathered}
$$

Складывая равенства (1.31), получаем

$$
\begin{gathered}
\sum_t(\mathcal{P}_j\mathcal{U}_j,\ \mathcal{V}_{jt})_{\Xi_{jt}}+\sum_{\sigma=1,\,R_j+1}\sum_{\mu=1}^{m}(B_{j\sigma\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j\sigma}},\ F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}}+\\
+\sum_{q=2}^{R_j}\sum_{\mu=1}^{m}(B_{jq\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{jq}},\ F_{jq\mu}\mathcal{V}_{j,q-1}|_{\Gamma_{jq}}-F_{jq\mu}\mathcal{V}_{jq}|_{\Gamma_{jq}})_{\Gamma_{jq}}=\\
=\sum_t(\mathcal{U}_j,\ \mathcal{Q}_jV_{jt})_{\Xi_{jt}}+\sum_{\sigma=1,\,R_j+1}\sum_{\mu=1}^{m}(B'_{j\sigma\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j\sigma}},\ F'_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}}+\\
+\sum_{q=2}^{R_j}\sum_{\mu=1}^{m}(B'_{jq\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{jq}},\ F'_{jq\mu}\mathcal{V}_{j,q-1}|_{\Gamma_{jq}}-F'_{jq\mu}\mathcal{V}_{jq}|_{\Gamma_{jq}})_{\Gamma_{jq}}.
\end{gathered}
\tag{1.32}
$$

Добавим выражение $\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{q=2}^{R_k}\sum\limits_{s=1}^{S_{j\sigma kq}}(B_{j\sigma\mu kqs}\mathcal{U}_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}\cdot)$ к $B_{j\sigma\mu}\mathcal{U}_j$ и вычтем его в формуле (1.32). Тогда, используя замену переменных $x'=(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y,\ z)$ в интегралах по $\Gamma_{j\sigma}$, получим

$$
\begin{gathered}
(B_{j\sigma\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j\sigma}},\ F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}}=(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}\mathcal{U},\ F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}}-\\
-(\sum_{k,q}\sum_{s=1}^{S_{j\sigma kq}}(B_{j\sigma\mu kqs}\mathcal{U}_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}\cdot)|_{\Gamma_{j\sigma}},\ F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}}=\\
=(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}\mathcal{U},\ F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}}+\\
+\sum_{k,q}\sum_{s=1}^{S'_{kqj\sigma}}(-\frac{1}{\beta_{j\sigma kqs}}B_{j\sigma\mu kqs}\mathcal{U}_k|_{\Gamma_{kq}},\ (F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j)(\mathcal{G}'_{kqj\sigma s}\cdot)|_{\Gamma_{kq}})_{\Gamma_{kq}}.
\end{gathered}
\tag{1.33}
$$

Здесь $S'_{kqj\sigma}=S_{j\sigma kq}$; $\mathcal{G}'_{kqj\sigma s}$ — оператор поворота на угол $\omega'_{kqj\sigma}=-\omega_{j\sigma kq}$ и растяжения в $\beta'_{kqj\sigma s}=1/\beta_{j\sigma kqs}$ раз в плоскости $\{y\}$.

Очевидно,

$$
-\frac{1}{\beta_{j\sigma kqs}}B_{j\sigma\mu kqs}=\sum_{\alpha=1}^{m}\Lambda_{j\sigma\mu kqs\alpha}B_{kq\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{m}\Lambda'_{j\sigma\mu kqs\alpha}B'_{kq\alpha}. \tag{1.34}
$$

Здесь

$$
\Lambda_{j\sigma\mu kqs\alpha}=\sum_{|\beta|+l=0}^{m_{j\sigma\mu}-(2m-\alpha)}a^{\beta l}_{j\sigma\mu kqs\alpha}D_z^\beta\left(\frac{\partial}{\partial y_{kq}}\right)^l,
$$
$$
\Lambda'_{j\sigma\mu kqs\alpha}=\sum_{|\beta|+l=0}^{m_{j\sigma\mu}-(m-\alpha)}{a'}^{\beta l}_{j\sigma\mu kqs\alpha}D_z^\beta\left(\frac{\partial}{\partial y_{kq}}\right)^l,
$$

$a^{\beta l}_{j\sigma\mu kqs\alpha}$, ${a'}^{\beta l}_{j\sigma\mu kqs\alpha}\in\mathbb{C}$, y_{kq} есть координата на полуоси $\Gamma_{kq}\cap\{z=0\}$. Если $m_{j\sigma\mu}-(2m-\alpha)<0$ $(m_{j\sigma\mu}-(m-\alpha)<0)$, то положим $\Lambda_{j\sigma\mu kqs\alpha}=0$ $(\Lambda'_{j\sigma\mu kqs\alpha}=0)$.

Обозначим через $(\Lambda_{j\sigma\mu kqs\alpha})^*$, $(\Lambda'_{j\sigma\mu kqs\alpha})^*$ операторы, формально сопряженные к $\Lambda_{j\sigma\mu kqs\alpha}$, $\Lambda'_{j\sigma\mu kqs\alpha}$ соответственно. Тогда (1.33) и (1.34) дают

$$\begin{gathered}(B_{j\sigma\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j\sigma}},\ F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}} = (\mathcal{B}_{j\sigma\mu}\mathcal{U},\ F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}} + \\ + \sum_{k,q}\sum_{s=1}^{S'_{kqj\sigma}}\sum_{\alpha=1}^{m}(B_{kq\alpha}\mathcal{U}_k|_{\Gamma_{kq}},\ (\Lambda_{j\sigma\mu kqs\alpha})^*[(F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j)(\mathcal{G}'_{kqj\sigma s}\cdot)|_{\Gamma_{kq}}])_{\Gamma_{kq}} - \\ - \sum_{k,q}\sum_{s=1}^{S'_{kqj\sigma}}\sum_{\alpha=1}^{m}(B'_{kq\alpha}\mathcal{U}_k|_{\Gamma_{kq}},\ (\Lambda'_{j\sigma\mu kqs\alpha})^*[(F'_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j)(\mathcal{G}'_{kqj\sigma s}\cdot)|_{\Gamma_{kq}}])_{\Gamma_{kq}}.\end{gathered}\tag{1.35}$$

Подставляя (1.35) в (1.32), суммируя по j и группируя слагаемые содержащие $B_{jq\mu}\mathcal{U}_j$, получим

$$\begin{gathered}\sum_j\Big\{\sum_t(\mathcal{P}_j\mathcal{U}_j,\ \mathcal{V}_{jt})_{\Xi_{jt}} + \sum_{\sigma=1,\,R_j+1}\sum_{\mu=1}^{m}(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}\mathcal{U},\ F_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}} + \\ + \sum_{q=2}^{R_j}\sum_{\mu=1}^{m}(B_{jq\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{jq}},\ F_{jq\mu}\mathcal{V}_{j,q-1}|_{\Gamma_{jq}} - F_{jq\mu}\mathcal{V}_{jq}|_{\Gamma_{jq}} + \\ + \sum_k\sum_{\sigma=1,\,R_k+1}\sum_{s=1}^{S'_{jqk\sigma}}(\{\sum_{\alpha=1}^{m}(\hat\Lambda_{k\sigma\alpha jqs\mu})^*F_{k\sigma\alpha}\}\mathcal{V}_k)(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}\cdot)|_{\Gamma_{jq}})_{\Gamma_{jq}}\Big\} = \\ = \sum_j\Big\{\sum_t(\mathcal{U}_j,\ \mathcal{Q}_jV_{jt})_{\Xi_{jt}} + \sum_{\sigma=1,\,R_j+1}\sum_{\mu=1}^{m}(B'_{j\sigma\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{j\sigma}},\ F'_{j\sigma\mu}\mathcal{V}_j|_{\Gamma_{j\sigma}})_{\Gamma_{j\sigma}} + \\ + \sum_{q=2}^{R_j}\sum_{\mu=1}^{m}(B'_{jq\mu}\mathcal{U}_j|_{\Gamma_{jq}},\ F'_{jq\mu}\mathcal{V}_{j,q-1}|_{\Gamma_{jq}} - F'_{jq\mu}\mathcal{V}_{jq}|_{\Gamma_{jq}} + \\ + \sum_k\sum_{\sigma=1,\,R_k+1}\sum_{s=1}^{S'_{jqk\sigma}}(\{\sum_{\alpha=1}^{m}(\hat\Lambda'_{k\sigma\alpha jqs\mu})^*F'_{k\sigma\alpha}\}\mathcal{V}_k)(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}\cdot)|_{\Gamma_{jq}})_{\Gamma_{jq}}\Big\},\end{gathered}\tag{1.36}$$

где операторы $\hat\Lambda_{k\sigma\alpha jqs\mu}$ и $\hat\Lambda'_{k\sigma\alpha jqs\mu}$ получаются из операторов $\Lambda_{k\sigma\alpha jqs\mu}$ и $\Lambda'_{k\sigma\alpha jqs\mu}$ подстановкой $a^{\beta l}_{k\sigma\alpha jqs\mu}(\beta'_{jqk\sigma s})^l$ и ${a'}^{\beta l}_{k\sigma\alpha jqs\mu}(\beta'_{jqk\sigma s})^l$, вместо $a^{\beta l}_{k\sigma\alpha jqs\mu}$ и ${a'}^{\beta l}_{k\sigma\alpha jqs\mu}$ соответственно.

Обозначая

$$\begin{gathered}C_{j\sigma\mu} = F'_{j\sigma\mu}\ (j=1,\ \dots,\ N;\ \sigma=1,\ R_j+1;\ \mu=1,\ \dots,\ m),\\ T_{jq\nu} = F_{jq\nu}\ \text{для}\ \nu=1,\ \dots,\ m;\ T_{jq\nu} = F'_{jq,\nu-m}\ \text{для}\ \nu=m+1,\ \dots,\ 2m;\\ T_{jq\nu k\sigma s} = \sum_{\alpha=1}^{m}(\hat\Lambda_{k\sigma\alpha jqs\nu})^*F_{k\sigma\alpha}\ \text{для}\ \nu=1,\ \dots,\ m,\\ T_{jq\nu k\sigma s} = \sum_{\alpha=1}^{m}(\hat\Lambda'_{k\sigma\alpha jqs,\nu-m})^*F'_{k\sigma\alpha}\ \text{для}\ \nu=m+1,\ \dots,\ 2m\\ (j,\ k=1,\ \dots,\ N;\ q=2,\ \dots,\ R_j;\ \sigma=1,\ R_k+1;\ s=1,\ \dots,\ S'_{jqk\sigma}),\end{gathered}$$

завершаем доказательство. □

Замечание 1.1. Формулу (1.30) можно распространить по непрерывности на случай, когда $\mathcal{U}_j \in H_a^{2m}(\Xi_j)$, $\mathcal{V}_{jt} \in H_{-a+2m}^{2m}(\Xi_{jt})$. Действительно, $C_0^\infty(\bar{\Xi}_j \setminus M)$ всюду плотно в $H_a^{2m}(\Xi_j)$, $C_0^\infty(\bar{\Xi}_{jt} \setminus M)$ всюду плотно в $H_{-a+2m}^{2m}(\Xi_{jt})$; следовательно, существуют последовательности $\{\mathcal{U}_j^p\}_{p=1}^\infty \subset C_0^\infty(\bar{\Xi}_j \setminus \{0\})$ и $\{\mathcal{V}_{jt}^q\}_{q=1}^\infty \subset C_0^\infty(\bar{\Xi}_{jt} \setminus \{0\})$, сходящиеся к $\mathcal{U}_j$ и $\mathcal{V}_{jt}$ в $H_a^{2m}(\Xi_j)$ и $H_{-a+2m}^{2m}(\Xi_{jt})$ соответственно. Формула Грина (1.30) справедлива для функций $\mathcal{U}_j^p$ и $\mathcal{V}_{jt}^q$; переходя к пределу при $p,\ q \to \infty$, получаем формулу Грина для $\mathcal{U}_j$ и $\mathcal{V}_{jt}$ (корректность перехода к пределу следует из неравенства Коши–Буняковского и теоремы 1.1).

Проиллюстрируем формулу Грина на следующих двух примерах.

Пример 1.1. Пусть $n = 2,\ N = 1$. Обозначим $K = \{y :\ r > 0,\ |\omega| < \omega_0\}$, $K_1 = \{y :\ r > 0,\ -\omega_0 < \omega < 0\}$, $K_2 = \{y :\ r > 0,\ 0 < \omega < \omega_0\}$, $\gamma_\sigma = \{y :\ r > 0,\ \omega = (-1)^\sigma \omega_0\}$ $(\sigma = 1,\ 2)$, $\gamma = \{y :\ r > 0,\ \omega = 0\}$, где $y = (y_1,\ y_2) \in \mathbb{R}^2$; $\omega_0 < \pi$.

Пусть n_1 — единичный нормальный к γ_1 вектор, направленный внутрь K_1, и n, n_2 — единичные нормальные к γ, γ_2 соответственно векторы, направленные внутрь K_2.

Рассмотрим нелокальную задачу

$$-\Delta\mathcal{U} = f(y) \quad (y \in K), \tag{1.37}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{U}|_{\gamma_1} = g_1(y) \quad (y \in \gamma_1), \\ \mathcal{U}|_{\gamma_2} + e_0\mathcal{U}(\omega - \omega_0,\ \beta_0 r)|_{\gamma_2} = g_2(y) \quad (y \in \gamma_2). \end{gathered} \tag{1.38}$$

Здесь $\mathcal{U}(\omega,\ r)$ — функция $\mathcal{U}(y)$, записанная в полярных координатах; $\beta_0 > 0$; $e_0 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функции $\mathcal{U} \in C_0^\infty(\bar{K} \setminus \{0\})$, $\mathcal{V}_t \in C^\infty(\bar{K}_t \setminus \{0\})$. Умножим $-\Delta\mathcal{U}$ на $\bar{\mathcal{V}}_t$ и проинтегрируем по K_t, $t = 1,\ 2$. Тогда, используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{gathered} \int\limits_{K_1} (-\Delta\mathcal{U}) \cdot \bar{\mathcal{V}}_1\, dy + \int\limits_{\gamma_1} \mathcal{U}|_{\gamma_1} \cdot \frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_1}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} d\gamma - \int\limits_{\gamma} \mathcal{U}|_{\gamma} \cdot \frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_1}{\partial n}\Big|_{\gamma} d\gamma = \\ = \int\limits_{K_1} \mathcal{U} \cdot (-\Delta\bar{\mathcal{V}}_1)\, dy + \int\limits_{\gamma_1} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} \cdot \bar{\mathcal{V}}_1|_{\gamma_1} d\gamma - \int\limits_{\gamma} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n}\Big|_{\gamma} \cdot \bar{\mathcal{V}}_1|_{\gamma} d\gamma, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \int\limits_{K_2} (-\Delta\mathcal{U}) \cdot \bar{\mathcal{V}}_2\, dy + \int\limits_{\gamma} \mathcal{U}|_{\gamma} \cdot \frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n}\Big|_{\gamma} d\gamma + \int\limits_{\gamma_2} \mathcal{U}|_{\gamma_2} \cdot \frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} d\gamma = \\ = \int\limits_{K_2} \mathcal{U} \cdot (-\Delta\bar{\mathcal{V}}_2)\, dy + \int\limits_{\gamma} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n}\Big|_{\gamma} \cdot \bar{\mathcal{V}}_2|_{\gamma} d\gamma + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} \cdot \bar{\mathcal{V}}_2|_{\gamma_2} d\gamma. \end{gathered}$$

Складывая последние два равенства, получаем

$$
\begin{gathered}
\sum_t \int\limits_{K_t} (-\Delta\mathcal{U})\cdot\bar{\mathcal{V}}_t\,dy + \int\limits_{\gamma_1} \mathcal{U}|_{\gamma_1}\cdot\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_1}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} d\gamma + \\
+\int\limits_{\gamma_2} \mathcal{U}|_{\gamma_2}\cdot\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} d\gamma + \int\limits_{\gamma} \mathcal{U}|_{\gamma}\cdot\left(\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n}\Big|_{\gamma} - \frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_1}{\partial n}\Big|_{\gamma}\right) d\gamma = \\
=\sum_t \int\limits_{K_t} \mathcal{U}\cdot(-\Delta\bar{\mathcal{V}}_t)\,dy + \int\limits_{\gamma_1} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1}\cdot\bar{\mathcal{V}}_1|_{\gamma_1}\,d\gamma + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2}\cdot\bar{\mathcal{V}}_2|_{\gamma_2}\,d\gamma + \\
+\int\limits_{\gamma} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n}\Big|_{\gamma}\cdot(\bar{\mathcal{V}}_2|_{\gamma} - \bar{\mathcal{V}}_1|_{\gamma})\,d\gamma.
\end{gathered} \tag{1.39}
$$

Далее, заметим, что

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\gamma_2} \mathcal{U}|_{\gamma_2}\cdot\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} d\gamma = \int\limits_{\gamma_2} (\mathcal{U}|_{\gamma_2} + e_0\mathcal{U}(\omega-\omega_0,\ \beta_0 r)|_{\gamma_2})\cdot\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} d\gamma - \\
-\int\limits_{\gamma_2} e_0\mathcal{U}(\omega-\omega_0,\ \beta_0 r)|_{\gamma_2}\cdot\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} d\gamma = \\
=\int\limits_{\gamma_2} (\mathcal{U}|_{\gamma_2} + e_0\mathcal{U}(\omega-\omega_0,\ \beta_0 r)|_{\gamma_2})\cdot\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} d\gamma - \\
-\int\limits_{\gamma} \mathcal{U}|_{\gamma}\cdot e_0\beta_0'\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}(\omega+\omega_0',\ \beta_0' r)\Big|_{\gamma} d\gamma,
\end{gathered}
$$

где $\beta_0' = 1/\beta_0,\ \omega_0' = \omega_0$. Отсюда и из (1.39) окончательно получим

$$
\begin{gathered}
\sum_t \int\limits_{K_t} (-\Delta\mathcal{U})\cdot\bar{\mathcal{V}}_t\,dy + \int\limits_{\gamma_1} \mathcal{U}|_{\gamma_1}\cdot\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_1}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} d\gamma + \\
+\int\limits_{\gamma_2} (\mathcal{U}|_{\gamma_2} + e_0\mathcal{U}(\omega+\omega_0,\ \beta_0 r)|_{\gamma_2})\cdot\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} d\gamma + \int\limits_{\gamma} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n}\Big|_{\gamma}\cdot(\bar{\mathcal{V}}_1|_{\gamma} - \bar{\mathcal{V}}_2|_{\gamma})\,d\gamma = \\
=\sum_t \int\limits_{K_t} \mathcal{U}\cdot(-\Delta\bar{\mathcal{V}}_t)\,dy + \int\limits_{\gamma_1} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1}\cdot\bar{\mathcal{V}}_1|_{\gamma_1}\,d\gamma + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2}\cdot\bar{\mathcal{V}}_2|_{\gamma_2}\,d\gamma + \\
\int\limits_{\gamma} \mathcal{U}|_{\gamma}\cdot\left(\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_1}{\partial n}\Big|_{\gamma} - \frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n}\Big|_{\gamma} + e_0\beta_0'\frac{\partial\bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}(\omega+\omega_0',\ \beta_0' r)\Big|_{\gamma}\right) d\gamma.
\end{gathered}
$$

Пример 1.2. Сохраняя обозначения примера 1.1, рассмотрим нелокальную задачу

$$
-\Delta\mathcal{U} = f(y) \quad (y\in K), \tag{1.40}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} = g_1(y) \qquad (y\in\gamma_1), \\
\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} + e_0\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial r}(\omega-\omega_0,\ \beta_0 r)\Big|_{\gamma_2} = g_2(y) \quad (y\in\gamma_2).
\end{gathered} \tag{1.41}
$$

Из формулы (1.39) и равенства

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} \cdot \bar{\mathcal{V}}_2|_{\gamma_2}\, d\gamma = \int\limits_{\gamma_2} \Big(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} + e_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}(\omega - \omega_0,\ \beta_0 r)\Big|_{\gamma_2}\Big) \cdot \bar{\mathcal{V}}_2|_{\gamma_2}\, d\gamma + \\ + \int\limits_{\gamma} \mathcal{U}|_{\gamma} \cdot e_0 (\beta_0')^2 \frac{\partial \bar{\mathcal{V}}_1}{\partial r}(\omega + \omega_0',\ \beta_0' r)\Big|_{\gamma}\, d\gamma$$

(где $\beta_0' = 1/\beta_0,\ \omega_0' = \omega_0$), получаем следующую формулу Грина:

$$\sum_t \int\limits_{K_t} (-\Delta \mathcal{U}) \cdot \bar{\mathcal{V}}_t\, dy + \int\limits_{\gamma_1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} \cdot (-\bar{\mathcal{V}}_1)|_{\gamma_1}\, d\gamma + \\ + \int\limits_{\gamma_2} \Big(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} + e_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}(\omega - \omega_0,\ \beta_0 r)\Big|_{\gamma_2}\Big) \cdot (-\bar{\mathcal{V}}_2)|_{\gamma_2}\, d\gamma + \int\limits_{\gamma} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n}\Big|_{\gamma} \cdot (\bar{\mathcal{V}}_1|_{\gamma} - \bar{\mathcal{V}}_2|_{\gamma})\, d\gamma =$$

$$= \sum_t \int\limits_{K_t} \mathcal{U} \cdot (-\Delta \bar{\mathcal{V}}_t)\, dy + \int\limits_{\gamma_1} (-\mathcal{U})|_{\gamma_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{V}}_1}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} d\gamma + \int\limits_{\gamma_2} (-\mathcal{U})|_{\gamma_2} \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} d\gamma + \\ + \int\limits_{\gamma} \mathcal{U}|_{\gamma} \cdot \Big(\frac{\partial \bar{\mathcal{V}}_1}{\partial n}\Big|_{\gamma} - \frac{\partial \bar{\mathcal{V}}_2}{\partial n}\Big|_{\gamma} + e_0 (\beta_0')^2 \frac{\partial \bar{\mathcal{V}}_1}{\partial r}(\omega + \omega_0',\ \beta_0' r)\Big|_{\gamma}\Big)\, d\gamma.$$

2. Для $n = 2,\ j = 1,\ \ldots,\ N$ положим

$$K_j = \{y:\ r > 0,\ b_{j1} < \omega < b_{j,R_j+1}\},$$

$$K_{jt} = \{y:\ r > 0,\ b_{jt} < \omega < b_{j,t+1}\}\ (t = 1,\ \ldots,\ R_j),$$
$$\gamma_{jq} = \{y:\ r > 0,\ \omega = b_{jq}\}\ (q = 1,\ \ldots,\ R_j + 1).$$

Формально заменим в дифференциальных операторах D_z на η и рассмотрим вспомогательную нелокальную краевую задачу с параметром $\eta \in \mathbb{R}^{n-2}$ относительно $u = (u_1,\ \ldots,\ u_N)$

$$\mathcal{P}_j(D_y,\ \eta) u_j = f_j(y) \quad (y \in K_j), \tag{1.42}$$

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \eta) u \equiv B_{j\sigma\mu}(D_y,\ \eta) u_j|_{\gamma_{j\sigma}} + \\ + \sum_{k,q,s} (B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ \eta) u_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y)|_{\gamma_{j\sigma}} = g_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j\sigma}) \tag{1.43}$$

$$(j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m).$$

Для $u_{jt} \in C_0^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\}),\ v_{jt} \in C^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\})$ (или $u_{jt} \in C^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\}),\ v_{jt} \in C_0^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\})$) положим

$$(u_{jt},\ v_{jt})_{K_{jt}} = \int\limits_{K_{jt}} u_{jt} \cdot \bar{v}_{jt}\, dy \quad (j = 1,\ \ldots,\ N;\ t = 1,\ \ldots,\ R_j).$$

Для $u_{\gamma_{jq}} \in C_0^\infty(\gamma_{jq}),\ v_{\gamma_{jq}} \in C^\infty(\gamma_{jq})$ (или $u_{\gamma_{jq}} \in C^\infty(\gamma_{jq}),\ v_{\gamma_{jq}} \in C_0^\infty(\gamma_{jq})$) положим

$$(u_{\gamma_{jq}},\ v_{\gamma_{jq}})_{\gamma_{jq}} = \int\limits_{\gamma_{jq}} u_{\gamma_{jq}} \cdot \bar{v}_{\gamma_{jq}}\, d\gamma \quad (j = 1,\ \ldots,\ N;\ q = 1,\ \ldots,\ R_j + 1).$$

Предположим, что функции $v_{jt}(y)$ заданы в K_{jt}; тогда через $v_j(y)$ будем обозначать следующую функцию, определенную в K_j: $v_j(y) \equiv v_{jt}(y)$ для $y \in K_{jt}$.

Теорема 1.8. *Пусть $\mathcal{P}_j$, $B_{j\sigma\mu}$ и т. д. — операторы, фигурирующие в теореме 1.7. Тогда для всех $u_j \in C_0^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\})$, $v_{jt} \in C^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\})$ (или $u_j \in C^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\})$, $v_{jt} \in C_0^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\})$) имеет место следующая формула Грина с параметром η:*

$$\begin{gathered}
\sum_j \Big\{ \sum_t (\mathcal{P}_j(D_y,\ \eta) u_j,\ v_{jt})_{K_{jt}} + \\
+ \sum_{\sigma,\mu} (\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \eta) u,\ F_{j\sigma\mu}(D_y,\ \eta) v_j|_{\gamma_{j\sigma}})_{\gamma_{j\sigma}} + \\
+ \sum_{q,\mu} (B_{jq\mu}(D_y,\ \eta) u_j|_{\gamma_{jq}},\ \mathcal{T}_{jq\mu}(D_y,\ \eta) v)_{\gamma_{jq}} \Big\} = \\
= \sum_j \Big\{ \sum_t (u_j,\ \mathcal{Q}_j(D_y,\ \eta) v_{jt})_{K_{jt}} + \\
+ \sum_{\sigma,\mu} (B'_{j\sigma\mu}(D_y,\ \eta) u_j|_{\gamma_{j\sigma}},\ C_{j\sigma\mu}(D_y,\ \eta) v_j|_{\gamma_{j\sigma}})_{\gamma_{j\sigma}} + \\
+ \sum_{q,\mu} (B'_{jq\mu}(D_y,\ \eta) u_j|_{\gamma_{jq}},\ \mathcal{T}_{jq,m+\mu}(D_y,\ \eta) v)_{\gamma_{jq}} \Big\}.
\end{gathered} \tag{1.44}$$

Здесь $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \eta)$ определен в (1.43);

$$\begin{gathered}
\mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ \eta) v = T_{jq\nu}(D_y,\ \eta) v_{j,q-1}|_{\gamma_{jq}} - T_{jq\nu}(D_y,\ \eta) v_{jq}|_{\gamma_{jq}} + \\
+ \sum_{k,\sigma,s} (T_{jq\nu k\sigma s}(D_y,\ \eta) v_k)(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s} y)|_{\gamma_{jq}} \\
(\nu = 1,\ \ldots,\ 2m);
\end{gathered}$$

$\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}$ преобразование переменных, определенное в теореме 1.7.

Доказательство. Введем функции $\psi_1,\ \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-2})$, такие, что

$$\psi_1(z) = 0 \text{ для } |z| > 1, \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \psi_1(z) dz = 1;$$

$$\psi_2(z) = 1 \text{ для } |z| < 1,\ \psi_2(z) = 0 \text{ для } |z| > 2.$$

Подставляя $\mathcal{U}_j(y,\ z) = e^{i(\eta,\ z)} \psi_1(z) u_j(y)$, $\mathcal{V}_{jt}(y,\ z) = e^{i(\eta,\ z)} \psi_2(z) v_{jt}(y)$ в равенство (1.30), получим (1.44). $\square$

Замечание 1.2. Заменяя в замечании 1.1 $H_a^{2m}(\cdot)$ и $H_{-a+2m}^{2m}(\cdot)$ на $E_a^{2m}(\cdot)$ и $E_{-a+2m}^{2m}(\cdot)$ соответственно, а теорему 1.1 на теорему 1.2, видим, что формула (1.44) может быть распространена по непрерывности на случай, когда $u_j \in E_a^{2m}(K_j)$, $v_{jt} \in E_{-a+2m}^{2m}(K_{jt})$.

3. Положим $\Pi_j = \{(\omega,\ \tau):\ b_{j1} < \omega < b_{j,R_j+1},\ \tau \in \mathbb{R}\}$, $\Pi_{jt} = \{(\omega,\ \tau):\ b_{jt} < \omega < b_{j,t+1},\ \tau \in \mathbb{R}\}$ $(t = 1,\ \dots,\ R_j)$.

Для $u_{jt} \in C_0^\infty(\bar{\Pi}_{jt}),\ v_{jt} \in C^\infty(\bar{\Pi}_{jt})$ (или $u_{jt} \in C^\infty(\bar{\Pi}_{jt}),\ v_{jt} \in C_0^\infty(\bar{\Pi}_{jt})$) обозначим

$$(u_{jt},\ v_{jt})_{\Pi_{jt}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{b_{jt}}^{b_{j,t+1}} u_{jt}(\omega,\ \tau) \cdot \overline{v_{jt}(\omega,\ \tau)}\, d\omega d\tau$$
$$(j = 1,\ \dots,\ N;\ t = 1,\ \dots,\ R_j).$$

Для $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (или $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$) обозначим $(\psi,\ \xi)_{\mathbb{R}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) \cdot \overline{\xi(\tau)}\, d\tau$. Для $\tilde{\mathcal{U}}_{jt},\ \tilde{\mathcal{V}}_{jt} \in C^\infty([b_{jt},\ b_{j,t+1}])$ обозначим

$$(\tilde{\mathcal{U}}_{jt},\ \tilde{\mathcal{V}}_{jt})_{(b_{jt},\ b_{j,t+1})} = \int\limits_{b_{jt}}^{b_{j,t+1}} \tilde{\mathcal{U}}_{jt}(\omega) \cdot \overline{\tilde{\mathcal{V}}_{jt}(\omega)}\, d\omega \quad (j = 1,\ \dots,\ N;\ t = 1,\ \dots,\ R_j).$$

Наконец, для $d,\ e \in \mathbb{C}$ положим $(d,\ e)_{\mathbb{C}} = d \cdot \bar{e}$.

Пусть функции $\tilde{\mathcal{V}}_{jt}(\omega)$ заданы в $[b_{jt},\ b_{j,t+1}]$; тогда будем обозначать через $\tilde{\mathcal{V}}_j(\omega)$ функцию, определенную в $[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]$ по формуле $\tilde{\mathcal{V}}_j(\omega) \equiv \tilde{\mathcal{V}}_{jt}(\omega)$ для $\omega \in (b_{jt},\ b_{j,t+1})$.

Формально полагая $D_z = 0$, запишем дифференциальные операторы в полярных координатах: $\mathcal{P}_j(D_y,\ 0) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0) = r^{-m_{j\sigma\mu}}\tilde{B}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$ и т. д.

Рассмотрим нелокальную краевую задачу (1.12), (1.13) с параметром λ.

Теорема 1.9. *Пусть $\mathcal{P}_j$, $B_{j\sigma\mu}$ и т. д. — операторы, фигурирующие в теореме 1.7. Тогда для всех $\tilde{\mathcal{U}}_j \in C^\infty([b_{j1},\ b_{j,R_j+1}])$, $\tilde{\mathcal{V}}_{jt} \in C^\infty([b_{jt},\ b_{j,t+1}])$*

имеет место следующая формула Грина с параметром λ:

$$
\begin{gathered}
\sum_j\Big\{\sum_t(\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}_j,\ \tilde{\mathcal{V}}_{jt})_{(b_{jt},\ b_{j,t+1})}+\\
+\sum_{\sigma,\mu}(\tilde{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}},\ \tilde{F}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}}_j|_{\omega=b_{j\sigma}})_{\mathbb{C}}+\\
+\sum_{q,\mu}(\tilde{B}_{jq\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}_j|_{\omega=b_{jq}},\ \tilde{\mathcal{T}}_{jq\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}})_{\mathbb{C}}\Big\}=\\
\\
=\sum_j\Big\{\sum_t(\tilde{\mathcal{U}}_j,\ \tilde{\mathcal{Q}}_j(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}}_{jt})_{(b_{jt},\ b_{j,t+1})}+\\
+\sum_{\sigma,\mu}(\tilde{B}'_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}_j|_{\omega=b_{j\sigma}},\tilde{C}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}}_j|_{\omega=b_{j\sigma}})_{\mathbb{C}}+\\
+\sum_{q,\mu}(\tilde{B}'_{jq\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}_j|_{\omega=b_{jq}},\ \tilde{\mathcal{T}}_{jq,m+\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}})_{\mathbb{C}}\Big\}.
\end{gathered}
\tag{1.45}
$$

Здесь $\tilde{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)$ определено в (1.13);

$$
\begin{gathered}
\tilde{\mathcal{T}}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}}=\tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}}_{j,q-1}(\omega)|_{\omega=b_{jq}}-\\
-\tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}}_{jq}(\omega)|_{\omega=b_{jq}}+\\
+\sum_{k,\sigma,s}(\beta'_{jqk\sigma s})^{i\lambda'-(\nu-1)}\tilde{T}_{jq\nu k\sigma s}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}}_k(\omega+\omega'_{jqk\sigma})|_{\omega=b_{jq}};
\end{gathered}
$$

$\lambda'=\bar{\lambda}-2i(m-1)$; $\omega'_{jqk\sigma}$ и $\beta'_{jqk\sigma s}$ — соответственно углы поворота и коэффициенты растяжения, определенные в теореме 1.7.

Доказательство. Положим $r=e^\tau,\ v_{jt}=r^{2m-2}w_{jt}$, $w_j(\omega,\ \tau)\equiv w_{jt}(\omega,\ \tau)$ для $(\omega,\ \tau)\in\Pi_{jt}$. Тогда из формулы (1.44) для $\eta=0$, получим

$$
\begin{gathered}
\sum_j\Big\{\sum_t\Big(\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau)u_j,\ w_{jt}\Big)_{\Pi_{jt}}+\\
+\sum_{\sigma,\mu}\Big(\tilde{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau)u,\tilde{F}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau-2i(m-1))w_j|_{\omega=b_{j\sigma}}\Big)_{\mathbb{R}}+\\
+\sum_{q,\mu}\Big(\tilde{B}_{jq\mu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau)u_j|_{\omega=b_{j\sigma}},\tilde{\mathcal{T}}_{jq\mu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau-2i(m-1))w\Big)_{\mathbb{R}}\Big\}=\\
\\
=\sum_j\Big\{\sum_t\Big(u_j,\ \tilde{\mathcal{Q}}_j(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau-2i(m-1))w_{jt}\Big)_{\Pi_{jt}}+\\
\sum_{\sigma,\mu}\Big(\tilde{B}'_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau)u_j|_{\omega=b_{j\sigma}},\tilde{C}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau-2i(m-1))w_j|_{\omega=b_{j\sigma}}\Big)_{\mathbb{R}}+\\
+\sum_{q,\mu}\Big(\tilde{B}'_{jq\mu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau)w_j|_{\omega=b_{jq}},\tilde{\mathcal{T}}_{jq,m+\mu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau-2i(m-1))w\Big)_{\mathbb{R}}\Big\},
\end{gathered}
\tag{1.46}
$$

где

$$\tilde{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau)u = \tilde{B}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \ D_\tau)u_j|_{\omega=b_{j\sigma}}+$$
$$+\sum_{k,q,s}\beta_{j\sigma kqs}^{-m_{j\sigma\mu}}\tilde{B}_{j\sigma\mu kqs}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau)u_k(\omega+\omega_{j\sigma kq},\ \tau+\ln\beta_{j\sigma kqs})|_{\omega=b_{j\sigma}},$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau-2i(m-1))w =$$
$$=\tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau-2i(m-1))w_{j,q-1}|_{\omega=b_{jq}}-$$
$$-\tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau-2i(m-1))w_{jq}|_{\omega=b_{jq}}+\sum_{k,\sigma,s}(\beta'_{jqk\sigma s})^{2(m-1)-(\nu-1)}\times$$
$$\times\tilde{T}_{jq\nu k\sigma s}(\omega,\ D_\omega,\ D_\tau-2i(m-1))w_k(\omega+\omega'_{jqk\sigma},\ \tau+\ln\beta'_{jqk\sigma s})|_{\omega=b_{jq}}.$$

Введем функции $\psi_1,\ \psi_2\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, такие, что

$$\psi_1(\tau)=0 \text{ для } |\tau|>1,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_1(\tau)d\tau=1;$$

$$\psi_2(\tau)=1 \text{ для } |\tau|<1,\ \psi_2(\tau)=0 \text{ для } |\tau|>2.$$

Подставляя $u_j(\omega,\ \tau)=e^{i\lambda\tau}\psi_1(\tau)\tilde{\mathcal{U}}_j(\omega)$, $w_{jt}(\omega,\ \tau)=e^{i\bar{\lambda}\tau}\psi_2(\tau)\tilde{\mathcal{V}}_{jt}(\omega)$ в равенство (1.46), получаем (1.45). □

Замечание 1.3. Формула (1.45) может быть распространена по непрерывности на случай, когда $\tilde{\mathcal{U}}_j\in W^{2m}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})$, $\tilde{\mathcal{V}}_{jt}\in W^{2m}(b_{jt},\ b_{j,t+1})$ (см. замечание 2.2 [19, гл. 2, § 2.3]).

1.5 Нелокальные эллиптические задачи трансмиссии. Сведение к задачам с однородными нелокальными и краевыми условиями

1. Положим $\mathcal{V}=(\mathcal{V}_1,\ \ldots,\ \mathcal{V}_N)$, $f=(f_1,\ \ldots,\ f_N)$. Здесь функции $\mathcal{V}_j(x)$ ($f_j(x)$) определены в Ξ_j ($j=1,\ \ldots,\ N$). Как и ранее, будем обозначать через $\mathcal{V}_{jt}$ (f_{jt}) сужение $\mathcal{V}_j$ (f_j) на Ξ_{jt}.

Формула Грина (1.30) порождает задачу, формально сопряженную к задаче (1.1), (1.2):

$$\mathcal{Q}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jt}=f_{jt}(x)\quad(x\in\Xi_{jt};\ t=1,\ \ldots,\ R_j),\tag{1.47}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_{j1\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} \equiv C_{j1\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{j1}(x)|_{\Gamma_{j1}} = g_{j1\mu}(x) \quad (x \in \Gamma_{j1}),\\ \mathcal{C}_{j,R_j+1,\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} \equiv C_{j,R_j+1,\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jR_j}(x)|_{\Gamma_{j,R_j+1}} =\\ = g_{j,R_j+1,\mu}(x) \quad (x \in \Gamma_{j,R_j+1}),\end{gathered} \tag{1.48}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} \equiv T_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{j,q-1}(x)|_{\Gamma_{jq}} - T_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jq}(x)|_{\Gamma_{jq}} +\\ + \sum_{k,\sigma,s} (T_{jq\nu k\sigma s}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_k)(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}y,\ z)|_{\Gamma_{jq}} = h_{jq\nu}(x) \quad (x \in \Gamma_{jq})\end{gathered} \tag{1.49}$$

$$(j = 1,\ \ldots,\ N;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m;\ q = 2,\ \ldots,\ R_j;\ \nu = 1,\ \ldots,\ 2m).$$

Здесь $\mathcal{Q}_j$ формально сопряжен к $\mathcal{P}_j$; операторы $C_{j\sigma\mu}$, $T_{jq\nu}$, $T_{jq\nu k\sigma s}$ имеют порядки $m'_{j\sigma\mu}$, $\nu-1$, $\nu-1$ соответственно; $\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}$ — оператор поворота на угол $\omega'_{jqk\sigma} = -\omega_{k\sigma jq}$ и растяжения в $\beta'_{jqk\sigma s} = 1/\beta_{k\sigma jqs}$ раз в плоскости $\{y\}$, при этом $b_{jq} + \omega'_{jqk\sigma} = b_{k\sigma}$, $0 < \beta'_{jqk\sigma s}$; $j,\ k = 1,\ \ldots,\ N$; $q = 2,\ \ldots,\ R_j$; $\sigma = 1,\ R_k + 1$; $s = 1,\ \ldots,\ S'_{jqk\sigma} = S_{k\sigma jq}$.

Задача (1.47)–(1.49) представляет собой систему $R_1 + \cdots + R_N$ уравнений относительно функций $\mathcal{V}_{jt}$ с краевыми условиями (1.48) и нелокальными условиями сопряжения (1.49). Будем называть задачу (1.47)–(1.49) *нелокальной задачей трансмиссии.*

Выпишем нелокальные задачи трансмиссии, которые формально сопряжены нелокальным краевым задачам из примеров 1.1 и 1.2.

Пример 1.3. Из примера 1.1 следует, что задача

$$-\Delta\mathcal{V}_t = f_t(y) \quad (y \in K_t;\ t = 1,\ 2),$$

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_1|_{\gamma_1} = g_1(y) \quad (y \in \gamma_1),\\ \mathcal{V}_2|_{\gamma_2} = g_2(y) \quad (y \in \gamma_2),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_1|_{\gamma} - \mathcal{V}_2|_{\gamma} = h_1(y) \quad (y \in \gamma),\\ \frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial n}\Big|_{\gamma} - \frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial n}\Big|_{\gamma} + e_0\beta'_0\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial n_1}(\omega + \omega'_0,\ \beta'_0 r)\Big|_{\gamma} = h_2(y) \quad (y \in \gamma)\end{gathered}$$

формально сопряжена к задаче (1.37), (1.38).

Пример 1.4. Из примера 1.2 следует, что задача

$$-\Delta\mathcal{V}_t = f_t(y) \quad (y \in K_t;\ t = 1,\ 2),$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} = g_1(y) \quad (y \in \gamma_1),\\ \frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_1} = g_2(y) \quad (y \in \gamma_2),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_1|_{\gamma} - \mathcal{V}_2|_{\gamma} = h_1(y) \quad (y \in \gamma),\\ \frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial n}\Big|_{\gamma} - \frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial n}\Big|_{\gamma} + e_0(\beta'_0)^2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial r}(\omega + \omega'_0,\ \beta'_0 r)\Big|_{\gamma} = h_2(y) \quad (y \in \gamma)\end{gathered}$$

формально сопряжена к задаче (1.40), (1.41).

Из теоремы 1.7 следует выполнение следующих условий [19, гл. 2, §§ 1.2, 1.4].

Условие 1.3. *Для всех* $j = 1, \ldots, N$ *операторы* $\mathcal{Q}_j(D_y, D_z)$ *собственно эллиптические.*

Условие 1.4. *Для всех* $j = 1, \ldots, N$; $\sigma = 1, R_j + 1$ *система* $\{C_{j\sigma\mu}(D_y, D_z)\}_{\mu=1}^m$ *является нормальной и накрывает оператор* $\mathcal{Q}_j(D_y, D_z)$ *на* $\Gamma_{j\sigma}$.

Условие 1.5. *Для всех* $j = 1, \ldots, N$; $q = 2, \ldots, R_j$ *система* $\{T_{jq\nu}(D_y, D_z)\}_{\nu=1}^{2m}$ *является нормальной на* Γ_{jq}.

Замечание 1.4. Нетрудно доказать, что при выполнении условия 1.5 система $\{T_{jq\nu}(D_y, D_z), T_{jq\nu}(D_y, D_z)\}_{\nu=1}^{2m}$ совместно накрывает оператор $\mathcal{Q}_j(D_y, D_z)$ на Γ_{jq} в смысле работы [36].

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}_a^l(\Xi_j) = \bigoplus\limits_{t=1}^{R_j} H_a^l(\Xi_{jt})$ с нормой $\|\mathcal{V}_j\|_{\mathcal{H}_a^l(\Xi_j)} = \left(\sum\limits_{t=1}^{R_j} \|\mathcal{V}_{jt}\|^2_{H_a^l(\Xi_{jt})}\right)^{1/2}$.

Введем пространства вектор–функций

$$\mathcal{H}_a^{l+2m,\,N}(\Xi) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{H}_a^{l+2m}(\Xi_j),\ \mathcal{H}_a^{l,\,N}(\Xi,\ \Gamma) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{H}_a^{l}(\Xi_j,\ \Gamma_j),$$

$$\mathcal{H}_a^l(\Xi_j,\ \Gamma_j) = \mathcal{H}_a^l(\Xi_j)\times$$
$$\times \prod_{\sigma=1,\,R_j+1} \prod_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}) \times \prod_{q=2}^{R_j}\prod_{\nu=1}^{2m} H_a^{l+2m-\nu+1/2}(\Gamma_{jq}).$$

Будем изучать решения $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_N) \in \mathcal{H}_a^{l+2m,\,N}(\Xi)$ задачи (1.47)–(1.49), полагая, что $f = \{f_j,\ g_{j\sigma\mu},\ h_{jq\nu}\} \in \mathcal{H}_a^{l,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$. Для этого введем ограниченный оператор $\mathcal{M} : \mathcal{H}_a^{l+2m,\,N}(\Xi) \to \mathcal{H}_a^{l,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$, соответствующий задаче (1.47)–(1.49) и действующий по формуле

$$\mathcal{M}\mathcal{V} = \{\mathcal{W}_j,\ \mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V},\ \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}\}$$

Здесь $\mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}$ и $\mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}$ определены в (1.48) и (1.49) соответственно; $\mathcal{W}_j(x) \equiv \mathcal{Q}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jt}(x)$ для $x \in \Xi_{jt}$. (Отметим, что запись $\mathcal{W}_j \equiv \mathcal{Q}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_j$ для $x \in \Xi_j$ была бы некорректной, поскольку функции $\mathcal{V}_j \in \mathcal{H}_a^{l+2m}(\Xi_j)$ могут иметь разрывы на Γ_{jq}, $q = 2, \ldots, R_j$.)

Лемма 1.12. *Для любых* $g_{j\sigma\mu} \in H_a^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})$, $h_{jq\nu} \in H_a^{l+2m-\nu+1/2}(\Gamma_{jq})$ $(j = 1, \dots, N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ \mu = 1, \dots, m;\ q = 2, \dots, R_j;\ \nu = 1, \dots, 2m)$ *существует вектор–функция* $\mathcal{V} \in \mathcal{H}_a^{l+2m,\,N}(\Xi)$, *такая, что*

$$\mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} = g_{j\sigma\mu}(x)\ (x \in \Gamma_{j\sigma}), \quad \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} = h_{jq\nu}(x)\ (x \in \Gamma_{jq}),$$

$$\|\mathcal{V}\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m,\,N}(\Xi)} \le c \sum_j \Big\{ \sum_{\sigma,\,\mu} \|g_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} + \\ + \sum_{q,\,\nu} \|h_{jq\nu}\|_{H_a^{l+2m-\nu+1/2}(\Gamma_{jq})} \Big\},$$

где $c > 0$ *не зависит от* $g_{j\sigma\mu},\ h_{jq\nu}$.

Доказательство. В силу условия 1.4 и леммы 3.1 [21], существует вектор–функция $\mathcal{W} \in H_a^{l+2m,\,N}(\Xi)$, такая, что

$$\mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{W} = g_{j\sigma\mu}(x) \quad (x \in \Gamma_{j\sigma}), \tag{1.50}$$

$$\|\mathcal{W}\|_{H_a^{l+2m,\,N}(\Xi)} \le k_1 \sum_{j,\,\sigma,\,\mu} \|g_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})}. \tag{1.51}$$

В силу условия 1.5 и леммы 3.1 [21], для всех $j = 1, \dots, N$ и $q = 2, \dots, R_j$ существуют функции $\hat{\mathcal{W}}_{j,q-1} \in H_a^{l+2m}(\Xi_{j,q-1})$, такие, что

$$T_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\hat{\mathcal{W}}_{j,q-1}(x)|_{\Gamma_{jq}} = h_{jq\nu}(x) - \\ - \sum_{k,\,\sigma,\,s} (T_{jq\nu k\sigma s}(D_y,\ D_z)\mathcal{W}_k)(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}y,\ z)|_{\Gamma_{jq}} \quad (x \in \Gamma_{jq}), \tag{1.52}$$

$$\|\hat{\mathcal{W}}_{j,q-1}\|_{H_a^{l+2m}(\Xi_{j,q-1})} \le k_2 \sum_\nu \|h_{jq\nu}(x) - \\ - \sum_{k,\,\sigma,\,s} (T_{jq\nu k\sigma s}(D_y,\ D_z)\mathcal{W}_k)(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}y,\ z)|_{\Gamma_{jq}}\|_{H_a^{l+2m-\nu+1/2}(\Gamma_{jq})}. \tag{1.53}$$

Поскольку функции ζ_{jq}, определенные формулой (1.17), являются мультипликаторами в пространствах $\mathcal{H}_a^{l+2m}(\Xi_j)$, из (1.50)–(1.53) следует, что функции

$$\mathcal{V}_j(x) = \begin{cases} \zeta_{j1}\mathcal{W}_{j1}(x) + \zeta_{j2}\hat{\mathcal{W}}_{j1}(x) & \text{для } x \in \Xi_{j1}, \\ \zeta_{j,t+1}\hat{\mathcal{W}}_{jt}(x) & \text{для } x \in \Xi_{jt}\ (t = 2,\ \dots,\ R_j - 1), \\ \zeta_{j,R_j+1}\mathcal{W}_{jR_j}(x) & \text{для } x \in \Xi_{jR_j} \end{cases}$$

удовлетворяют условиям леммы. □

2. Положим $v = (v_1, \ldots, v_N)$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$. Здесь функции $v_j(y)$ $(f_j(y))$ заданы в K_j $(j = 1, \ldots, N)$. Как и выше, будем обозначать через v_{jt} (f_{jt}) сужение функции v_j (f_j) на K_{jt}.

Формула Грина (1.44) (для $\eta = \theta \in S^{n-3} = \{z \in \mathbb{R}^{n-2} : |z| = 1\}$) порождает задачу, формально сопряженную к задаче (1.6), (1.7):

$$\mathcal{Q}_j(D_y, \theta)v_{jt} = f_{jt}(y) \quad (y \in K_{jt};\ t = 1, \ldots, R_j), \tag{1.54}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{C}_{j1\mu}(D_y, \theta)v \equiv C_{j1\mu}(D_y, \theta)v_{j1}(y)|_{\gamma_{j1}} = g_{j1\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j1}), \\ \mathcal{C}_{j,R_j+1,\mu}(D_y, \theta)v \equiv C_{j,R_j+1,\mu}(D_y, \theta)v_{jR_j}(y)|_{\gamma_{j,R_j+1}} = \\ = g_{j,R_j+1,\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j,R_j+1}), \end{gathered} \tag{1.55}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y, \theta)v \equiv T_{jq\nu}(D_y, \theta)v_{j,q-1}(y)|_{\gamma_{jq}} - T_{jq\nu}(D_y, \theta)v_{jq}(y)|_{\gamma_{jq}} + \\ + \sum_{k,\sigma,s} (T_{jq\nu k\sigma s}(D_y, \theta)v_k)(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}y)|_{\gamma_{jq}} = h_{jq\nu}(y) \quad (y \in \gamma_{jq}) \end{gathered} \tag{1.56}$$

$$(j = 1, \ldots, N;\ \mu = 1, \ldots, m;\ q = 2, \ldots, R_j;\ \nu = 1, \ldots, 2m).$$

Отметим, что задача (1.54)–(1.56) может быть также получена из задачи (1.47)–(1.49) формальной заменой D_z на θ.

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}_a^l(K_j) = \bigoplus\limits_{t=1}^{R_j} H_a^l(K_{jt})$ с нормой $\|v_j\|_{\mathcal{H}_a^l(K_j)} = \left(\sum\limits_{t=1}^{R_j} \|v_{jt}\|^2_{H_a^l(K_{jt})}\right)^{1/2}$ и пространство $\mathcal{E}_a^l(K_j) = \bigoplus\limits_{t=1}^{R_j} E_a^l(K_{jt})$ с нормой $\|v_j\|_{\mathcal{E}_a^l(K_j)} = \left(\sum\limits_{t=1}^{R_j} \|v_{jt}\|^2_{E_a^l(K_{jt})}\right)^{1/2}$.

Введем пространства вектор–функций

$$\mathcal{E}_a^{l+2m,\,N}(K) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{E}_a^{l+2m}(K_j),\ \mathcal{E}_a^{l,\,N}(K, \gamma) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{E}_a^{l}(K_j, \gamma_j),$$

$$\begin{gathered} \mathcal{E}_a^l(K_j, \gamma_j) = \mathcal{E}_a^l(K_j)\times \\ \times \prod_{\sigma=1,\,R_j+1} \prod_{\mu=1}^{m} E_a^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}) \times \prod_{q=2}^{R_j} \prod_{\nu=1}^{2m} E_a^{l+2m-\nu+1/2}(\gamma_{jq}). \end{gathered}$$

Будем изучать решения $v = (v_1, \ldots, v_N) \in \mathcal{E}_a^{l+2m,\,N}(\Xi)$ задачи (1.54)–(1.56), полагая, что $f = \{f_j, g_{j\sigma\mu}, h_{jq\nu}\} \in \mathcal{E}_a^{l,\,N}(\Xi, \Gamma)$. Введем ограниченный оператор $\mathcal{M}(\theta) : \mathcal{E}_a^{l+2m,\,N}(\Xi) \to \mathcal{E}_a^{l,\,N}(\Xi, \Gamma)$, соответствующий задаче (1.54)–(1.56) и действующий по формуле

$$\mathcal{M}v = \{w_j, \mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y, \theta)v, \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y, \theta)v\}.$$

Здесь $\mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)v$ и $\mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ \theta)v$ определены в (1.55) и (1.56) соответственно; $w_j(y) \equiv \mathcal{Q}_j(D_y,\ \theta)v_{jt}(y)$ для $y \in K_{jt}$.

Повторяя доказательство леммы 1.12, из леммы 3.1′ [21], получим следующее утверждение.

Лемма 1.13. *Для любых* $g_{j\sigma\mu} \in E_a^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})$, $h_{jq\nu} \in E_a^{l+2m-\nu+1/2}(\gamma_{jq})$ $(j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m;\ q = 2,\ \ldots,\ R_j;\ \nu = 1,\ \ldots,\ 2m)$ *существует вектор–функция* $v \in \mathcal{E}_a^{l+2m,\,N}(\Xi)$, *такая, что*

$$\mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)v = g_{j\sigma\mu}(y)\ (y \in \gamma_{j\sigma}), \quad \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ \theta)v = h_{jq\nu}(y)\ (y \in \gamma_{jq}),$$

$$\|v\|_{\mathcal{E}_a^{l+2m,\,N}(\Xi)} \le c\sum_j \Big\{ \textstyle\sum_{\sigma,\,\mu} \|g_{j\sigma\mu}\|_{E_a^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} + \\ + \textstyle\sum_{q,\,\nu} \|h_{jq\nu}\|_{E_a^{l+2m-\nu+1/2}(\gamma_{jq})} \Big\},$$

где $c > 0$ *не зависит от* $g_{j\sigma\mu},\ h_{jq\nu},\ \theta$.

1.6 Разрешимость нелокальных задач трансмиссии в плоских углах

1. Результаты данного параграфа аналогичны по структуре результатам § 1.2. Эти результаты потребуются при получении априорных оценок решений нелокальных задач трансмиссии в двугранных углах в § 1.7.

Рассмотрим вспомогательную нелокальную задачу трансмиссии для вектор–функции $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1,\ \ldots,\ \mathcal{V}_N) \in \mathcal{H}_a^{l+2m,\,N}(K)$

$$\mathcal{Q}_j(D_y,\ 0)\mathcal{V}_{jt} = f_{jt}(y) \quad (y \in K_{jt};\ t = 1,\ \ldots,\ R_j), \tag{1.57}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{C}_{j1\mu}(D_y,\ 0)\mathcal{V} \equiv C_{j1\mu}(D_y,\ 0)\mathcal{V}_{j1}(y)|_{\gamma_{j1}} = g_{j1\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j1}), \\ \mathcal{C}_{j,R_j+1,\mu}(D_y,\ 0)\mathcal{V} \equiv C_{j,R_j+1,\mu}(D_y,\ 0)\mathcal{V}_{jR_j}(y)|_{\gamma_{j,R_j+1}} = \\ = g_{j,R_j+1,\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j,R_j+1}), \end{gathered} \tag{1.58}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ 0)\mathcal{V} \equiv T_{jq\nu}(D_y,\ 0)\mathcal{V}_{j,q-1}(y)|_{\gamma_{jq}} - T_{jq\nu}(D_y,\ 0)\mathcal{V}_{jq}(y)|_{\gamma_{jq}} + \\ + \sum_{k,\sigma,s} (T_{jq\nu k\sigma s}(D_y,\ 0)\mathcal{V}_k)(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}y)|_{\gamma_{jq}} = h_{jq\nu}(y) \quad (y \in \gamma_{jq}) \end{gathered} \tag{1.59}$$

$$(j = 1,\ \ldots,\ N;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m;\ q = 2,\ \ldots,\ R_j;\ \nu = 1,\ \ldots,\ 2m),$$

где $f = \{f_j,\ g_{j\sigma\mu},\ h_{jq\nu}\} \in \mathcal{H}_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$.

Формально полагая $D_z = 0$, запишем дифференциальные операторы в полярных координатах: $\mathcal{Q}_j(D_y,\ 0) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{Q}}_j(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $C_{j\sigma\mu}(D_y,\ 0) = r^{-m'_{j\sigma\mu}}\tilde{C}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $T_{jq\nu}(D_y,\ 0) = r^{-\nu+1}\tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $T_{jq\nu k\sigma s}(D_y,\ 0) = r^{-\nu+1}\tilde{T}_{jq\nu k\sigma s}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$.

Положим $\tau = \ln r$ и сделаем преобразование Фурье по τ; тогда из (1.57)–(1.59) получаем

$$\tilde{\mathcal{Q}}_j(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{jt}(\omega,\ \lambda) = \tilde{F}_{jt}(\omega,\ \lambda) \quad (\omega \in (b_{jt},\ b_{j,t+1});\ t = 1,\ \dots,\ R_j), \tag{1.60}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{C}}_{j1\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}(\omega,\ \lambda) \equiv \tilde{C}_{j1\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{j1}(\omega,\ \lambda)|_{\omega=b_{j1}} = \\ = \tilde{G}_{j1\mu}(\lambda), \\ \tilde{\mathcal{C}}_{j,R_j+1,\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}(\omega,\ \lambda) \equiv \tilde{C}_{j,R_j+1,\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{jR_j}(\omega,\ \lambda)|_{\omega=b_{j,R_j+1}} = \\ = \tilde{G}_{j,R_j+1,\mu}(\lambda),\end{gathered} \tag{1.61}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{T}}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}(\omega,\ \lambda) \equiv \tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{j,q-1}(\omega,\ \lambda)|_{\omega=b_{jq}} - \\ - \tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{jq}(\omega,\ \lambda)|_{\omega=b_{jq}} + \\ + \sum_{k,\sigma,s} (\beta'_{jqk\sigma s})^{i\lambda-(\nu-1)}\tilde{T}_{jq\nu k\sigma s}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_k(\omega + \omega'_{jqk\sigma},\ \lambda)|_{\omega=b_{jq}} = \tilde{H}_{jq\nu}(\lambda)\end{gathered} \tag{1.62}$$

$$(j = 1,\ \dots,\ N;\ \mu = 1,\ \dots,\ m;\ q = 2,\ \dots,\ R_j;\ \nu = 1,\ \dots,\ 2m).$$

Здесь $F_{jt}(\omega,\ \tau) = e^{2m\tau}f_{jt}(\omega,\ \tau)$, $G_{j\sigma\mu}(\tau) = e^{m'_{j\sigma\mu}\tau}g_{j\sigma\mu}(\tau)$; $H_{jq\nu}(\tau) = e^{(\nu-1)\tau}h_{jq\nu}(\tau)$; $\tilde{\mathcal{V}}_{jt}$, $\tilde{F}_{jt}$, $\tilde{G}_{j\sigma\mu}$ и $\tilde{H}_{jq\nu}$ — преобразования Фурье функций $\mathcal{V}_{jt}$, F_{jt}, $G_{j\sigma\mu}$ и $H_{jq\nu}$ соответственно.

Данная задача представляет собой систему $R_1 + \dots + R_N$ обыкновенных дифференциальных уравнений (1.60) относительно функций $\tilde{\mathcal{V}}_{jt} \in W^{l+2m}(b_{jt},\ b_{j,t+1})$ с краевыми условиями (1.61) и нелокальными условиями сопряжения (1.62), связывающими скачки функций $\tilde{\mathcal{V}}_j$ и их производных во внутренних точках интервалов $(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})$ со значениями функций $\tilde{\mathcal{V}}_{k1}$ и $\tilde{\mathcal{V}}_{k,R_k+1}$, а также их производных в точках $\omega = b_{k1}$ и $\omega = b_{k,R_k+1}$ соответственно.

Отметим, что задача (1.60)–(1.62) формально сопряжена к задаче (1.12), (1.13) относительно формулы Грина (1.45).

2. Рассмотрим пространство $\mathcal{W}^l(b_{j1},\ b_{j,R_j+1}) = \bigoplus\limits_{t=1}^{R_j} W^l(b_{jt},\ b_{j,t+1})$ с нормой $\|\tilde{\mathcal{V}}_j\|_{\mathcal{W}^l(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})} = \left(\sum\limits_{t=1}^{R_j} \|\tilde{\mathcal{V}}_{jt}\|^2_{W^l(b_{jt},\ b_{j,t+1})}\right)^{1/2}$. Введем пространства вектор–функций

$$\mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)=\prod_{j=1}^{N}\mathcal{W}^{l+2m}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1}),$$

$$\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]=\prod_{j=1}^{N}\mathcal{W}^{l}[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}],$$

$$\mathcal{W}^{l}[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]=\mathcal{W}^{l}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})\times\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m\times\prod_{q=2}^{R_j}\mathbb{C}^{2m}.$$

Определим эквивалентные нормы, зависящие от параметра λ, в гильбертовых пространствах $\mathcal{W}^{l}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})$ и $\mathcal{W}^{l}[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]$:

$$|||\tilde{\mathcal{V}}_j|||_{\mathcal{W}^{l}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})}=\big(\|\tilde{\mathcal{V}}_j\|^2_{\mathcal{W}^{l}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})}+|\lambda|^{2l}\,\|\tilde{\mathcal{V}}_j\|^2_{L_2(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})}\big)^{1/2},$$

$$|||\{\tilde{F}_j,\ \tilde{G}_{j\sigma\mu},\ \tilde{H}_{jq\nu}\}|||_{\mathcal{W}^{l}[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]}=\Big(|||\tilde{F}_j|||^2_{\mathcal{W}^{l}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})}+$$
$$+\sum_{\sigma,\,\mu}\big(1+|\lambda|^{2(l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2)}\big)|\tilde{G}_{j\sigma\mu}|^2+\sum_{q,\,\nu}\big(1+|\lambda|^{2(l+2m-\nu+1/2)}\big)|\tilde{H}_{jq\nu}|^2\Big)^{1/2},$$

где $\tilde{\mathcal{V}}_j\in\mathcal{W}^{l}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})$, $\{\tilde{F}_j,\ \tilde{G}_{j\sigma\mu},\ \tilde{H}_{jq\nu}\}\in\mathcal{W}^{l}[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]$. Введем также нормы

$$|||\tilde{\mathcal{V}}|||_{W^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)}=\Big(\sum_j|||\tilde{\mathcal{V}}_j|||^2_{\mathcal{W}^{l+2m}(b_{j1},\ b_{j,R_j+1})}\Big)^{1/2},$$

$$|||\tilde{\Phi}|||_{\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]}=\Big(\sum_j|||\tilde{\Phi}_j|||^2_{\mathcal{W}^{l}[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]}\Big)^{1/2},$$

где $\tilde{\mathcal{V}}=(\tilde{\mathcal{V}}_1,\ \dots,\ \tilde{\mathcal{V}}_N)\in\mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)$, $\tilde{\Phi}=(\tilde{\Phi}_1,\ \dots,\ \tilde{\Phi}_N)\in\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$.

Рассмотрим оператор–функцию $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)\ :\ \mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)\to\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$, соответствующую задаче (1.60)–(1.62) и действующую по формуле

$$\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}=\{\tilde{\mathcal{W}}_j,\ \tilde{\mathcal{C}}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}},\ \tilde{\mathcal{T}}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}\}.$$

Здесь $\tilde{\mathcal{C}}_{j\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}$ и $\tilde{\mathcal{T}}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}$ определены в (1.61) и (1.62) соответственно; $\tilde{\mathcal{W}}_j(\omega)=\tilde{\mathcal{Q}}_j(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{jt}(\omega)$ для $\omega\in(b_{jt},\ b_{j,t+1})$.

Лемма 1.14. *Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda) : \mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2) \to \mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$ фредгольмов,* $\operatorname{ind}\tilde{\mathcal{M}}(\lambda) = 0$; *для любого $h \in \mathbb{R}$ существует $q_0 > 0$, такое, что при $\lambda \in J_{h,\,q_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im}\lambda = h,\ |\operatorname{Re}\lambda| \geq q_0\}$ оператор $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ имеет ограниченных обратный $\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2] \to \mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)$ и*

$$|||\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)\tilde{\Phi}|||_{\mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)} \leq c|||\tilde{\Phi}|||_{\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]} \tag{1.63}$$

для всех $\tilde{\Phi} \in \mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$, где $c > 0$ не зависит от λ и $\tilde{\Phi}$; оператор-функция $\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2] \to \mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)$ конечномероморфная.

Доказательство. 1) Если

$$\begin{gathered}\tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}(\omega,\ \lambda) = \tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{j,q-1}(\omega,\ \lambda)|_{\omega=b_{jq}} - \\ -\tilde{T}_{jq\nu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{jq}(\omega,\ \lambda)|_{\omega=b_{jq}}\end{gathered}$$

(то есть, если операторы $T_{jq\nu k\sigma s}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, соответствующие нелокальным членам, отсутствуют), то обозначим оператор $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ через $\tilde{\mathcal{M}}_0(\lambda)$. Следуя схеме, развитой М.С. Аграновичем и М.И. Вишиком [1] (см. также [27, § 5]), можно доказать следующее утверждение: найдутся такие $0 < \varepsilon_1 < \pi/2$ и $q_1 > 0$, что для

$$\lambda \in Q_{\varepsilon_1,q_1} = \{\lambda : |\lambda| \geq q_1,\ |\arg\lambda| \leq \varepsilon_1\} \cup \{\lambda : |\lambda| \geq q_1,\ |\arg\lambda - \pi| \leq \varepsilon_1\}$$

существует ограниченный обратный оператор $\tilde{\mathcal{M}}_0^{-1}(\lambda)$; более того, для всех $\tilde{\Phi} \in W^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$

$$|||\tilde{\mathcal{M}}_0^{-1}(\lambda)\tilde{\Phi}|||_{\mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)} \leq k_1|||\tilde{\Phi}|||_{\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]}; \tag{1.64}$$

здесь $k_1 > 0$ не зависит от λ и $\tilde{\Phi}$.

2) Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{M}}_t(\lambda) = \tilde{\mathcal{M}}_0(\lambda) + t(\tilde{\mathcal{M}}(\lambda) - \tilde{\mathcal{M}}_0(\lambda)), 0 \leq t \leq 1$. Докажем, что для любого $h \in \mathbb{R}$ существует $q_0 > 0$, такое, что если $\lambda \in J_{h,q_0}$ и $0 \leq t \leq 1$, то

$$k_2|||\tilde{\mathcal{M}}_t(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}|||_{\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]} \leq |||\tilde{\mathcal{V}}|||_{\mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)} \leq k_3|||\tilde{\mathcal{M}}_t(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}|||_{\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]} \tag{1.65}$$

для всех $\tilde{\mathcal{V}} \in \mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)$. Здесь $k_2,\ k_3 > 0$ не зависят от $\lambda,\ t$ и $\mathcal{V}$.

Положим $\tilde{\mathcal{M}}_t(\lambda)\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\Phi}$; тогда имеем

$$\tilde{\mathcal{M}}_0(\lambda)\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\Phi} + \tilde{\Psi},$$

где

$$\tilde{\Psi} = \{0,\ 0,\ -t\sum_{k,\,\sigma,\,s}(\beta'_{jqk\sigma s})^{i\lambda-(\nu-1)}\tilde{T}_{jq\nu k\sigma s}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_k(\omega + \omega'_{jqk\sigma},\ \lambda)|_{\omega=b_{jq}}\}.$$

В силу (1.64),

$$|||\tilde{\mathcal{V}}|||_{\mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2)} \le k_1|||\tilde{\Phi}+\tilde{\Psi}|||_{\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]}. \tag{1.66}$$

Рассмотрим $\varepsilon > 0$, определенное по формуле (1.16), и $q_0 \ge q_1$, такое, что $J_{h,q_0} \subset Q_{\varepsilon_1,q_1}$. Тогда, используя неравенства (1.3), (1.4), получим

$$\begin{gathered} I_{jq\nu k1s} = \big(1+|\lambda|^{l+2m-\nu+1/2}\big)\Big|(\beta'_{jqk1s})^{i\lambda-(\nu-1)}\times \\ \times\tilde{T}_{jq\nu k1s}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_k(\omega+\omega'_{jqk1})|_{\omega=b_{jq}}\Big| \le \\ k_4|\lambda|^{l+2m-\nu}\big\{\|\tilde{T}_{jq\nu k1s}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{k1}\|_{W^1(b_{k1},\ b_{k1}+\varepsilon/2)}+ \\ |\lambda|\,\|\tilde{T}_{jq\nu k1s}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{k1}\|_{L^2(b_{k1},\ b_{k1}+\varepsilon/2)}\big\} \le k_5|||\tilde{\mathcal{V}}_{k1}|||_{W^{l+2m}(b_{k1},\ b_{k1}+\varepsilon/2)}. \end{gathered} \tag{1.67}$$

При достаточно малом ε_1 и достаточно большом q_1 из неравенства (1.67), теоремы 4.1 [1, гл. 1, § 4], формулы Лейбница и интерполяционного неравенства (1.3) получаем

$$\begin{gathered} I_{jq\nu k1s} \le k_5|||\zeta_{k1}\tilde{\mathcal{V}}_{k1}|||_{W^{l+2m}(b_{k1},\ b_{k1}+\varepsilon/2)} \le k_6\big(|||\tilde{\mathcal{Q}}_k(\zeta_{k1}\tilde{\mathcal{V}}_{k1})|||_{W^l(b_{k1},\ b_{k2})}+ \\ +\sum_{\mu=1}^{m}\big(1+|\lambda|^{l+2m-m'_{k1\mu}-1/2}\big)\Big|\tilde{C}_{k1\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{k1}(\omega)|_{\omega=b_{k1}}\Big|\big) \le \\ \le k_7\big(|||\tilde{\mathcal{Q}}_k\tilde{\mathcal{V}}_{k1}|||_{W^l(b_{k1},\ b_{k2})}+|\lambda|^{-1}|||\tilde{\mathcal{V}}_{k1}|||_{W^{l+2m}(b_{k1},\ b_{k2})}+ \\ +\sum_{\mu=1}^{m}\big(1+|\lambda|^{l+2m-m'_{k1\mu}-1/2}\big)|\tilde{C}_{k1\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{k1}(\omega)|_{\omega=b_{k1}}|\big). \end{gathered} \tag{1.68}$$

Аналогично (1.67), (1.68) оценивается величина

$$\begin{gathered} I_{jq\nu k,R_k+1,s} = \big(1+|\lambda|^{l+2m-\nu+1/2}\big)\times \\ \times\Big|(\beta'_{jqk,R_k+1,s})^{i\lambda-(\nu-1)}\tilde{T}_{jq\nu k,R_k+1,s}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_k(\omega+\omega'_{jqk,R_k+1})|_{\omega=b_{jq}}\Big|. \end{gathered}$$

В результате получаем

$$\begin{gathered} I_{jq\nu k,R_k+1,s} \le k_8\big(|||\tilde{\mathcal{Q}}_k\tilde{\mathcal{V}}_{kR_k}|||_{W^l(b_{kR_k},\ b_{k,R_k+1})}+ \\ +|\lambda|^{-1}|||\tilde{\mathcal{V}}_{kR_k}|||_{W^{l+2m}(b_{kR_k},\ b_{kR_k+1})}+ \\ +\sum_{\mu=1}^{m}\big(1+|\lambda|^{l+2m-m'_{k,R_k+1,\mu}-1/2}\big)|\tilde{C}_{k,R_k+1,\mu}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{kR_k}(\omega)|_{\omega=b_{k,R_k+1}}|\big). \end{gathered} \tag{1.69}$$

Теперь при достаточно большом q_0 из (1.66), (1.68) и (1.69) следует второе из неравенств (1.65). Первое из неравенств (1.65) очевидно. Используя стандартный метод продолжения по параметру t (см. доказательство теоремы 7.1 [18, гл. 2, § 7]), неравенство (1.65) и существование ограниченного обратного оператора $\tilde{\mathcal{M}}_0^{-1}(\lambda)$ для $\lambda \in Q_{\varepsilon_1,q_1}$, нетрудно получить, что при $\lambda \in J_{h,q_0}$ оператор $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный и выполняется оценка (1.63).

3) Докажем, что оператор $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ фредгольмов. Для $\lambda_0 \in Q_{\varepsilon_1,q_1}$ имеем

$$\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)\tilde{\mathcal{M}}_0^{-1}(\lambda_0) = I + (\tilde{\mathcal{M}}(\lambda) - \tilde{\mathcal{M}}_0(\lambda_0))\tilde{\mathcal{M}}_0^{-1}(\lambda_0),$$

где I — единичный оператор в $\mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$. Поскольку операторы $\tilde{\mathcal{Q}}_j(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)$ содержат параметр λ лишь в младших членах, оператор

$$\tilde{\mathcal{M}}(\lambda) - \tilde{\mathcal{M}}_0(\lambda_0) : \mathcal{W}^{l+2m,\,N}(b_1,\ b_2) \to \mathcal{W}^{l+1,\,N}[b_1,\ b_2]$$

ограничен при каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, из компактности оператора вложения $W^{l+1}(b_{jt},\ b_{j,t+1})$ в $W^l(b_{jt},\ b_{j,t+1})$ вытекает, что оператор

$$(\tilde{\mathcal{M}}(\lambda) - \tilde{\mathcal{M}}_0(\lambda_0))\tilde{\mathcal{M}}_0^{-1}(\lambda_0) : \mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2] \to \mathcal{W}^{l,\,N}[b_1,\ b_2]$$

компактный. Таким образом, по теореме 15.1 [17, § 15], оператор $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ фредгольмов и $\operatorname{ind}\tilde{\mathcal{M}}(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Отсюда, из существования ограниченного обратного оператора $\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$ для $\lambda \in J_{h,q_0}$ и из теоремы 1 [4] следует, что оператор–функция $\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$ конечномероморфная. □

Повторяя доказательство леммы 2.2 [32, § 2], из (1.66)–(1.69) получим следующий результат.

Лемма 1.15. *Для любого $0 < \varepsilon' < 1/d'$ существует $q > 1$, такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\operatorname{Im}\lambda| \le \varepsilon' \ln|\operatorname{Re}\lambda|,\ |\operatorname{Re}\lambda| \ge q\}$ не содержит собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$, где $d' = \max|\ln\beta'_{jqk\sigma s}|$; для каждого собственного числа λ_0 оператор–функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ существует $\delta > 0$, такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ 0 < |\operatorname{Im}\lambda - \operatorname{Im}\lambda_0| < \delta\}$ не содержит собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$.*

3. Заменяя в доказательстве теоремы 2.1 [32, § 2] пространства Соболева $W^l(\cdot)$ на $\mathcal{W}^l(\cdot)$ и весовые пространства $H^l_a(\cdot)$ на $\mathcal{H}^l_a(\cdot)$, из леммы 1.14 получаем следующий результат.

Теорема 1.10. *Пусть на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ нет собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$; тогда нелокальная задача трансмиссии (1.57)–(1.59) имеет единственное решение $\mathcal{V} \in \mathcal{H}_a^{l+2m,\,N}(K)$ для любой правой части $f \in \mathcal{H}_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$ и*

$$\|\mathcal{V}\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m,\,N}(K)} \le c\|f\|_{\mathcal{H}_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)},$$

где $c > 0$ не зависит от f. При этом имеет место представление

$$\mathcal{V}(\omega,\ r) =$$
$$= (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty+i(a+1-l-2m)}^{+\infty+i(a+1-l-2m)} r^{i\lambda} \tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)\{\tilde{F}_{jt}(\omega,\ \lambda),\ \tilde{G}_{j\sigma\mu}(\lambda),\ \tilde{H}_{jq\nu}(\lambda)\}\, d\lambda.$$ [3)]

1.7 Априорные оценки решений нелокальных задач трансмиссии

1. В данном параграфе будут доказаны априорные оценки решений нелокальных задач трансмиссии, аналогичные оценкам из § 1.3.

Обозначим $d_1' = \min\{1,\ \beta'_{jqk\sigma s}\}/2$, $d_2' = 2\max\{1,\ \beta'_{jqk\sigma s}\}$, $\Xi_j^p = \Xi_j \cap \{r_1(d_1')^{6-p} < r < r_2(d_2')^{6-p},\ |z| < 2^{-p-1}\}$, $\Xi_{jt}^p = \Xi_{jt} \cap \{r_1(d_1')^{6-p} < r < r_2(d_2')^{6-p},\ |z| < 2^{-p-1}\}$, где $j = 1,\ \dots,\ N$; $t = 1,\ \dots,\ R_j$; $p = 0,\ \dots,\ 6$; $0 < r_1 < r_2$.

Введем пространство $\mathcal{W}^l(\Xi_j^p) = \bigoplus\limits_{t=1}^{R_j} W^l(\Xi_{jt}^p)$ с нормой $\|\mathcal{V}_j\|_{\mathcal{W}^l(\Xi_j^p)} = \left(\sum\limits_{t=1}^{R_j} \|\mathcal{V}_{jt}\|^2_{W^l(\Xi_{jt}^p)}\right)^{1/2}$.

Лемма 1.16. *Пусть $\mathcal{V}_j \in \mathcal{W}^{2m}(\Xi_j^0)$,*

$$\begin{gathered} \mathcal{Q}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jt} \in W^l(\Xi_{jt}^0), \\ \mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} \in W^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma} \cap \bar{\Xi}_j^0), \\ \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} \in W^{l+2m-\nu+1/2}(\Gamma_{jq} \cap \bar{\Xi}_j^0) \end{gathered} \tag{1.70}$$

[3)] Данное соотношение понимается в следующем смысле:

$$\lim_{A\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{b_{j1}}^{b_{j,R_j+1}} \int\limits_0^{\infty} \Big|\mathcal{V}_j(\omega,\ r) -$$
$$- (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-A+i(a+1-l-2m)}^{A+i(a+1-l-2m)} r^{i\lambda} [\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)\{\tilde{F}_{jt}(\omega,\ \lambda),\ \tilde{G}_{j\sigma\mu}(\lambda),\ \tilde{H}_{jq\nu}(\lambda)\}\, d\lambda\Big|^2 \times$$
$$\times r^{2(a+1-l-2m)-1} dr d\omega = 0,$$

где $[\cdot]_j$ обозначает j-ю координату N-мерного вектора.

$$(j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m;\\ q = 2,\ \ldots,\ R_j;\ \nu = 1,\ \ldots,\ 2m);$$

тогда $\mathcal{V} \in \prod\limits_j \mathcal{W}^{l+2m}(\Xi_j^3)$ *и для* $|\lambda| \geq 1$

$$\begin{gathered}\sum_j \|\mathcal{V}_j\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(\Xi_j^6)} \leq c \sum_j \Big\{ \sum_t \|\mathcal{Q}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jt}\|_{W^l(\Xi_{jt}^3)} + \\ + \sum_{\sigma,\,\mu} \|\mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}\|_{W^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}\cap\bar{\Xi}_j^3)} + \\ + \sum_{q,\,\nu} \|\mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}\|_{W^{l+2m-\nu+1/2}(\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^3)} + \\ + |\lambda|^{-1}\|\mathcal{V}_j\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(\Xi_j^3)} + |\lambda|^{l+2m-1}\|\mathcal{V}_j\|_{L_2(\Xi_j^3)} \Big\},\end{gathered} \tag{1.71}$$

где $c > 0$ *не зависит от* λ *и* $\mathcal{V}$.

Доказательство. Поскольку функции ζ_{jq} $(q = 1,\ \ldots,\ R_j + 1)$, определяемые формулой (1.17), являются мультипликаторами в пространствах $W^l(\Xi_{jt}^p)$ $(t = 1,\ \ldots,\ R_j)$, имеем $\zeta_{j\sigma}\mathcal{V}_j \in W^{2m}(\Xi_j^0)$ $(\sigma = 1,\ R_j + 1)$. Применим теорему 5.1 [19, гл. 2, § 5.1] к функциям $\zeta_{j\sigma}\mathcal{V}_j$ и к оператору $\{\mathcal{Q}_j(D_y,\ D_z),\ \mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\}$; тогда из (1.70) и формулы Лейбница получим

$$\zeta_{j\sigma}\mathcal{V}_j \in\ W^{l+2m}(\Xi_j^1). \tag{1.72}$$

Положим $\mathcal{W}_{jq\nu} = \sum\limits_{k,\,\sigma,\,s} (T_{jq\nu k\sigma s}(D_y,\ D_z)(\zeta_{k\sigma}\mathcal{V}_k))(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}y,\ z)$. Очевидно,

$$\mathcal{W}_{jq\nu}|_{\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^2} = \sum_{k,\,\sigma,\,s} (T_{jq\nu k\sigma s}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_k))(\mathcal{G}'_{jqk\sigma s}y,\ z)|_{\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^2}. \tag{1.73}$$

Из равенства (1.73) и соотношений (1.70), (1.72) следует, что

$$\begin{gathered}T_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{j,q-1}|_{\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^2} - T_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jq}|_{\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^2} = \\ = \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} - \mathcal{W}_{jq\nu}|_{\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^2} \in W^{l+2m-\nu+1/2}(\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^2).\end{gathered} \tag{1.74}$$

Далее, из (1.70), (1.74), замечания 1.4 и теоремы 1 [36, § 2] вытекает, что $\mathcal{V}_j \in \mathcal{W}^{l+2m}(\Xi_j^3)$ и

$$\begin{gathered}\sum_j \|\mathcal{V}_j\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(\Xi_j^6)} \leq k_1 \sum_j \Big\{ \sum_t \|\mathcal{Q}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jt}\|_{W^l(\Xi_{jt}^5)} + \\ + \sum_{\sigma,\,\mu} \|\mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}\|_{W^{l+2m-m'_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}\cap\bar{\Xi}_j^5)} + \\ + \sum_{q,\,\nu} \|T_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{j,q-1}|_{\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^5} - \\ - T_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jq}|_{\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^5}\|_{W^{l+2m-\nu+1/2}(\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^5)} + \|\mathcal{V}_j\|_{L_2(\Xi_j^5)} \Big\}.\end{gathered} \tag{1.75}$$

Снова применяя теорему 5.1 [19, гл. 2, § 5.1], формулу Лейбница и неравенство (1.3), получаем

$$
\begin{gathered}
\|\mathcal{W}_{jq\nu}|_{\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^5}\|_{W^{l+2m-\nu+1/2}(\Gamma_{jq}\cap\bar{\Xi}_j^5)} \le k_2 \sum_{k,\,\sigma} \|\zeta_{k\sigma}\mathcal{V}_k\|_{W^{l+2m}(\Xi_k^4)} \le \\
\le k_3 \sum_k \Big\{ \sum_t \|\mathcal{Q}_k(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{kt}\|_{W^l(\Xi_{kt}^3)} + \\
+ \sum_{\sigma,\,\mu} \|\mathcal{C}_{k\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V}\|_{W^{l+2m-m'_{k\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{k\sigma}\cap\bar{\Xi}_j^3)} + \\
+ |\lambda|^{-1}\|\mathcal{V}_k\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(\Xi_k^3)} + |\lambda|^{l+2m-1}\|\mathcal{V}_k\|_{L_2(\Xi_k^3)} \Big\}.
\end{gathered}
\tag{1.76}
$$

Из (1.75), (1.73) и (1.76) следует неравенство (1.71). □

Обозначим $\mathcal{W}^l_{\mathrm{loc}}(\bar{\Xi}_j \setminus M) = \bigoplus\limits_{t=1}^{R_j} W^l_{\mathrm{loc}}(\bar{\Xi}_{jt} \setminus M)$.

Теорема 1.11. *Пусть $\mathcal{V} \in \prod\limits_j \mathcal{W}^{2m}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Xi}_j \setminus M)$ — решение нелокальной задачи трансмиссии (1.47)–(1.49), такое, что $\mathcal{V} \in H^{0,\,N}_{a-l-2m}(\Xi)$ и $f \in \mathcal{H}^{l,\,N}_a(\Xi,\ \Gamma)$; тогда $\mathcal{V} \in \mathcal{H}^{l+2m,\,N}_a(\Xi)$ и*

$$
\|\mathcal{V}\|_{\mathcal{H}^{l+2m,\,N}_a(\Xi)} \le c\big(\|f\|_{\mathcal{H}^{l,\,N}_a(\Xi,\ \Gamma)} + \|\mathcal{V}\|_{H^{0,\,N}_{a-l-2m}(\Xi)}\big), \tag{1.77}
$$

где $c > 0$ не зависит от $\mathcal{V}$.

Доказательство. Из леммы 1.16 следует, что $\mathcal{V} \in \prod\limits_j \mathcal{W}^{l+2m}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Xi}_j \setminus M)$. Теперь, повторяя доказательство леммы 3.2 [32, § 3] и заменяя в нем $W^l(\cdot)$ на $\mathcal{W}^l(\cdot)$ и весовые пространства $H^l_a(\cdot)$ на $\mathcal{H}^l_a(\cdot)$, из лемм 1.12 и 1.16 получим, что $\mathcal{V} \in \mathcal{H}^{l+2m,\,N}_a(\Xi)$ и выполняется априорная оценка (1.77). □

2. Положим $K_j^{ps} = K_j \cap \{r_1(d_1')^{6-p} \cdot 2^s < r < r_2(d_2')^{6-p} \cdot 2^s\}$, $K_{jt}^{ps} = K_{jt} \cap \{r_1(d_1')^{6-p} \cdot 2^s < r < r_2(d_2')^{6-p} \cdot 2^s\}$, где $0 < r_1 < r_2$; $s \ge 1$; $j = 1,\ \ldots,\ N$; $p = 0,\ \ldots,\ 6$.

Введем пространство $\mathcal{W}^l(K_j^{ps}) = \bigoplus\limits_{t=1}^{R_j} W^l(K_{jt}^{ps})$ с нормой $\|v_j\|_{\mathcal{W}^l(K_j^{ps})} = \left(\sum\limits_{t=1}^{R_j} \|v_{jt}\|^2_{W^l(\Xi_{jt}^{ps})}\right)^{1/2}$.

Лемма 1.17. *Пусть* $s \geq 1$, $\theta \in S^{n-3}$. *Предположим, что* $v_j \in \mathcal{W}^{2m}(K_j^{0s})$,

$$\mathcal{Q}_j(D_y,\ \theta)v_{jt} \in W^l(K_{jt}^{0s}),$$

$$\mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)v = 0 \quad (y \in \gamma_{j\sigma} \cap \bar{K}_j^{0s}),\ \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ \theta)v = 0 \quad (y \in \gamma_{jq} \cap \bar{K}_j^{0s})$$

$$(j = 1,\ \ldots,\ N,\ \sigma = 1,\ R_j + 1,\ \mu = 1,\ \ldots,\ m,\\ q = 2,\ \ldots,\ R_j,\ \nu = 1,\ \ldots,\ 2m);$$

тогда $v \in \prod\limits_j \mathcal{W}^{l+2m}(K_j^{3s})$ *и для всех* $|\lambda| \geq 1$

$$\sum_j 2^{sa}\|v_j\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K_j^{6s})} \leq c\sum_j\big\{2^{sa}\sum_t\|\mathcal{Q}_j(D_y,\ \theta)v_{jt}\|_{W^l(K_{jt}^{3s})}+\\ +|\lambda|^{-1}2^{sa}\|v_j\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K_j^{3s})} + |\lambda|^{l+2m-1}2^{s(a-l-2m)}\|v_j\|_{L_2(K_j^{3s})}\big\}, \tag{1.78}$$

где $c > 0$ *не зависит от* v, θ, λ *и* s.

Доказательство. Повторяя доказательство леммы 1.16 и заменяя Ξ_j^p на K_j^{ps} и D_z на θ, получим $v \in \prod\limits_j \mathcal{W}^{l+2m}(K_j^{3s})$. Теперь, повторяя доказательство леммы 3.3 [32, § 3] и заменяя в нем $W^l(\cdot)$ на $\mathcal{W}^l(\cdot)$ и $H_a^l(\cdot)$ на $\mathcal{H}_a^l(\cdot)$, из априорной оценки (1.71) выводим оценку (1.78). □

Теорема 1.12. *Пусть* $v \in \prod\limits_j \mathcal{W}_{\mathrm{loc}}^{2m}(\bar{K}_j \setminus \{0\})$ *— решение задачи (1.54)–(1.56), такое, что* $v \in E_{a-l-2m}^{0,\,N}(K)$ *и* $f \in \mathcal{E}_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$; *тогда* $v \in \mathcal{E}_a^{l+2m,\,N}(K)$ *и*

$$\|v\|_{\mathcal{E}_a^{l+2m,\,N}(K)} \leq c\big(\|f\|_{\mathcal{E}_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)} + \|v\|_{E_{a-l-2m}^{0,\,N}(K)}\big), \tag{1.79}$$

где $c > 0$ *не зависит от* v *и* $\theta \in S^{n-3}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.5, в котором следует заменить $W^l(\cdot)$, $H_a^l(\cdot)$, $E_a^l(\cdot)$ на $\mathcal{W}^l(\cdot)$, $\mathcal{H}_a^l(\cdot)$, $\mathcal{E}_a^l(\cdot)$; леммы 1.5, 1.10, 1.11 на леммы 1.13, 1.16, 1.17 соответственно; теорему 1.4 на теорему 1.11. □

Из теоремы 1.10 и леммы 1.17 получаем следующий результат (ср. с доказательством теоремы 3.1 [32, § 3], в которой $E_a^l(\cdot)$ следует заменить на $\mathcal{E}_a^l(\cdot)$).

Теорема 1.13. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$*; тогда для всех решений* $v \in \mathcal{E}_a^{l+2m,\,N}(K)$ *нелокальной задачи трансмиссии (1.54)–(1.56) и всех* $\theta \in S^{n-3}$ *имеем*

$$\|v\|_{\mathcal{E}_a^{l+2m,\,N}(K)} \le c\big(\|f\|_{\mathcal{E}_a^{l,\,N}(K,\,\gamma)} + \sum_j \|v_j\|_{L_2(K_j\cap S')}\big), \tag{1.80}$$

где $S' = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < R_1' < r < R_2'\}$*;* $c > 0$ *не зависит от* θ *и* v*.*

Если при некотором $\theta \in S^{n-3}$ *оценка (1.80) выполняется для всех решений нелокальной задачи трансмиссии (1.54)–(1.56), то прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$*.*

Из теоремы 1.13 следует конечномерность ядра и замкнутость образа оператора $\mathcal{M}(\theta)$.

1.8 Априорные оценки решений одной вспомогательной задачи в $\mathbb{R}^n$

1. В § 1.9 будет установлена связь между ядрами операторов $\mathcal{M}(\theta)$ и $\mathcal{L}(\theta)^*$ ($\mathcal{L}(\theta)^*$ — оператор, сопряженный к $\mathcal{L}(\theta)$). Для изучения оператора $\mathcal{L}(\theta)^*$ нам понадобится утверждение об априорных оценках и гладкости решений одной вспомогательной задачи. Докажем это утверждение в данном параграфе.

Пусть $\mathcal{P}(\xi',\ -i\dfrac{d}{dx_n})$ и $B_\nu(\xi',\ -i\dfrac{d}{dx_n})$ ($\nu = 1,\ \dots,\ J;\ J \ge 1$) — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и параметром $\xi' = (\xi_1,\ \dots,\ \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, такие, что после замены $-i\dfrac{d}{dx_n}$ на ξ_n получаются полиномы порядков $2m$ и $m_\nu \le 2m-1$ соответственно, однородные по переменной $(\xi',\ \xi_n)$.

Пусть выполняется следующее условие.

Условие 1.6. $\mathcal{P}(\xi',\ \xi_n) \ne 0$ *для всех* $(\xi',\ \xi_n) \ne 0$*.*

Рассмотрим ограниченный оператор $L_{\xi'} : W^{2m}(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J$, действующий по формуле

$$L_{\xi'}u = (\mathcal{P}(\xi',\ -i\frac{d}{dx_n})u,\ B_1(\xi',\ -i\frac{d}{dx_n})u|_{x_n=0},\ \dots,\ B_J(\xi',\ -i\frac{d}{dx_n})u|_{x_n=0}).$$

Лемма 1.18. *Пусть $n \geq 2$; тогда для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi' \neq 0$, оператор $L_{\xi'}$ фредгольмов, а его ядро тривиально.*

Доказательство. Поскольку $n \geq 2$, условие 1.6 дает

$$k_1(1+|\xi_n|^2)^{2m} \leq |\mathcal{P}(\xi',\ \xi_n)|^2 \leq k_2(1+|\xi_n|^2)^{2m} \text{ для } \xi' \neq 0. \tag{1.81}$$

Здесь $k_1,\ k_2$ зависят от ξ' и не зависят от ξ_n. Умножая первое из неравенств (1.81) на $|\tilde{u}(\xi_n)|^2$ ($\tilde{u}$ — преобразование Фурье функции u по переменной x_n) и интегрируя по $\mathbb{R}$, получаем

$$\|u\|_{W^{2m}(\mathbb{R})} \leq k_3\|\mathcal{P}(\xi',\ -i\frac{d}{dx_n})u\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где $k_3 > 0$ зависит только от ξ' и не зависит от u. Последнее неравенство означает, что оператор $L_{\xi'}$ имеет тривиальное ядро и замкнутый образ.

Покажем, что коядро оператора $L_{\xi'}$ имеет конечную размерность. Используя преобразование Фурье и неравенство (1.81), легко проверить, что для $n \geq 2,\ \xi' \neq 0$, оператор $\mathcal{P}(\xi',\ -i\frac{d}{dx_n})$ отображает $W^{2m}(\mathbb{R})$ на все пространство $L_2(\mathbb{R})$. Следовательно, оператор $L_{\xi'}$ отображает $W^{2m}(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}^J$, где $\mathbb{M}^J$ замкнутое (поскольку образ оператора $L_{\xi'}$ замкнут) подпространство в $\mathbb{C}^J$. Но $\mathbb{C}^J$ — конечномерное пространство; значит, коядро оператора $L_{\xi'}$ также конечномерно. □

Рассмотрим сопряженный оператор $L^*_{\xi'} : L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J \to W^{-2m}(\mathbb{R})$ [4)], действующий на элемент $\Psi = (\psi,\ d_1,\ \ldots,\ d_J) \in L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J$ по формуле

$$< u,\ L^*_{\xi'}\Psi > = < \mathcal{P}(\xi',\ -i\frac{d}{dx_n})u,\ \psi > + \sum_{\nu=1}^{J} < B_\nu(\xi',\ -i\frac{d}{dx_n})u|_{x_n=0},\ d_\nu >$$

для всех $u \in W^{2m}(\mathbb{R})$. Здесь и далее скобки $< \cdot,\ \cdot >$ обозначают полуторалинейные формы на соответствующих парах сопряженных пространств.

Лемма 1.19. *Пусть $n \geq 2$; тогда для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi' \neq 0$, имеем:*

I) оператор $L^*_{\xi'}$ фредгольмов, его образ совпадает с $W^{-2m}(\mathbb{R})$;

II) для всех $\Psi = (\psi,\ d_1,\ \ldots,\ d_J) \in L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J$ выполняется оценка

$$\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq c_{\xi'}\big(\|L^*_{\xi'}\Psi\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} + \sum_{\nu=1}^{J}|d_\nu|\big), \tag{1.82}$$

[4)] $W^{-l}(\mathbb{R}^n)$, $l > 0$, $n \geq 1$, есть пространство, сопряженное к $W^l(\mathbb{R}^n)$.

где $c_{\xi'} > 0$ *зависит от* ξ' *и не зависит от* Ψ*;*

III) если $\xi' \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, *где* $\mathbb{K}$ *— компакт, такой, что* $\mathbb{K} \cap \{0\} = \varnothing$, *то выполняется неравенство (1.82) с константой* c, *не зависящей от* ξ'.

Доказательство. I) следует из леммы 1.18. Докажем II). Обозначим через $\ker L^*_{\xi'}$ ядро оператора $L^*_{\xi'}$. Так как $L^*_{\xi'}$ фредгольмов, $\ker L^*_{\xi'}$ имеет конечную размерность.

Покажем, что в пространстве $\ker L^*_{\xi'}$ можно ввести норму

$$\|\hat{\Psi}\|_{\ker L^*_{\xi'}} = \left(\sum_{\nu=1}^{J} |\hat{d}_\nu|^2\right)^{1/2}, \ \hat{\Psi} = (\hat{\psi},\ \hat{d}_1,\ \ldots,\ \hat{d}_J) \in \ker L^*_{\xi'} \subset L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J,$$

которая будет эквивалентна обычной норме в $L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J$. Из всех свойств нормы не очевидным является следующее: $\hat{\Psi} = 0$, если $\|\hat{\Psi}\|_{\ker L^*_{\xi'}} = 0$. Проверим его. Пусть $\|\hat{\Psi}\|_{\ker L^*_{\xi'}} = 0$; тогда $\hat{\Psi} = (\hat{\psi},\ 0,\ \ldots,\ 0)$. Так как $\hat{\Psi} \in \ker L^*_{\xi'}$, из определения оператора $L^*_{\xi'}$ следует, что

$$< \mathcal{P}(\xi',\ -i\frac{d}{dx_n})u,\ \hat{\psi} >= 0 \tag{1.83}$$

для всех $u \in W^{2m}(\mathbb{R})$.

Как отмечалось в доказательстве леммы 1.18, оператор $\mathcal{P}(\xi',\ -i\dfrac{d}{dx_n})$ отображает $W^{2m}(\mathbb{R})$ на все $L_2(\mathbb{R})$, если $n \geq 2,\ \xi' \neq 0$. Отсюда и из (1.83) вытекает, что $\hat{\psi} = 0$; следовательно, $\hat{\Psi} = 0$.

Теперь эквивалентность норм $\|\cdot\|_{\ker L^*_{\xi'}}$ и $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J}$ следует из конечномерности пространства $\ker L^*_{\xi'}$.

Оператор $L^*_{\xi'}$ замкнут и имеет замкнутый образ; поэтому из теоремы 2.3 [17, § 2] следует, что для любого элемента $\Psi = (\psi,\ d_1,\ \ldots,\ d_J) \in L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J$ существует элемент $\Phi \in L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J$, такой, что $L^*_{\xi'}\Psi = L^*_{\xi'}\Phi$ и

$$\|\Phi\|_{L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J} \leq k_1 \|L^*_{\xi'}\Psi\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})},$$

где $k_1 > 0$ зависит от ξ' и не зависит от Φ и Ψ. Но $\Psi = \Phi + \hat{\Psi}$, где $\hat{\Psi} = (\hat{\psi},\ \hat{d}_1,\ \ldots,\ \hat{d}_J) \in \ker L^*_{\xi'}$; следовательно,

$$\|\Psi\|_{L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J} \leq k_1 \|L^*_{\xi'}\Psi\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} + \|\hat{\Psi}\|_{L_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^J}.$$

По доказанному, нормы $\|\cdot\|_{\ker L^*_{\xi'}}$ и $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R})\times\mathbb{C}^J}$ эквивалентны; поэтому

$$\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \|\Psi\|_{L_2(\mathbb{R})\times\mathbb{C}^J} \le k_1\|L^*_{\xi'}\Psi\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} + k_2\sum_{\nu=1}^{J}|\hat{d}_\nu| \le$$
$$\le k_1\|L^*_{\xi'}\Psi\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} + k_2\sum_{\nu=1}^{J}|d_\nu| + k_2\|\Phi\|_{L_2(\mathbb{R})\times\mathbb{C}^J} \le$$
$$\le k_1\|L^*_{\xi'}\Psi\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} + k_2\sum_{\nu=1}^{J}|d_\nu| + k_1k_2\|L^*_{\xi'}\Psi\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} \le$$
$$\le c_{\xi'}(\|L^*_{\xi'}\Psi\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} + \sum_{\nu=1}^{J}|d_\nu|),$$

где $c_{\xi'} = \max(k_1 + k_1k_2,\ k_2)$.

Докажем III). Предположим, что III) неверно; тогда существуют последовательности $\{(\xi')^k\} \subset \mathbb{K}$, $\{\Psi_k\} = \{(\psi_k,\ d_1^k,\ \dots,\ d_J^k)\}$, $k = 1,\ 2,\ \dots$, такие, что $\|\psi_k\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$,

$$\|L^*_{(\xi')^k}\Psi_k\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} + \sum_{\nu=1}^{J}|d_\nu^k| \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{1.84}$$

Выберем из $\{(\xi')^k\}$ подпоследовательность (которую также обозначим через $\{(\xi')^k\}$), сходящуюся к $(\xi')^0 \in \mathbb{K}$. По предположению, $(\xi')^0 \ne 0$; следовательно, по доказанному, оценка (1.82) выполняется для $\xi' = (\xi')^0$.

Заметим, что

$$\|L^*_{(\xi')^0}\Psi_k\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} \le \|L^*_{(\xi')^k}\Psi_k\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} +$$
$$+ \|L^*_{(\xi')^k} - L^*_{(\xi')^0}\|_{L_2(\mathbb{R})\times\mathbb{C}^J \to W^{-2m}(\mathbb{R})} \cdot \|\Psi_k\|_{L_2(\mathbb{R})\times\mathbb{C}^J}.$$

Из (1.84) следует, что $\|L^*_{(\xi')^k}\Psi_k\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} \to 0$. Далее, $\|L^*_{(\xi')^k} - L^*_{(\xi')^0}\|_{L_2(\mathbb{R})\times\mathbb{C}^J\to W^{-2m}(\mathbb{R})} \to 0$, так как $L_{\xi'}$ зависит от ξ' полиномиально. Наконец, норма $\|\Psi_k\|_{L_2(\mathbb{R})\times\mathbb{C}^J}$ равномерно ограничена константой, не зависящей от k (это вытекает из (1.84) и соотношения $\|\psi_k\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$). Следовательно, $\|L^*_{(\xi')^0}\Psi_k\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из (1.84) получим

$$\|L^*_{(\xi')^0}\Psi_k\|_{W^{-2m}(\mathbb{R})} + \sum_{\nu=1}^{J}|d_\nu^k| \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{1.85}$$

Теперь, применяя оценку (1.82) к последовательности $\{\Psi_k\}$ и $\xi' = (\xi')^0$, из (1.85) окончательно получаем

$$\|\psi_k\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Получили противоречие с предположением $\|\psi_k\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$. □

2. Запишем точку $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ в виде $x = (x', \ x_n)$, где $x' = (x_1, \ \ldots, \ x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$. Аналогично, запишем точку $\xi \in \mathbb{R}^n$ в виде $\xi = (\xi', \ \xi_n)$, где $\xi' = (\xi_1, \ \ldots, \ \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(D_{x'}, \ D_{x_n})$, $B_\nu(D) = B_\nu(D_{x'}, \ D_{x_n})$ $(\nu = 1, \ \ldots, \ J; \ J \geq 1)$ — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, такие, что после замены $D = (D_{x'}, \ D_{x_n})$ на $\xi = (\xi', \ \xi_n)$ получаются полиномы $\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{P}(\xi', \ \xi_n)$, $B_\nu(\xi) = B_\nu(\xi', \ \xi_n)$ порядков $2m$ и $m_\nu \leq 2m-1$ соответственно, однородные по переменной $\xi = (\xi', \ \xi_n)$. Будем предполагать, что полиномы $\mathcal{P}(\xi)$ удовлетворяют условию 1.6.

Рассмотрим ограниченный оператор

$$L : W^{2m}(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n) \times \prod_{\nu=1}^{J} W^{2m-m_\nu-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

действующий по формуле

$$L\mathcal{U} = (\mathcal{P}(D)\mathcal{U}, \ B_1(D)\mathcal{U}|_{x_n=0}, \ \ldots, \ B_J(D)\mathcal{U}|_{x_n=0}).$$

Отметим, что задача, соответствующая оператору L, несколько искусственная. Она не является краевой задачей, поскольку решение $\mathcal{U}$ рассматривается во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. В то же время она не является задачей трансмиссии, так как мы рассматриваем след "непрерывной" функции на гиперплоскости $\{x_n = 0\}$, а не скачки "разрывной" функции и ее производных на $\{x_n = 0\}$. Более того, операторы $B_\nu(D)$, $\nu = 1, \ \ldots, \ J$, не накрывают оператор $\mathcal{P}(D)$ на гиперплоскости $\{x_n = 0\}$. Тем не менее, именно такая задача нужна нам для доказательства априорных оценок решений сопряженных задач (§ 1.9). Это связано со спецификой используемого метода, суть которого заключается в так называемом "отделении нелокальности".

Рассмотрим сопряженный оператор $L^* : L_2(\mathbb{R}^n) \times \prod\limits_{\nu=1}^{J} W^{-2m+m_\nu+1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \to W^{-2m}(\mathbb{R}^n)$. Оператор L^* действует на функцию $F = (f_0, \ g_1, \ \ldots, \ g_J) \in L_2(\mathbb{R}^n) \times \prod\limits_{\nu=1}^{J} W^{-2m+m_\nu+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ по формуле

$$< \mathcal{U}, \ L^*F > = < \mathcal{P}(D)\mathcal{U}, \ f_0 > + \sum_{\nu=1}^{J} < B_\nu(D)\mathcal{U}|_{x_n=0}, \ g_\nu >$$
для всех $\mathcal{U} \in W^{2m}(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n:\ x_n > 0\}$, $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n:\ x_n < 0\}$. Рассмотрим пространство $\mathcal{W}^l(\mathbb{R}^n) = W^l(\mathbb{R}^n_+) \oplus W^l(\mathbb{R}^n_-)$ с нормой $\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{W}^l(\mathbb{R}^n)} = \Big(\|\mathcal{U}_+\|^2_{W^l(\mathbb{R}^n_+)} + \|\mathcal{U}_-\|^2_{W^l(\mathbb{R}^n_-)}\Big)^{1/2}$.

Основной результат данного параграфа сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.14. *Пусть*

$$F = (f_0,\ g_1,\ \dots,\ g_J) \in L_2(\mathbb{R}^n) \times \prod_{\nu=1}^{J} W^{-2m+l+m_\nu+1/2}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

$$L^*F \in \begin{cases} W^{-2m+l}(\mathbb{R}^n), & \textit{если } l < 2m, \\ \mathcal{W}^{-2m+l}(\mathbb{R}^n), & \textit{если } l \geq 2m; \end{cases}$$

тогда $f_0 \in \mathcal{W}^l(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|f_0\|_{\mathcal{W}^l(\mathbb{R}^n)} \leq c_l\big(\|L^*F\|_{-2m+l} + \|f_0\|_{W^{-1}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{\nu=1}^{J} \|g_\nu\|_{W^{-2m+l+m_\nu+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\big), \tag{1.86}$$

где $\|\cdot\|_{-2m+l} = \begin{cases} \|\cdot\|_{W^{-2m+l}(\mathbb{R}^n)}, & \textit{если } l < 2m, \\ \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{-2m+l}(\mathbb{R}^n)}, & \textit{если } l \geq 2m, \end{cases}$ $c_l > 0$ *зависит от* $l \geq 0$ *и не зависит от* F.

Доказательство. Пусть $l = 0$. Тогда, используя преобразование Фурье функций f_0, g_ν и L^*F по переменной x', выводим оценку (1.86) из леммы 1.19 (аналогично тому, как оценка (4.27) [19, гл. 2, § 4.4] выводится из (4.18) [19, гл. 2, § 4.2], см. доказательство теоремы 4.1 [19, гл. 2, § 4.4]).

Если $l \geq 1$, то включение $f_0 \in \mathcal{W}^l(\mathbb{R}^n)$ и оценка (1.86) доказываются при помощи (1.86) для $l = 0$, метода конечно–разностных отношений и условия 1.6 (аналогично тому, как оценка (4.40) [19, гл. 2, § 4.5] выводится из (4.40′) [19, гл. 2, § 4.5], см. доказательство теоремы 4.3 [19, гл. 2, § 4.5]). □

Замечание 1.5. В отличие от модельных задач в $\mathbb{R}^n$ (см. [19, гл. 2, § 3]), в нашем случае оператор L^* содержит распределения с носителем на гиперплоскости $\{x_n = 0\}$. Именно поэтому гладкость функции f_0 может нарушаться на гиперплоскости $\{x_n = 0\}$, даже если L^*F — бесконечно гладкая в $\mathbb{R}^n$ функция. Более того, теорема 1.14 показывает, что для повышения гладкости функции f_0 в $\mathbb{R}^n_+$ и $\mathbb{R}^n_-$ необходимо потребовать дополнительной гладкости не только от функции L^*F, *но и от распределений* g_ν.

1.9 Сопряженные нелокальные задачи

1. В данном параграфе изучаются операторы, сопряженные с операторами нелокальных краевых задач с параметром $\theta \in S^{n-3}$; устанавливается связь между ядрами операторов $\mathcal{M}(\theta)$ и $\mathcal{L}(\theta)^*$ ($\mathcal{L}(\theta)^*$ — оператор, сопряженный к $\mathcal{L}(\theta)$).

Пусть $\mathcal{L}(\theta) = \{\mathcal{P}_j(D_y,\ \theta),\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)\} : E_a^{2m,\,N}(K) \to E_a^{0,\,N}(K,\ \gamma)$ — оператор, соответствующий задаче (1.6), (1.7). Рассмотрим сопряженный оператор $\mathcal{L}(\theta)^* : E_a^{0,\,N}(K,\ \gamma)^* \to E_a^{2m,\,N}(K)^*$, где

$$E_a^{0,\,N}(K,\ \gamma)^* = \prod_{j=1}^{N}\bigl\{E_{-a}^{0}(K_j) \times \prod_{\sigma=1,\,R_j+1}\prod_{\mu=1}^{m} E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})^*\bigr\},$$

$$E_a^{2m,\,N}(K)^* = \prod_{j=1}^{N} E_a^{2m}(K_j)^*.$$

Оператор $\mathcal{L}(\theta)^*$ действует на $f = \{f_j,\ g_{j\sigma\mu}\} \in E_a^{0,\,N}(K,\ \gamma)^*$ по формуле

$$< u,\ \mathcal{L}(\theta)^* f >= \sum_j \bigl\{< \mathcal{P}_j(D_y,\ \theta)u_j,\ f_j >_{K_j} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} < \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)u,\ g_{j\sigma\mu} >_{\gamma_{j\sigma}}\bigr\}$$

для всех $u \in E_a^{2m,\,N}(K)$.

Введем пространство $\mathcal{W}^l(K_j) = \bigoplus_{t=1}^{R_j} W^l(K_{jt})$ с нормой $\|v_j\|_{\mathcal{W}^l(K_j)} = \left(\sum_{t=1}^{R_j} \|v_{jt}\|^2_{W^l(K_{jt})}\right)^{1/2}$. Далее (см. теорему 1.15) мы увидим, что если j-я компонента функции $\mathcal{L}(\theta)^* f$ является гладкой в K_j ($j = 1,\ \ldots,\ N$), то f_j будет гладкой в K_{jt} и, вообще говоря, может иметь разрывы на лучах γ_{jq} ($q = 2,\ \ldots,\ R_j$). Это объясняется наличием нелокальных членов в операторах $\mathcal{L}(\theta)$ и, следовательно, $\mathcal{L}(\theta)^*$; при этом носители указанных нелокальных членов содержатся в γ_{jq}. Поэтому при изучении гладкости функции f естественно рассматривать пространства $\mathcal{W}^l(\cdot)$ (а не $W^l(\cdot)$).

Рассмотрим функции $\psi_p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, такие, что

$$\psi_p(r) = 1 \text{ для } r_1 d_1^{3-p} < r < r_2 d_2^{3-p},$$
$$\psi_p(r) = 0 \text{ для } r < \frac{2}{3} r_1 d_1^{3-p} \text{ и } r > \frac{3}{2} r_2 d_2^{3-p},$$

где $0 < r_1 < r_2$; $p = 0,\ \ldots,\ 3$. Положим $\hat\gamma_{jq} = \{y :\ \omega = b_{jq} \text{ или } \omega = b_{jq} + \pi\}$ ($j = 1,\ \ldots,\ N;\ q = 1,\ \ldots,\ R_j + 1$). Очевидно, $\gamma_{jq} \subset \hat\gamma_{jq}$.

Теорема 1.15. *Пусть* $f = \{f_j,\ g_{j\sigma\mu}\} \in E_a^{0,\,N}(K,\ \gamma)^*$, $\mathcal{L}(\theta)^* f \in E_a^{2m,\,N}(K)^*$,

$$\psi_0 \mathcal{L}(\theta)^* f \in \begin{cases} \prod\limits_j W_{\bar K_j}^{-2m+l}(\mathbb{R}^n),\ ^{5)}\ \text{если } l < 2m, \\ \prod\limits_j \mathcal{W}^{-2m+l}(K_j),\ \text{если } l \ge 2m; \end{cases}$$

тогда $\psi_3 f \in \prod\limits_j \big\{\mathcal{W}^l(K_j) \times \prod\limits_{\sigma,\mu} W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j\sigma})\big\}$ *и*

$$\begin{gathered} \|\psi_3 f\|_{\prod\limits_j \{\mathcal{W}^l(K_j) \times \prod\limits_{\sigma,\mu} W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j\sigma})\}} \le \\ c_l\big(\|\psi_0 \mathcal{L}(\theta)^* f\|_{-2m+l} + \|\psi_0 f\|_{\prod\limits_j \big\{W_{\bar K_j}^{-1}(\mathbb{R}^n) \times \prod\limits_{\sigma,\mu} W^{-2m-1+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j\sigma})\big\}}\big), \end{gathered} \tag{1.87}$$

где

$$\|\cdot\|_{-2m+l} = \begin{cases} \|\cdot\|_{\prod\limits_j W_{\bar K_j}^{-2m+l}(\mathbb{R}^n)},\ \text{если } l < 2m, \\ \|\cdot\|_{\prod\limits_j \mathcal{W}^{-2m+l}(K_j)},\ \text{если } l \ge 2m, \end{cases}$$

$c_l > 0$ *зависит от* $l \ge 0$ *и не зависит от* f.

Доказательство. 1) Рассмотрим вспомогательный оператор

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\theta)^* : \prod_{j=1}^N \big\{E_{-a}^0(K_j) \times \prod_{\sigma=1,\,R_j+1} \prod_{\mu=1}^m E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})^* \times \\ \times \prod_{k=1}^N \prod_{q=2}^{R_k} \prod_{s=1}^{S_{j\sigma kq}} E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{kq})^*\big)\big\} \to E_a^{2m,\,N}(K)^*, \end{gathered}$$

действующий на функцию $f' = \{f_j,\ g_{j\sigma\mu},\ g'_{j\sigma\mu kqs}\} \in \prod\limits_j \big\{E_{-a}^0(K_j) \times \prod\limits_{\sigma,\mu} E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})^* \times \prod\limits_{k,q,s} E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{kq})^*\big)\big\}$ по формуле

$$\begin{gathered} < u,\ \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\theta)^* f' >= \sum_j \big\{< \mathcal{P}_j(D_y,\ \theta) u_j,\ f_j >_{K_j} + \\ + \sum_{\sigma,\mu}\big(< B_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta) u_j|_{\gamma_{j\sigma}},\ g_{j\sigma\mu} >_{\gamma_{j\sigma}} + \\ \sum_{k,q,s} < B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,\ \theta) u_k|_{\gamma_{kq}},\ g'_{j\sigma\mu kqs} >_{\gamma_{kq}}\big)\big\} \quad \text{для всех } u \in E_a^{2m,\,N}(K). \end{gathered}$$

---

[5] $W_{\bar K_j}^{-l}(\mathbb{R}^n)$ $(l > 0)$ есть пространство, сопряженное к $W^l(K_j)$. Пространство $W_{\bar K_j}^{-l}(\mathbb{R}^n)$ может быть отождествлено с подпространством пространства $W^{-l}(\mathbb{R}^n)$, состоящим из распределений с носителями, содержащимися в $\bar K_j$ (см. замечание 12.4 [19, гл. 1, § 12.6]).

Отметим, что оператор $\mathcal{L}_\mathcal{G}(\theta)^*$ является “локальным”, поскольку функции $g_{j\sigma\mu} \in E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ и $g'_{j\sigma\mu kqs} \in E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{kq})^*$ между собой никак не связаны.

Установим связь между операторами $\mathcal{L}(\theta)^*$ и $\mathcal{L}_\mathcal{G}(\theta)^*$. Для каждого $g_{j\sigma\mu} \in E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})^*$ и ψ_p введем распределения $g^\mathcal{G}_{j\sigma\mu kqs} \in E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{kq})^*$ и $\psi_p g^\mathcal{G}_{j\sigma\mu kqs} \in W^{-2m+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{kq})$, действующие по формулам

$$< u_{\gamma_{kq}},\ g^\mathcal{G}_{j\sigma\mu kqs} >_{\gamma_{kq}} = < u_{\gamma_{kq}}(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}\cdot),\ g_{j\sigma\mu} >_{\gamma_{j\sigma}}$$
$$\text{для всех } u_{\gamma_{kq}} \in E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{kq})$$

и

$$< w_{\gamma_{kq}},\ \psi_p g^\mathcal{G}_{j\sigma\mu kqs} >_{\hat\gamma_{kq}} = < (\psi_p w_{\gamma_{kq}})(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}\cdot),\ g_{j\sigma\mu} >_{\gamma_{j\sigma}}$$
$$\text{для всех } w_{\gamma_{kq}} \in W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\hat\gamma_{kq}).$$

Отсюда, в частности, следует, что $\psi_p g^\mathcal{G}_{j\sigma\mu kqs} \in W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{kq})$ тогда и только тогда, когда $\psi_p(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}\cdot)g_{j\sigma\mu} \in W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j\sigma})$; более того, существуют константы $k_1,\ k_2 > 0$ (зависящие от l), такие, что

$$k_1\|\psi_p(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}\cdot)g_{j\sigma\mu}\|_{W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j\sigma})} \le \|\psi_p g^\mathcal{G}_{j\sigma\mu kqs}\|_{W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{kq})} \le$$
$$\le k_2\|\psi_p(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}\cdot)g_{j\sigma\mu}\|_{W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j\sigma})}. \tag{1.88}$$

Положим $f^\mathcal{G} = \{f_j,\ g_{j\sigma\mu},\ g^\mathcal{G}_{j\sigma\mu kqs}\}$. Из определения операторов $\mathcal{L}(\theta)^*$ и $\mathcal{L}_\mathcal{G}(\theta)^*$ следует, что

$$\mathcal{L}_\mathcal{G}(\theta)^* f^\mathcal{G} = \mathcal{L}(\theta)^* f. \tag{1.89}$$

Таким образом, исследовав гладкость решения $f^\mathcal{G}$ “локального” уравнения

$$\mathcal{L}_\mathcal{G}(\theta)^* f^\mathcal{G} = \Psi,$$

где $\psi_0\Psi \in \left\{\begin{array}{l} \prod\limits_j W^{-2m+l}_{\bar K_j}(\mathbb{R}^n), \text{если } l < 2m, \\ \prod\limits_j \mathcal{W}^{-2m+l}(K_j),\ \text{если } l \ge 2m, \end{array}\right.$ мы тем самым исследуем гладкость решения f нелокального уравнения

$$\mathcal{L}(\theta)^* f = \Psi$$

с той же правой частью Ψ. При этом, благодаря “локальности” оператора $\mathcal{L}_\mathcal{G}(\theta)^*$, исследуя решения $f^\mathcal{G}$ соответствующего уравнения, мы можем применить метод срезающих функций (метод разбиения единицы).

Обозначим $Zf = \{Z_jf_j,\ Z_jg_{j\sigma\mu}\}$, $Zf^{\mathcal{G}} = \{Z_jf_j,\ Z_jg_{j\sigma\mu},\ Z_kg^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu kqs}\}$, где $Z = (Z_1,\ \dots,\ Z_N)$, $Z_j = Z_j(\omega)$ — произвольные бесконечно дифференцируемые на $[b_{j1},\ b_{j,R_j+1}]$ функции. (Отметим, что в формуле $Zf^{\mathcal{G}} = \{Z_jf_j,\ Z_jg_{j\sigma\mu},\ Z_kg^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu kqs}\}$ распределение $g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu kqs}$ умножается на Z_k, а не на Z_j. Далее это будет принципиально.)

2) Для любых $g \in E_a^{l-1/2}(\gamma_{jq})^*$ и ψ_p будем обозначать через $\psi g \otimes \delta_{\gamma_{jq}}$ распределение из пространства $W^{-l}_{\bar{K}_j}(\mathbb{R}^n)$, действующее по формуле

$$< u_j,\ \psi g \otimes \delta_{\gamma_{jq}} >_{K_j} = < \psi u_j|_{\gamma_{jq}},\ g >_{\gamma_{jq}} \ \text{ для всех } u_j \in W^l(K_j),$$

$j = 1,\ \dots,\ N;\ q = 1,\ \dots,\ R_j + 1.$

Пусть ζ_{jq} — функции, определенные по формуле (1.17). Рассмотрим также функции

$$\hat{\zeta}_{jq} \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \hat{\zeta}_{jq}(\omega) = 1 \text{ для } |b_{jq} - \omega| < 3\varepsilon/2,\ \hat{\zeta}_{jq}(\omega) = 0 \text{ для } |b_{jq} - \omega| > 2\varepsilon; \tag{1.90}$$

$$\bar{\zeta}_{jq} \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \bar{\zeta}_{jq}(\omega) = 1 \text{ для } |b_{jq} - \omega| < \varepsilon/8,\ \bar{\zeta}_{jq}(\omega) = 0 \text{ для } |b_{jq} - \omega| > \varepsilon/4 \tag{1.91}$$

$(j = 1,\ \dots,\ N;\ q = 1,\ \dots,\ R_j + 1)$, где ε определяется формулой (1.16).

Рассмотрим N-мерную вектор–функцию

$$Z^{j'\sigma'} = (0,\ \dots,\ \zeta_{j'\sigma'},\ \dots,\ 0).$$

Здесь “нули” стоят всюду, кроме j'-й позиции, $j' = 1,\ \dots,\ N$; $\sigma' = 1,\ R_{j'} + 1$. Если $j \neq j'$, то $Z_j^{j'\sigma'} = 0$. Если $j = j'$, то, как легко видеть, носитель функции $Z_{j'}^{j'\sigma'} = \zeta_{j'\sigma'}$ не пересекается с $\gamma_{j'q}$, а носитель функции $g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu j'qs}$ содержится в $\gamma_{j'q}$ $(q = 2,\ \dots,\ R_{j'})$. Следовательно, $\zeta_{j'\sigma'}g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu j'qs} = 0$. Таким образом, имеем

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\theta)^*(\psi_pZ^{j'\sigma'}f^{\mathcal{G}}) = (0,\ \dots,\ \mathcal{Q}_{j'}(D_y,\ \theta)(\psi_p\zeta_{j'\sigma'}f_{j'}) + \\ + \sum_{\mu=1}^m B^*_{j'\sigma'\mu}(D_y,\ \theta)(\psi_p\zeta_{j'\sigma'}g_{j'\sigma'\mu} \otimes \delta_{\gamma_{j'\sigma'}}),\ \dots,\ 0)$$

$(p = 0,\ \dots,\ 3)$. Здесь $\mathcal{Q}_{j'}(D_y,\ \theta)$ и $B^*_{j'\sigma'\mu}(D_y,\ \theta)$ формально сопряжены к $\mathcal{P}_{j'}(D_y,\ \theta)$ и $B_{j'\sigma'\mu}(D_y,\ \theta)$ соответственно.

Заметим, что оператор

$$\mathcal{Q}_{j'}(D_y,\ \theta)(\psi_p\zeta_{j'\sigma'}f_{j'}) + \sum_{\mu=1}^m B^*_{j'\sigma'\mu}(D_y,\ \theta)(\psi_p\zeta_{j'\sigma'}g_{j'\sigma'\mu} \otimes \delta_{\gamma_{j'\sigma'}})$$

может быть отождествлен с оператором, сопряженным к оператору

$$\{\mathcal{P}_{j'}(D_y,\ \theta)u_{j'},\ B_{j'\sigma'\mu}(D_y,\ \theta)u_{j'}|_{\hat\gamma_{j'\sigma'}}\}_{\mu=1}^{m}.$$

Следовательно, мы можем применить теорему 4.3 [19, гл. 2, § 4.5] [6)]. Тогда из соотношения (1.89) и формулы Лейбница получаем

$$\psi_1 Z^{j'\sigma'} f^{\mathcal{G}} \in \prod_j \Big\{W^l(K_j)\times\prod_{\sigma,\mu}\big(W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j\sigma})\times \\ \times\prod_{k,q,s} W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{kq})\big)\Big\}$$

и

$$\|\psi_1 Z^{j'\sigma'} f^{\mathcal{G}}\|_{\prod\limits_j\big\{W^l(K_j)\times\prod\limits_{\sigma,\mu}\big(W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j\sigma})\times\prod\limits_{k,q,s}W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{kq})\big)\big\}} \le \\ \le k_3\big(\|\psi_0\mathcal{L}(\theta)^* f\|_{-2m+l} + \|\psi_0\hat\zeta_{j'\sigma'}f_{j'}\|_{W^{-1}_{\bar K_{j'}}(\mathbb{R}^n)} + \\ + \sum_{\mu=1}^{m}\|\psi_0 g_{j'\sigma'\mu}\|_{W^{-2m-1+m_{j'\sigma'\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j'\sigma'})}\big). \tag{1.92}$$

Из (1.92) и (1.88), в частности, следует, что $\psi_2 g^{\mathcal{G}}_{j'\sigma'\mu kqs} \in W^{-2m+l+m_{j'\sigma'\mu}+1/2}(\hat\gamma_{kq})$ и

$$\|\psi_2 g^{\mathcal{G}}_{j'\sigma'\mu kqs}\|_{W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat\gamma_{kq})} \le k_4\big(\|\psi_0\mathcal{L}(\theta)^* f\|_{-2m+l} + \\ + \|\psi_0\hat\zeta_{j'\sigma'}f_{j'}\|_{W^{-1}_{\bar K_{j'}}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{\mu=1}^{m}\|\psi_0 g_{j'\sigma'\mu}\|_{W^{-2m-1+m_{j'\sigma'\mu}+1/2}(\hat\gamma_{j'\sigma'})}\big). \tag{1.93}$$

3) Положим $Z^{k'q'} = (0,\ \dots,\ \zeta_{k'q'},\ \dots,\ 0)$. Здесь "нули" стоят всюду, кроме k'-й позиции, $k' = 1,\ \dots,\ N$; $q' = 2,\ \dots,\ R_{k'}$. Если $k \ne k'$, то $Z_k^{k'q'} = 0$. Если $k = k'$, то, как легко видеть, носитель функции $Z_{k'}^{k'q'} = \zeta_{k'q'}$ не пересекается с носителями функций $g_{k'\sigma\mu}$ и $g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu k'qs}$ для $q \ne q'$. Следовательно, $\zeta_{k'q'}g_{k'\sigma\mu} = 0$ и $\zeta_{k'q'}g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu k'qs} = 0$ для $q \ne q'$. Таким образом, имеем

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\theta)^*(\psi_p Z^{k'q'} f^{\mathcal{G}}) = (0,\ \dots,\ \mathcal{Q}_{k'}(D_y,\ \theta)(\psi_p\zeta_{k'q'}f_{k'}) + \\ + \sum_{j,\sigma,\mu,s} B^*_{j\sigma\mu k'q's}(D_y,\ \theta)(\psi_p\zeta_{k'q'}g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu k'q's}\otimes\delta_{\gamma_{k'q'}}),\ \dots,\ 0)$$

$(p = 0,\ \dots,\ 3)$, где $B^*_{j\sigma\mu k'q's}(D_y,\ \theta)$ формально сопряжен к $B_{j\sigma\mu k'q's}(D_y,\ \theta)$.

[6)] В теореме 4.3 [19, гл. 2, § 4.5] рассматриваются операторы с переменными коэффициентами, а на носители функций накладываются некоторые дополнительные ограничения. Однако, легко видеть, что в случае постоянных коэффициентов эти ограничения могут быть опущены.

Заметим, что оператор

$$\mathcal{Q}_{k'}(D_y,\ \theta)(\psi_p\zeta_{k'q'}f_{k'})+\sum_{j,\sigma,\mu,s}B^*_{j\sigma\mu k'q's}(D_y,\ \theta)(\psi_p\zeta_{k'q'}g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu k'q's}\otimes\delta_{\gamma_{k'q'}})$$

может быть отождествлен с оператором, сопряженным к оператору задачи

$$\mathcal{P}_{k'}(D_y,\ \theta)u_{k'}=\hat{f}_{k'}(y)\ (y\in\mathbb{R}^2),$$
$$B_{j\sigma\mu k'q's}(D_y,\ \theta)u_{k'}|_{\hat{\gamma}_{k'q'}}=\hat{g}_{j\sigma\mu s}(y)\ (y\in\hat{\gamma}_{k'q'})$$
$$(j=1,\ \ldots,\ N;\ \sigma=1,\ R_j+1;\ \mu=1,\ \ldots,\ m;\ s=1,\ \ldots,\ S_{j\sigma k'q'}).$$

Данная задача отличается от задачи, изученной в § 1.8, лишь младшими членами.

В 1) было показано, что $\psi_2 g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu k'q's}\in W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{k'q'})$; следовательно мы можем применить теорему 1.14. Тогда из соотношения (1.89) и формулы Лейбница получим

$$\psi_3 Z^{k'q'}f^{\mathcal{G}}\in\prod_j\big\{\mathcal{W}^l(K_j)\times\prod_{\sigma,\mu}\big(W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{j\sigma})\times$$
$$\times\prod_{k,q,s}W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{kq})\big)\big\}$$

и

$$\|\psi_3 Z^{k'q'}f^{\mathcal{G}}\|_{\prod\limits_j\big\{\mathcal{W}^l(K_j)\times\prod\limits_{\sigma,\mu}\big(W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{j\sigma})\times\prod\limits_{k,q,s}W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{kq})\big)\big\}}\le$$
$$\le k_5\big(\|\psi_2\mathcal{L}(\theta)^*f\|_{-2m+l}+\|\psi_2\hat{\zeta}_{k'q'}f_{k'}\|_{W^{-1}_{\bar{K}_{k'}}(\mathbb{R}^n)}+$$
$$+\sum_{j,\sigma,\mu,s}\|\psi_2 g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu k'q's}\|_{W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{k'q'})}\big). \tag{1.94}$$

Отметим, что именно здесь появляется пространство $\mathcal{W}^l(K_j)$. Как было сказано выше, это связано с наличием нелокальных членов $g^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu k'q's}$, носители которых лежат на лучах $\gamma_{k'q'}$ $(q'=2,\ \ldots,\ R_{k'})$.

Из неравенств (1.94) и (1.93) получаем

$$\|\psi_3 Z^{k'q'}f^{\mathcal{G}}\|_{\prod\limits_j\big\{\mathcal{W}^l(K_j)\times\prod\limits_{\sigma,\mu}\big(W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{j\sigma})\times\prod\limits_{k,q,s}W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{kq})\big)\big\}}\le$$
$$\le k_6\big(\|\psi_0\mathcal{L}(\theta)^*f\|_{-2m+l}+\sum_{j=1}^N\sum_{\sigma=1,\,R_j+1}\big\{\|\psi_0\hat{\zeta}_{j\sigma}f_j\|_{W^{-1}_{\bar{K}_j}(\mathbb{R}^n)}+$$
$$+\sum_{\mu=1}^m\|\psi_0 g_{j\sigma\mu}\|_{W^{-2m-1+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{j\sigma})}\big\}\big). \tag{1.95}$$

4) Наконец, положим $\zeta_{i0} = 1 - \sum\limits_{q=1}^{R_i+1} \zeta_{iq}$, $Z^{i0} = (0,\ \ldots,\ \zeta_{i0},\ \ldots,\ 0)$. Здесь “нули” стоят всюду, кроме i-й позиции, $i = 1,\ \ldots,\ N$.

Поскольку носитель функции ζ_{i0} не пересекается с γ_{iq} $(q = 1,\ \ldots, R_i + 1)$, имеем

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\theta)^*(\psi_p Z^{i0} f^{\mathcal{G}}) = (0,\ \ldots,\ \mathcal{Q}_i(D_y,\ \theta)(\psi_p \zeta_{i0} f_i),\ \ldots,\ 0)$$

$(p = 0,\ \ldots,\ 3)$.

Оператор $\mathcal{Q}_i(D_y,\ \theta)(\psi_p \zeta_{j'\sigma'} f_{j'})$ может быть отождествлен с оператором, сопряженным к оператору задачи

$$\mathcal{P}_i(D_y,\ \theta)u_i = \hat{f}_i(x)\ (y \in \mathbb{R}^2).$$

Поэтому, применяя теорему 3.1 [19, гл. 2, § 3.2], из (1.89) и формулы Лейбница получим

$$\begin{aligned}\psi_1 Z^{i0} f^{\mathcal{G}} \in \prod_j \big\{W^l(K_j) \times \prod_{\sigma,\mu} \big(W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{j\sigma}) \times \\ \times \prod_{k,q,s} W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{kq})\big)\big\}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\|\psi_1 Z^{i0} f^{\mathcal{G}}\|_{\prod\limits_j \big\{W^l(K_j) \times \prod\limits_{\sigma,\mu} \big(W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{j\sigma}) \times \prod\limits_{k,q,s} W^{-2m+l+m_{j\sigma\mu}+1/2}(\hat{\gamma}_{kq})\big)\big\}} \le \\ \le k_7 \big(\|\psi_0 \mathcal{L}(\theta)^* f\|_{-2m+l} + \|\psi_0 \bar{\zeta}_{i0} f_i\|_{W^{-1}_{\bar{K}_i}(\mathbb{R}^n)}\big),\end{aligned} \tag{1.96}$$

где $\zeta_{i0} = 1 - \sum\limits_{q=1}^{R_i+1} \bar{\zeta}_{iq}$.

Теперь априорная оценка (1.87) следует из неравенств (1.92), (1.95) и (1.96). $\square$

2. Установим теперь связь между ядрами операторов $\mathcal{L}(\theta)^*$ и $\mathcal{M}(\theta)$.

Лемма 1.20. *Ядро* $\ker \mathcal{L}(\theta)^*$ *оператора* $\mathcal{L}(\theta)^*$ *совпадает с множеством* $\{v_j,\ F_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)v|_{\gamma_{j\sigma}}\}$, *где* $v_j \in \mathcal{E}^{2m}_{-a+2m}(K_j)$, $v_{jt} \in C^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\})$ *(*$j = 1, \ldots,\ N$*;* $t = 1,\ \ldots,\ R_j$*), и* v *есть решение задачи (1.54)–(1.56) при* $\{f_j,\ g_{j\sigma\mu},\ h_{jq\nu}\} = 0$.

Доказательство. 1) Для краткости будем опускать аргументы $(D_y,\ \theta)$ в записи дифференциальных операторов; так, будем писать $\mathcal{P}_j$, вместо $\mathcal{P}_j(D_y,\ \theta)$ и т. д.

Пусть $v_j \in \mathcal{E}^{2m}_{-a+2m}(K_j)$, $v_{jt} \in C^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\})$ и v есть решение задачи (1.54)–(1.56) при $\{f_j,\ g_{j\sigma\mu},\ h_{jq\nu}\} = 0$. Тогда для любых функций $u_j \in C_0^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\})$, в силу теоремы 1.7, имеем

$$\sum_j \big\{ \sum_t (\mathcal{P}_j u_j,\ v_{jt})_{K_{jt}} + \sum_{\sigma,\mu} (\mathcal{B}_{j\sigma\mu} u,\ F_{j\sigma\mu} v_j|_{\gamma_{j\sigma}})_{\gamma_{j\sigma}} = 0. \tag{1.97}$$

Поскольку оператор вложения $\mathcal{E}^{2m}_{-a+2m}(K_j)$ в $E^0_{-a}(K_j)$ ограничен, имеем $v_j \in \mathcal{E}^0_{-a}(K_j)$. Кроме того, оператор $F_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)$ имеет порядок $2m-1-m_{j\sigma\mu}$; следовательно, в силу неравенства Коши–Буняковского и теоремы 1.2, для всех $u_{\gamma_{j\sigma}} \in E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ выполняется

$$\begin{gathered} |(u_{\gamma_{j\sigma}},\ F_{j\sigma\mu} v_j|_{\gamma_{j\sigma}})_{\gamma_{j\sigma}}|^2 \le \int\limits_{\gamma_{j\sigma}} r^{2(a-(2m-m_{j\sigma\mu}-1/2))} |u_{\gamma_{j\sigma}}|^2\, d\gamma \times \\ \times \int\limits_{\gamma_{j\sigma}} r^{2(-a+2m-(m_{j\sigma\mu}+1/2))} |F_{j\sigma\mu} v_j|_{\gamma_{j\sigma}}|^2\, d\gamma \le \\ \le k_1 \|u_{\gamma_{j\sigma}}\|^2_{E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} \cdot \|F_{j\sigma\mu} v_j|_{\gamma_{j\sigma}}\|^2_{E_{-a+2m}^{m_{j\sigma\mu}+1/2}(\gamma_{j\sigma})} \end{gathered}$$

Значит, $F_{j\sigma\mu} v_j|_{\gamma_{j\sigma}} \in E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})^*$.

Таким образом, $\{v_j,\ F_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta) v|_{\gamma_{j\sigma}}\} \in \prod\limits_j \big\{ E^0_{-a}(K_j) \times \prod\limits_{\sigma,\mu} E_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})^* \big\}$, и из определения оператора $\mathcal{L}(\theta)^*$ и равенства (1.97) получаем

$$< u,\ \mathcal{L}(\theta)^* \{v_j,\ F_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta) v|_{\gamma_{j\sigma}}\} >= 0 \text{ для всех } u \in \prod_j C_0^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\}).$$

Но $\prod\limits_j C_0^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\})$ всюду плотно в $E_a^{2m,N}(K)$; следовательно, $\{v_j,\ F_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta) v|_{\gamma_{j\sigma}}\} \in \ker \mathcal{L}(\theta)^*$.

2) Теперь предположим, что $\{v_j,\ \psi_{j\sigma\mu}\} \in \ker \mathcal{L}(\theta)^*$. Из теоремы 1.15 следует, что $v_{jt} \in C^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\})$, $\psi_{j\sigma\mu} \in C^\infty(\gamma_{j\sigma})$. Поэтому из определения оператора $\mathcal{L}(\theta)^*$ получим

$$\sum_j \big\{ (\mathcal{P}_j u_j,\ v_j)_{K_j} = - \sum_{j,\sigma,\mu} (\mathcal{B}_{j\sigma\mu} u,\ \psi_{j\sigma\mu})_{\gamma_{j\sigma}} \text{ для всех } u_j \in C_0^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\}).$$

Из последнего равенства и формулы Грина (1.44) вытекает

$$\begin{gathered} \sum_j \big\{ \sum_{\sigma,\mu} (\mathcal{B}_{j\sigma\mu} u,\ F_{j\sigma\mu} v_j|_{\gamma_{j\sigma}} - \psi_{j\sigma\mu})_{\gamma_{j\sigma}} + \sum_{q,\mu} (B_{jq\mu} u_j|_{\gamma_{jq}},\ \mathcal{T}_{jq\mu} v)_{\gamma_{jq}} \big\} = \\ = \sum_j \big\{ \sum_t (u_j,\ \mathcal{Q}_j v_{jt})_{K_{jt}} + \sum_{\sigma,\mu} (B'_{j\sigma\mu} u_j|_{\gamma_{j\sigma}},\ C_{j\sigma\mu} v_j|_{\gamma_{j\sigma}})_{\gamma_{j\sigma}} + \\ + \sum_{q,\mu} (B'_{jq\mu} u_j|_{\gamma_{jq}},\ \mathcal{T}_{jq,m+\mu} v)_{\gamma_{jq}} \big\}. \end{gathered} \tag{1.98}$$

Полагая $\operatorname{supp} u_j \in C_0^\infty(K_{jt})$, из (1.98) получаем $\mathcal{Q}_j v_{jt} = 0$, $j = 1, \ \ldots, \ N$; $t = 1, \ \ldots, \ R_j$.

По теореме 1.7, система $\{B_{j\sigma\mu}, \ B'_{j\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ есть система Дирихле на $\gamma_{j\sigma}$ $(j = 1, \ \ldots, \ N; \ \sigma = 1, \ R_j + 1)$ порядка $2m$. Поэтому для любой системы функций $\{\Theta_{j\sigma\nu}\}_{\nu=1}^{2m} \subset C_0^\infty(\gamma_{j\sigma})$ существуют функции $u_j \in C_0^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\})$, такие, что

$$B_{j\sigma\mu} u_j|_{\gamma_{j\sigma}} = \Theta_{j\sigma\mu}, \ B'_{j\sigma\mu} u_j|_{\gamma_{j\sigma}} = \Theta_{j\sigma,\mu+m}, \ \mu = 1, \ \ldots, \ m,$$
$$u_j = 0 \text{ в окрестности } \gamma_{jq} \ (j = 1, \ \ldots, \ N; \ q = 2, \ \ldots, \ R_j)$$

(см. лемму 2.2 [19, гл. 2, § 2.3]). Следовательно, принимая во внимание, что $\mathcal{Q}_j v_{jt} = 0$, из (1.98) получаем $F_{j\sigma\mu} v_j|_{\gamma_{j\sigma}} - \psi_{j\sigma\mu} = 0$ и $C_{j\sigma\mu} v_j|_{\gamma_{j\sigma}} = 0$.

Аналогично, поскольку $\{B_{jq\mu}, \ B'_{jq\mu}\}_{\mu=1}^m$ есть система Дирихле на γ_{jq} $(j = 1, \ \ldots, \ N; \ q = 2, \ \ldots, \ R_j)$ порядка $2m$, получаем, что $\mathcal{T}_{jq\nu} v = 0$.

Итак, имеем: по предположению $v_j \in E_{-a}^0(K_j)$; мы показали, что $v_{jt} \in C^\infty(\bar{K}_{jt} \setminus \{0\})$; следовательно, по теореме 1.11, $v_j \in \mathcal{E}_{-a+2m}^{2m}(K_j)$. $\square$

1.10 Разрешимость нелокальных краевых задач. Основные результаты

1. В данном параграфе изучается разрешимость нелокальных краевых задач. В п. 1 устанавливается необходимое и достаточное условие фредгольмовой разрешимости нелокальных краевых задач с параметром θ в плоских углах. В п. 2 изучается разрешимость нелокальных краевых задач в двугранных углах.

Теорема 1.16. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*; тогда оператор*

$$\mathcal{L}(\theta) = \{\mathcal{P}_j(D_y, \ \theta), \ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y, \ \theta)\} : E_a^{l+2m, N}(K) \to E_a^{l, N}(K, \ \gamma)$$

фредгольмов для всех $\theta \in S^{n-3}$.

Если при некотором $\theta \in S^{n-3}$ *оператор* $\mathcal{L}(\theta)$ *фредгольмов, то прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Доказательство. Пусть прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$; тогда, по теореме 1.6, оператор $\mathcal{L}(\theta)$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

Докажем, что коядро оператора $\mathcal{L}(\theta)$ также конечномерно. Вначале рассмотрим случай $l=0$. По теоремам 1.8 и 1.14, операторы $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ фредгольмовы и имеют нулевой индекс. Отсюда, из формулы Грина (1.45) и замечания 1.3 следует, что λ_0 является собственным числом $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\lambda_0' = \bar{\lambda}_0 - 2i(m-1)$ является собственным числом $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$. Следовательно, прямая $\operatorname{Im}\lambda = (-a+2m)+1-2m$ не содержит собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$. Отсюда и из теоремы 1.13 вытекает, что ядро оператора $\mathcal{M}(\theta)$ конечномерно. Следовательно, в силу леммы 1.20, имеем $\dim\ker\mathcal{L}(\theta)^* = \dim\ker\mathcal{M}(\theta) < \infty$.

Рассмотрим случай $l \ge 1$. Пусть $f \in E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$. По доказанному, для существования функции $u \in E_{a-l}^{2m,\,N}(K)$, такой, что $\mathcal{L}(\theta)u = f$, необходимо и достаточно выполнения соотношений $(f,\ \Psi_i)_{E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)} = 0$ для некоторых линейно независимых функций $\Psi_i \in E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)$ $(i=1,\ \dots,\ J)$. Здесь $(\cdot,\ \cdot)_{E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)}$ есть скалярное произведение в гильбертовом пространстве $E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)$. При этом, по теореме 1.5, имеем $u \in E_a^{l+2m,\,N}(K)$.

Используя неравенство Коши–Буняковского и ограниченность оператора вложения $E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$ в $E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)$, получим

$$(f,\ \Psi_i)_{E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)} \le \|f\|_{E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)} \|\Psi_i\|_{E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)} \le$$

$$\le k_1 \|f\|_{E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)} \|\Psi_i\|_{E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)}$$

для всех $f \in E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$. Следовательно, по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, существуют линейно независимые функции $\hat{\Psi}_i \in E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)$ $(i=1,\ \dots,\ J)$, такие, что

$$(f,\ \Psi_i)_{E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)} = (f,\ \hat{\Psi}_i)_{E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)} \text{ для всех } f \in E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma).$$

Таким образом, коядро оператора $\mathcal{L}(\theta)$ имеет конечную коразмерность.

Вторая часть теоремы вытекает из теоремы 1.6. $\square$

2. Докажем следующий результат об однозначной разрешимости нелокальной задачи в двугранном угле.

Теорема 1.17. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Предположим также, что оператор* $\mathcal{L}(\theta) : E_{a-l}^{2m,\,N}(K) \to E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)$ *имеет при всех*

$\theta \in S^{n-3}$ тривиальное ядро и хотя бы для одного $\theta_0 \in S^{n-3}$ тривиальное коядро; тогда оператор

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z),\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\} : H_a^{l+2m,\,N}(\Xi) \to H_a^{l,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$$

есть изоморфизм.

Доказательство. Поскольку оператор $\mathcal{L}(\theta) : E_{a-l}^{2m,\,N}(K) \to E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)$ ограничен, имеет, по теореме 1.6, замкнутый образ и, по предположению, тривиальное ядро, выполняются неравенства

$$k_1\|\mathcal{L}(\theta)u\|_{E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)} \le \|u\|_{E_{a-l}^{2m,\,N}(K)} \le k_2\|\mathcal{L}(\theta)u\|_{E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)}, \tag{1.99}$$

где $k_1,\ k_2 > 0$ не зависят от $\theta \in S^{n-3}$ и u (k_2 не зависит от $\theta \in S^{n-3}$, так как единичная сфера S^{n-3} — компакт).

По предположению, существует $\theta_0 \in S^{n-3}$, такое, что оператор $\mathcal{L}(\theta_0) : E_{a-l}^{2m,\,N}(K) \to E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)$ имеет ограниченный обратный. Следовательно, используя оценки (1.99) и метод продолжения по параметру $\theta \in S^{n-3}$ (см., например, доказательство теоремы 7.1 [18, гл. 2, § 7]), получаем, что $\mathcal{L}(\theta) : E_{a-l}^{2m,\,N}(K) \to E_{a-l}^{0,\,N}(K,\ \gamma)$ имеет ограниченный обратный для всех $\theta \in S^{n-3}$.

Далее, задача (1.1), (1.2) сводится к задаче (1.6), (1.7): для этого делается преобразование Фурье по $z : \mathcal{U}(y,\ z) \to \hat{\mathcal{U}}(y,\ \eta)$ и затем — замена переменных: $y' = |\eta| \cdot y$. После этого, повторяя доказательство леммы 7.3 [21, § 7] и применяя теорему 1.4 настоящей работы, мы получаем необходимое утверждение. □

Теорема 1.18. *Предположим, что для некоторых фиксированных $b \in \mathbb{R}$, $l_1 \ge 0$ оператор*

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{P}_j(D_y,\ D_z),\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\} : H_{a_1}^{l_1+2m,\,N}(\Xi) \to H_{a_1}^{l_1,\,N}(\Xi,\ \Gamma),\ a_1 = b+l_1,$$

фредгольмов; тогда оператор

$$\mathcal{L}(\theta) = \{\mathcal{P}_j(D_y,\ \theta),\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ \theta)\} : E_a^{l+2m,\,N}(K) \to E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma),\ a = b + l,$$

есть изоморфизм для всех $\theta \in S^{n-3}$, $l = 0,\ 1,\ \ldots$

Доказательство. 1) При доказательстве данной теоремы будем следовать схеме работы [21, § 8].

Аналогично доказательству леммы 8.1 [21, § 8] можно показать, что оператор $\mathcal{L}$ есть изоморфизм для $l = l_1$, $a = a_1$. Следовательно, имеем

$$\|\mathcal{U}\|_{H_{a_1}^{l_1+2m,\,N}(\Xi)} \le k_1\|\mathcal{L}\mathcal{U}\|_{H_{a_1}^{l_1,\,N}(\Xi,\ \Gamma)}.$$

Подставляя $\mathcal{U}^p(y,\ z) = p^{1-n/2}e^{i(\theta,\ z)}\omega(z/p)u(y)$ ($\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-2})$, $u \in E_{a_1}^{l_1+2m,\,N}(K)$, $\theta \in S^{n-3}$) в последнее неравенство и переходя к пределу при $p \to \infty$, получаем

$$\|u\|_{E_a^{l+2m,\,N}(K)} \le k_2\|\mathcal{L}(\theta)u\|_{E_a^{l,\,N}(K,\ \gamma)} \tag{1.100}$$

для $l = l_1$, $a = a_1$. Отсюда вытекает, что оператор $\mathcal{L}(\theta)$ имеет тривиальное ядро для $l = l_1$, $a = a_1$. Но, в силу теоремы 1.5, ядро оператора $\mathcal{L}(\theta)$ не зависит от l и $a = b+l$; следовательно, оператор $\mathcal{L}(\theta)$ имеет тривиальное ядро для всех l и $a = b+l$.

Согласно теореме 1.6, выполнение оценки (1.100) означает, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = b+1-2m$ не содержит собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Следовательно, по теореме 1.16, оператор $\mathcal{L}(\theta)$ фредгольмов для всех l и $a = b+l$. Отсюда и из тривиальности ядра $\ker\mathcal{L}(\theta)$ следует, что оценка (1.100) выполняется для всех l и $a = b+l$.

2) Повторяя доказательство леммы 7.3 [21, § 7], из оценки (1.100) получаем

$$\|\mathcal{U}\|_{H_a^{2m,\,N}(\Xi)} \le k_3\|\mathcal{L}\mathcal{U}\|_{H_a^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)},$$

где $l = 0$, $a = b$. Следовательно, оператор $\mathcal{L} : H_b^{2m,\,N}(\Xi) \to H_b^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$ имеет тривиальное ядро и замкнутый образ. Покажем, что образ этого оператора совпадает с $H_b^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$. Действительно, поскольку $H_{b+l_1}^{l_1+2m,\,N}(\Xi) \subset H_b^{2m,\,N}(\Xi)$, образ $\mathcal{R}(\mathcal{L})_{b+l_1}$ оператора $\mathcal{L} : H_{b+l_1}^{l_1+2m,\,N}(\Xi) \to H_{b+l_1}^{l_1,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$ содержится в образе $\mathcal{R}(\mathcal{L})_b$ оператора $\mathcal{L} : H_b^{2m,\,N}(\Xi) \to H_b^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$:

$$\mathcal{R}(\mathcal{L})_{b+l_1} \subset \mathcal{R}(\mathcal{L})_b.$$

Согласно 1), $\mathcal{R}(\mathcal{L})_{b+l_1}$ совпадает с множеством $H_{b+l_1}^{l_1,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$, которое всюду плотно в $H_b^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$; следовательно, $\mathcal{R}(\mathcal{L})_b$ также всюду плотно в $H_b^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$. Но при этом образ $\mathcal{R}(\mathcal{L})_b$ замкнут; следовательно, $\mathcal{R}(\mathcal{L})_b = H_b^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$.

Итак, мы доказали, что оператор $\mathcal{L} : H_b^{2m,\,N}(\Xi) \to H_b^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$ — изоморфизм.

3) Теперь докажем оценку

$$\|\mathcal{V}\|_{\mathcal{H}_{-b+2m}^{2m,\,N}(\Xi)} \le k_4\|\mathcal{M}\mathcal{V}\|_{\mathcal{H}_{-b+2m}^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)}. \tag{1.101}$$

Обозначим через $\mathrm{P} : H_{b-2m}^{0,\,N}(\Xi) \to H_b^{0,\,N}(\Xi)$ неограниченный оператор, соответствующий задаче (1.1), (1.2) с однородными нелокальными условиями. Оператор P имеет область определения

$$D(\mathrm{P}) = \{\mathcal{U} \in H_b^{2m,\,N}(\Xi):\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{U} = 0,\\ j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m\}$$

и действует по формуле

$$\mathrm{P}\mathcal{U} = (\mathcal{P}_1(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_1,\ \ldots,\ \mathcal{P}_N(D_y,\ D_z)\mathcal{U}_N), \quad \mathcal{U} \in D(\mathrm{P}).$$

Обозначим через $\mathrm{Q} : H_{-b}^{0,\,N}(\Xi) \to H_{-b+2m}^{0,\,N}(\Xi)$ неограниченный оператор, соответствующий задаче (1.47)–(1.49) с однородными краевыми условиями и однородными нелокальными условиями сопряжения. Оператор Q имеет область определения

$$D(\mathrm{Q}) = \{\mathcal{V} \in \mathcal{H}_{-b+2m}^{2m,\,N}(\Xi):\ \mathcal{C}_{j\sigma\mu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} = 0,\ \mathcal{T}_{jq\nu}(D_y,\ D_z)\mathcal{V} = 0,\\ j = 1,\ \ldots,\ N;\ \sigma = 1,\ R_j + 1;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m;\\ q = 2,\ \ldots,\ R_j;\ \nu = 1,\ \ldots,\ 2m\}$$

и действует по формуле

$$\mathrm{Q}\mathcal{V} = (\mathcal{W}_1,\ \ldots,\ \mathcal{W}_N),\ \mathcal{W}_j = \mathcal{Q}_j(D_y,\ D_z)\mathcal{V}_{jt} \text{ для } x \in \Xi_{jt},\ \mathcal{V} \in D(\mathrm{Q}).$$

Очевидно, $D(\mathrm{P})$ всюду плотно в $H_{b-2m}^{0,\,N}(\Xi)$, и $D(\mathrm{Q})$ всюду плотно в $\mathcal{H}_{-b}^{0,\,N}(\Xi)$. Из теорем 1.4 и 1.11 следует, что операторы P и Q замкнуты. Поскольку оператор $\mathcal{L} : H_b^{2m,\,N}(\Xi) \to H_b^{0,\,N}(\Xi,\ \Gamma)$ — изоморфизм, оператор P также есть изоморфизм из $D(\mathrm{P})$ на $H_b^{0,\,N}(\Xi)$.

Обозначим через $\mathrm{P}^* : H_{-b}^{0,\,N}(\Xi) \to H_{-b+2m}^{0,\,N}(\Xi)$ оператор, сопряженный к P относительно скалярного произведения $\sum\limits_j (\mathcal{U}_j,\ \mathcal{V}_j)_{\Xi_j}$ в $\prod\limits_j L_2(\Xi_j)$. Поскольку оператор P есть изоморфизм из $D(\mathrm{P})$ на $H_b^{0,\,N}(\Xi)$, оператор P^* также есть изоморфизм из $D(\mathrm{P}^*)$ на $H_{-b+2m}^{0,\,N}(\Xi)$, и его область определения $D(\mathrm{P}^*)$ всюду плотна в $H_{-b}^{0,\,N}(\Xi)$. Оператор P^* определяется формулой

$$\sum_j \big(\mathrm{P}_j\mathcal{U}_j,\ \mathcal{V}_j\big)_{\Xi_j} = \sum_j \big(\mathcal{U}_j,\ (\mathrm{P}^*\mathcal{V})_j\big)_{\Xi_j} \text{ для любой } \mathcal{U} \in D(\mathrm{P}), \mathcal{V} \in D(\mathrm{P}^*).$$

Поскольку замкнутый оператор P^* есть изоморфизм из $D(\mathrm{P}^*)$ на $H_{-b+2m}^{0,\,N}(\Xi)$, имеем

$$\|\mathcal{V}\|_{H_{-b}^{0,\,N}(\Xi)} \le k_5 \|\mathrm{P}^*\mathcal{V}\|_{H_{-b+2m}^{0,\,N}(\Xi)} \tag{1.102}$$

для всех $\mathcal{V} \in D(\mathrm{P}^*)$, где $k_5 > 0$ не зависит от $\mathcal{V}$.

Из теоремы 1.7 и замечания 1.1 следует, что $\mathrm{Q} \subset \mathrm{P}^*$. [7] Следовательно, используя (1.102), получим

$$\|\mathcal{V}\|_{\mathcal{H}^{0,\,N}_{-b}(\Xi)} \le k_5 \|\mathrm{Q}\mathcal{V}\|_{H^{0,\,N}_{-b+2m}(\Xi)}$$

для всех $\mathcal{V} \in D(\mathrm{Q})$. Из последнего неравенства, леммы 1.12 и теоремы 1.11 выводим оценку (1.101).

4) Подставляя $\mathcal{V}^p(y,\ z) = p^{1-n/2} e^{i(\theta,\ z)} w(z/p) v(y)$ $(w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-2}),\ v \in \mathcal{E}^{2m,\,N}_{-b+2m}(K),\ \theta \in S^{n-3})$ в неравенство (1.101) и переходя к пределу при $p \to \infty$, получаем

$$\|v\|_{\mathcal{E}^{2m,\,N}_{-b+2m}(K)} \le k_6 \|\mathcal{M}(\theta) v\|_{\mathcal{E}^{0,\,N}_{-b+2m}(K,\ \gamma)}.$$

Следовательно, ядро оператора $\mathcal{M}(\theta) : \mathcal{E}^{2m,\,N}_{-b+2m}(K) \to \mathcal{E}^{0,\,N}_{-b+2m}(K,\ \gamma)$ тривиально. По лемме 1.20, $\dim\ker \mathcal{L}(\theta)^* = \dim\ker \mathcal{M}(\theta) = 0$. Отсюда и из 1) следует, что оператор $\mathcal{L}(\theta) : E^{2m,\,N}_b(K) \to E^{0,\,N}_b(K,\ \gamma)$ есть изоморфизм. Используя теорему 1.12, выводим справедливость данной теоремы для произвольных l и $a = b + l$. □

Замечание 1.6. Из теорем 1.16 и 1.18 следует, что оператор $\mathcal{L} : H^{l+2m,\,N}_a(\Xi) \to H^{l,\,N}_a(\Xi,\ \Gamma)$ есть изоморфизм для всех l и $a = b + l$, если только оператор $\mathcal{L} : H^{l_1+2m,\,N}_{a_1}(\Xi) \to H^{l_1,\,N}_{a_1}(\Xi,\ \Gamma)$ фредгольмов для некоторых l_1 и $a_1 = b + l_1$.

1.11 Однозначная разрешимость нелокальных задач для уравнения Пуассона в двугранных углах

1. В качестве приложения результатов данной главы мы докажем однозначную разрешимость нелокальных задач для уравнения Пуассона в двугранных углах. Для этого мы изучим соответствующие нелокальные задачи в плоских углах путем сведения их к краевым задачам для дифференциально–разностных уравнений [30, 31, 52], которые исследуются в пп. 1, 2. При этом, в отличие от работ [30, 31, 52], возникающие здесь уравнения содержат отклонения аргумента не по декартовым координатам, а по полярному углу ω.

---

[7] Можно также показать, что $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^*$, но для наших целей достаточно получить более слабый результат.

Положим

$$K = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ b_1 < \omega < b_{R+1}\},$$

$$K_t = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ b_t < \omega < b_{t+1}\}\ (t = 1,\ \dots,\ R),$$

$$\gamma_q = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ \omega = b_q\}\ (q = 1,\ \dots,\ R+1),$$

где $R \geq 1$ целое; $-\pi < b_1 < \cdots < b_{R+1} < \pi$; $b_2 - b_1 = \cdots = b_{R+1} - b_R = d > 0$.

Рассмотрим *разностный* оператор $\mathcal{R} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, действующий по формуле

$$(\mathcal{R}w)(y) = \sum_{p=-R+1}^{R-1} e_p \cdot w(\omega + pd,\ r),$$

где $w(\omega,\ r)$ есть функция $w(y)$, записанная в полярных координатах; $e_p \in \mathbb{R}$.

Пусть $I_K : L_2(K) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ — оператор продолжения функции нулем вне K; $P_K : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(K)$ — оператор сужения функции на K. Введем оператор $\mathcal{R}_K : L_2(K) \to L_2(K)$, действующий по формуле

$$\mathcal{R}_K = P_K \mathcal{R} I_K.$$

Оператор I_K соответствует тому, что решение дифференциально–разностного уравнения будет подчинено однородным краевым условиям Дирихле. Оператор P_K соответствует тому, что дифференциально–разностное уравнение решается в угле K.

Очевидно, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.21. *Операторы* $\mathcal{R} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{R}_K : L_2(K) \to L_2(K)$ *ограничены.*

$$(\mathcal{R}^* w)(x) = \sum_{p=-R+1}^{R-1} e_p \cdot w(\omega - pd,\ r);\ \mathcal{R}_K^* = P_K \mathcal{R}^* I_K.$$

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $\mathfrak{U} : L_2(K) \to L_2^R(K_1)$ по формуле

$$(\mathfrak{U}w)_t(y) = w(\omega + b_t - b_1,\ r) \quad (y \in K_1;\ t = 1,\ \dots,\ R),$$

где $L_2^R(K_1) = \prod\limits_{t=1}^{R} L_2(K_1)$.

Обозначим через $\mathcal{R}_1$ матрицу порядка $R \times R$ с элементами

$$r_{p_1 p_2} = e_{p_2 - p_1}\ (p_1,\ p_2 = 1,\ \dots,\ R).$$

Лемма 1.22. *Оператор* $\mathfrak{U}\mathcal{R}_K\mathfrak{U}^{-1} : L_2^R(K_1) \to L_2^R(K_1)$ *есть оператор умножения на матрицу* $\mathcal{R}_1$.

Лемма 1.23. *Спектр оператора* $\mathcal{R}_K : L_2(K) \to L_2(K)$ *совпадает со спектром матрицы* $\mathcal{R}_1$.

Лемма 1.24. *Оператор* $\mathcal{R}_K+\mathcal{R}_K^* : L_2(K) \to L_2(K)$ *положительно определен тогда и только тогда, когда матрица* $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_1^*$ *положительно определена.*

Леммы 1.22–1.24 доказываются аналогично леммам 8.6–8.8 [52, гл. 2, § 8].

Введем пространства $W_0^l(K)$ и $\mathring{W}_0^l(K)$ как замыкания соответственно множеств $C_0^\infty(\bar{K} \setminus \{0\})$ и $C_0^\infty(K)$ по норме $\left(\sum\limits_{|\alpha|\le l}\int\limits_K |D_y^\alpha w(y)|^2 dy\right)^{1/2}$. Аналогично вводится пространство $W_0^l(K_t)$.

Обозначим через w_t сужение функции w на K_t. Рассмотрим пространства $\mathcal{W}_0^l(K) = \bigoplus\limits_{t=1}^{R} W_0^l(K_t)$ и $\mathcal{E}_a^l(K) = \bigoplus\limits_{t=1}^{R} E_a^l(K_t)$ с нормами $\|w\|_{\mathcal{W}_0^l(K)} = \left(\sum\limits_{t=1}^{R} \|w_t\|^2_{W_0^l(K_t)}\right)^{1/2}$ и $\|w\|_{\mathcal{E}_a^l(K)} = \left(\sum\limits_{t=1}^{R} \|w_t\|^2_{E_a^l(K_t)}\right)^{1/2}$ соответственно.

Лемма 1.25. *Оператор* $\mathcal{R}_K$ *непрерывно отображает* $\mathring{W}_0^l(K)$ *в* $W_0^l(K)$, *и для всех* $w \in \mathring{W}_0^l(K)$,

$$D^\alpha \mathcal{R}_K w = \mathcal{R}_K D^\alpha w \quad (|\alpha| \le l).$$

Лемма 1.25 доказывается аналогично лемме 8.13 [52, гл. 1, § 8].

Лемма 1.26. *Оператор* $\mathcal{R}_K$ *непрерывно отображает* $\mathcal{W}_0^l(K)$ *в* $\mathcal{W}_0^l(K)$ *и* $\mathcal{E}_a^l(K)$ *в* $\mathcal{E}_a^l(K)$.

Если $\det \mathcal{R}_1 \ne 0$, *то оператор* $\mathcal{R}_K^{-1}$ *также непрерывно отображает* $\mathcal{W}_0^l(K)$ *в* $\mathcal{W}_0^l(K)$ *и* $\mathcal{E}_a^l(K)$ *в* $\mathcal{E}_a^l(K)$.

Данная лемма вытекает из лемм 1.22, 1.23.

2. Рассмотрим *дифференциально–разностное* уравнение

$$\mathcal{P}_\mathcal{R} w = -\sum_{i,j=1}^{2} (\mathcal{R}_{ijK} w_{y_j})_{y_i} + \sum_{i=1}^{2} \mathcal{R}_{iK} w_{y_i} + \mathcal{R}_{0K} w = f(y) \quad (y \in K) \quad (1.103)$$

с краевыми условиями

$$w|_{\gamma_1} = w|_{\gamma_{R+1}} = 0, \tag{1.104}$$

где $\mathcal{R}_{ijK} = P_K \mathcal{R}_{ij} I_K$, $\mathcal{R}_{iK} = P_K \mathcal{R}_i I_K$, $\mathcal{R}_{0K} = P_K \mathcal{R}_0 I_K$;

$$\mathcal{R}_{ij} w(y) = \sum_{p=-R+1}^{R-1} e_{ijp} \cdot w(\omega + pd,\ r) \quad (i,\ j = 1,\ 2);$$

$$\mathcal{R}_i w(y) = \sum_{p=-R+1}^{R-1} e_{ip} \cdot w(\omega + pd,\ r) \quad (i = 0,\ 1,\ 2);$$

$e_{ijp},\ e_{ip} \in \mathbb{R}$; $f \in L_2(K)$.

Определение 1.1. Будем говорить, что дифференциально–разностное уравнение (1.103) *сильно эллиптическое* в $\bar{K}$, если для всех $w \in C_0^\infty(\bar{K} \setminus \{0\})$

$$\operatorname{Re}(\mathcal{P}_{\mathcal{R}} w,\ w)_K \geq c_1 \|w\|^2_{W_0^1(K)} - c_2 \|w\|^2_{L_2(K)}, \tag{1.105}$$

где $c_1 > 0,\ c_2 \geq 0$ не зависит от w.

Определение 1.2. Функция $w \in \mathring{W}_0^1(K)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.103), (1.104), если для всех $u \in \mathring{W}_0^1(K)$,

$$\sum_{i,\,j=1}^{2} (\mathcal{R}_{ijK} w_{y_j},\ u_{y_i})_K + \sum_{i=1}^{2} (\mathcal{R}_{iK} w_{y_i},\ u)_K + (\mathcal{R}_{0K} w,\ u)_K = (f,\ u)_K.$$

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbb{P}_{\mathcal{R}} : L_2(K) \to L_2(K)$ с областью определения $D(\mathbb{P}_{\mathcal{R}}) = \{w \in \mathring{W}_0^1(K) :\ \mathcal{P}_{\mathcal{R}} w \in L_2(K)\}$, действующий в пространстве распределений $D'(K)$ по формуле

$$\mathbb{P}_{\mathcal{R}} w = -\sum_{i,\,j=1}^{2} (\mathcal{R}_{ijK} w_{y_j})_{y_i} + \sum_{i=1}^{2} \mathcal{R}_{iK} w_{y_i} + \mathcal{R}_{0K} w.$$

Оператор $\mathbb{P}_{\mathcal{R}}$ будем называть *дифференциально–разностным оператором.*

Нетрудно показать, что определение 1.2 эквивалентно следующему.

Определение 1.3. Функция $w \in D(\mathbb{P}_{\mathcal{R}})$ называется *обобщенным решением* задачи (1.103), (1.104), если

$$\mathbb{P}_{\mathcal{R}} w = f.$$

Обозначим через $\sigma(\mathbb{P}_{\mathcal{R}})$ спектр оператора $\mathbb{P}_{\mathcal{R}} : L_2(K) \to L_2(K)$.

Используя сильную эллиптичность оператора $\mathbb{P}_{\mathcal{R}}$ и леммы 1.21, 1.22, 1.25, можно доказать следующий результат (ср. с теоремой 10.1 [52, гл. 2, § 10]).

Теорема 1.19. *Пусть дифференциально–разностное уравнение (1.103) сильно эллиптическое; тогда*

$$\sigma(\mathbb{P}_{\mathcal{R}}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -c_2\},$$

где $c_2 \geq 0$ константа из формулы (1.105).

Пример 1.5. Рассмотрим уравнение

$$-\Delta\mathcal{R}_K w(y) + \mathcal{R}_K w(y) = f(y) \quad (y \in K) \tag{1.106}$$

с краевыми условиями

$$w|_{\gamma_1} = w|_{\gamma_2} = 0, \tag{1.107}$$

где $K = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0, \ |\omega| < \omega_0 < \pi\}$, $\gamma_\sigma = \{y : \ r > 0, \ \omega = (-1)^\sigma\omega_0\}$ $(\sigma = 1, \ 2)$, $\mathcal{R}w(y) = w(\omega, \ r) - e_1 w(\omega + \omega_0, \ r) - e_2 w(\omega - \omega_0, \ r)$, $e_1, \ e_2 \in \mathbb{R}$; $|e_1 + e_2| < 2$.

Очевидно, матрица $\mathcal{R}_1$ имеет вид

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -e_1 \\ -e_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя лемму 1.25, для всех $w \in C_0^\infty(K \setminus \{0\})$ получаем

$$\operatorname{Re}(-\Delta\mathcal{R}_K w + \mathcal{R}_K w, \ w)_K =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}((\mathcal{R}_K + \mathcal{R}_K^*)w_{y_i}, \ w_{y_i})_K + \frac{1}{2}((\mathcal{R}_K + \mathcal{R}_K^*)w, \ w)_K.$$

Поскольку $|e_1 + e_2| < 2$, матрица $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_1^*$ положительно определенная; следовательно, по лемме 1.24, оператор $\mathcal{R}_K + \mathcal{R}_K^*$ также положительно определенный. Отсюда и из последнего равенства вытекает

$$\operatorname{Re}(-\Delta\mathcal{R}_K w + \mathcal{R}_K w, \ w)_K \geq c_1\|w\|^2_{W_0^1(K)}.$$

Следовательно, по теореме 1.19, краевая задача (1.106), (1.107) имеет единственное обобщенное решение $w \in \mathring{W}_0^1(K)$ для любой правой части $f \in L_2(K)$.

3. Перейдем к доказательству однозначной разрешимости уравнения Пуассона в двугранном угле.

Положим

$$\Xi = \{x = (y,\ z) :\ r > 0,\ |\omega| < \omega_0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\},$$

$$\Xi_1 = \{x = (y,\ z) :\ r > 0,\ -\omega_0 < \omega < 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\},$$

$$\Xi_2 = \{x = (y,\ z) :\ r > 0,\ 0 < \omega < \omega_0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\},$$

$$\Gamma_\sigma = \{x = (y,\ z) :\ r > 0,\ \omega = (-1)^\sigma \omega_0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}\ (\sigma = 1,\ 2),$$

$$\Gamma = \{x = (y,\ z) :\ r > 0,\ \omega = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}.$$

Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$-\Delta \mathcal{U} \equiv -\sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{x_i x_i}(x) = f(x) \quad (x \in \Xi), \tag{1.108}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}|_{\Gamma_1} + e_1 \mathcal{U}(\omega + \omega_0,\ r,\ z)|_{\Gamma_1} = g_1(x) \quad (x \in \Gamma_1), \\ \mathcal{U}|_{\Gamma_2} + e_2 \mathcal{U}(\omega - \omega_0,\ r,\ z)|_{\Gamma_2} = g_2(x) \quad (x \in \Gamma_2). \end{aligned} \tag{1.109}$$

Здесь $\mathcal{U}(\omega,\ r,\ z)$ есть функция $\mathcal{U}(x)$, записанная в цилиндрических координатах; $e_1,\ e_2 \in \mathbb{R}$; $|e_1 + e_2| < 2$.

При $n = 2$ положим $K = \{y :\ r > 0,\ |\omega| < \omega_0\}$, $K_1 = \{y :\ r > 0,\ -\omega_0 < \omega < 0\}$, $K_2 = \{y :\ r > 0,\ 0 < \omega < \omega_0\}$, $\gamma_\sigma = \{y :\ r > 0,\ \omega = (-1)^\sigma \omega_0\}$ $(\sigma = 1,\ 2)$, $\gamma = \{y :\ r > 0,\ \omega = 0\}$. Запишем соответствующую нелокальную задачу в плоском угле K (очевидно, в данном случае $\theta^2 u = u$):

$$-\Delta u + u \equiv -\sum_{i=1}^{2} u_{y_i y_i}(y) + u(y) = f(y) \quad (y \in K), \tag{1.110}$$

$$\begin{aligned} u|_{\gamma_1} + e_1 u(\omega + \omega_0,\ r)|_{\gamma_1} = g_1(y) \quad (y \in \gamma_1), \\ u|_{\gamma_2} + e_2 u(\omega - \omega_0,\ r)|_{\gamma_2} = g_2(y) \quad (y \in \gamma_2). \end{aligned} \tag{1.111}$$

Очевидно, соответствующая однородная задача с параметром λ имеет вид

$$-\tilde{\mathcal{U}}_{\omega\omega} + \lambda^2 \tilde{\mathcal{U}} = 0 \quad (|\omega| < \omega_0), \tag{1.112}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}(-\omega_0) + e_1 \tilde{\mathcal{U}}(0) = 0, \\ \tilde{\mathcal{U}}(\omega_0) + e_2 \tilde{\mathcal{U}}(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.113}$$

Собственные числа задачи (1.112), (1.113) находятся непосредственным вычислением. Если $e_1 + e_2 = 0$, то

$$\lambda_k = i \frac{\pi}{2\omega_0} k \quad (k = \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

Если $0 < |e_1 + e_2| < 2$, то

$$\lambda_k = i\tfrac{\pi}{\omega_0}k \quad (k = \pm 1,\ \pm 2,\ \dots),$$

$$\lambda_p^{\pm} = \begin{cases} i\dfrac{\pm\arctan\frac{\sqrt{4-(e_1+e_2)^2}}{e_1+e_2}+2\pi p}{\omega_0}, & \text{если } -2 < e_1 + e_2 < 0,\\ i\dfrac{\pm\arctan\frac{\sqrt{4-(e_1+e_2)^2}}{e_1+e_2}+2\pi (p+1)}{\omega_0}, & \text{если } 0 < e_1 + e_2 < 2 \end{cases}$$
$$(p = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

Очевидно, прямая $\operatorname{Im}\lambda = 0$ не содержит собственных чисел задачи (1.112), (1.113). Следовательно, по теореме 1.16, оператор

$$\begin{gathered}\bigl(-\Delta u + u,\ u|_{\gamma_1} + e_1 u(\omega+\omega_0,\ r)|_{\gamma_1},\ u|_{\gamma_2} + e_2 u(\omega-\omega_0,\ r)|_{\gamma_2}\bigr) : E_1^2(K) \to \\ \to E_1^0(K) \times \prod_{\sigma=1,\,2} E_1^{3/2}(\gamma_\sigma)\end{gathered} \tag{1.114}$$

фредгольмов. Покажем, что оператор (1.114) имеет тривиальное ядро.

Пусть $u \in E_1^2(K)$ — решение однородной задачи (1.110), (1.111). Рассмотрим разностный оператор $\mathcal{R}_K = P_K \mathcal{R} I_K$, где

$$\mathcal{R}w(y) = w(\omega,\ r) - e_1 w(\omega+\omega_0,\ r) - e_2 w(\omega-\omega_0,\ r).$$

Положим $u = \mathcal{R}_K w$. Поскольку $|e_1 + e_2| < 2$, матрица $\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -e_1 \\ -e_2 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующая разностному оператору $\mathcal{R}_K$, невырожденная, и

$$\mathcal{R}_1^{-1} = \frac{1}{1 - e_1 e_2}\begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ e_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по лемме 1.23, оператор $\mathcal{R}_K$ имеет ограниченный обратный $\mathcal{R}_K^{-1}$, и $w = \mathcal{R}_K^{-1}u$.

Теперь покажем, что $w \in \mathcal{E}_1^2(K) \cap E_1^1(K)$ и $w|_{\gamma_1} = w|_{\gamma_2} = 0$. Действительно, по лемме 1.26, $w \in \mathcal{E}_1^2(K)$. Далее, используя изоморфизм $\mathfrak{U}$ (который в данном случае имеет вид

$$(\mathfrak{U}w)_1(y) = w(\omega,\ r)\ (y \in K_1), \qquad (\mathfrak{U}w)_2(y) = w(\omega+\omega_0,\ r)\ (y \in K_1)),$$

матрицу $\mathcal{R}_1^{-1}$ и лемму 1.22, получим

$$w_1|_\gamma = [\mathfrak{U}w]_1(0,\ r) = \frac{1}{1-e_1e_2}([\mathfrak{U}u]_1(0,\ r) + e_1[\mathfrak{U}u]_2(0,\ r)) = \\ = \frac{1}{1-e_1e_2}(u(0,\ r) + e_1u(\omega_0,\ r)),$$

$$w_2|_\gamma = [\mathfrak{U}w]_2(-\omega_0,\ r) = \frac{1}{1-e_1e_2}(e_2[\mathfrak{U}u]_1(-\omega_0,\ r) + [\mathfrak{U}u]_2(-\omega_0,\ r)) = \\ = \frac{1}{1-e_1e_2}(e_2u(-\omega_0,\ r) + u(0,\ r)). \tag{1.115}$$

Но функция u удовлетворяет однородным условиям (1.111); следовательно, $e_1u(\omega_0,\ r) = e_2u(-\omega_0,\ r)$. Отсюда и из (1.115) вытекает, что $w_1|_\gamma = w_2|_\gamma$, то есть $w \in E_1^1(K)$.

Похожим образом, имеем

$$w_1|_{\gamma_1} = [\mathfrak{U}w]_1(-\omega_0,\ r) = \frac{1}{1-e_1e_2}([\mathfrak{U}u]_1(-\omega_0,\ r) + e_1[\mathfrak{U}u]_2(-\omega_0,\ r)) = \\ = \frac{1}{1-e_1e_2}(u(-\omega_0,\ r) + e_1u(0,\ r)) = 0,$$

$$w_2|_{\gamma_2} = [\mathfrak{U}w]_2(0,\ r) = \frac{1}{1-e_1e_2}(e_2[\mathfrak{U}u]_1(0,\ r) + [\mathfrak{U}u]_2(0,\ r)) = \\ = \frac{1}{1-e_1e_2}(e_2u(0,\ r) + u(\omega_0,\ r)) = 0,$$

поскольку функция u удовлетворяет однородным условиям (1.111).

Следовательно, из вложения $\mathcal{E}_1^2(K) \cap E_1^1(K) \subset \mathring{W}_0^1(K)$ вытекает, что $w \in \mathring{W}_0^1(K)$, и w есть обобщенное решение краевой задачи (1.106), (1.107) для $f = 0$. Согласно примеру 1.5, $w = 0$; поэтому $u = \mathcal{R}_K w = 0$.

Для доказательства того, что образ оператора (1.114) совпадает с $E_1^0(K) \times \prod\limits_{\sigma=1,\,2} E_1^{3/2}(\gamma_\sigma)$, изучим задачи, формально сопряженные к задачам (1.108), (1.109) и (1.110), (1.111) относительно формул Грина. Аналогично примеру 1.1, получим следующие нелокальные задачи трансмиссии:

$$-\Delta\mathcal{V}_t + \mathcal{V}_t = f(x) \quad (x \in \Xi_t;\ t = 1,\ 2) \tag{1.116}$$

$$\mathcal{V}_1|_{\Gamma_1} = g_1(x) \quad (x \in \Gamma_1), \\ \mathcal{V}_2|_{\Gamma_2} = g_2(x) \quad (x \in \Gamma_2), \tag{1.117}$$

$$\mathcal{V}_1|_\Gamma - \mathcal{V}_2|_\Gamma = h_1(x) \quad (x \in \Gamma), \\ \frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial n}\Big|_\Gamma - \frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial n}\Big|_\Gamma + e_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial n_1}(\omega-\omega_0,\ r,\ z)\Big|_\Gamma + e_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial n_2}(\omega+\omega_0,\ r,\ z)\Big|_\Gamma = \\ = h_2(x) \quad (x \in \Gamma) \tag{1.118}$$

и

$$-\Delta v_t + v_t = f(y) \quad (y \in K_t;\ t = 1,\ 2) \tag{1.119}$$

$$\begin{aligned} v_1|_{\gamma_1} &= g_1(y) \quad (y \in \gamma_1),\\ v_2|_{\gamma_2} &= g_2(y) \quad (y \in \gamma_2), \end{aligned} \tag{1.120}$$

$$\begin{gathered} v_1|_\gamma - v_2|_\gamma = h_1(y) \quad (y \in \gamma),\\ \frac{\partial v_1}{\partial n}\Big|_\gamma - \frac{\partial v_2}{\partial n}\Big|_\gamma + e_1\frac{\partial v_1}{\partial n_1}(\omega-\omega_0,\ r)\Big|_\gamma + e_2\frac{\partial v_2}{\partial n_2}(\omega+\omega_0,\ r)\Big|_\gamma =\\ = h_2(y) \quad (y \in \gamma_2). \end{gathered} \tag{1.121}$$

Здесь n_1 — единичный нормальный к Γ_1 (γ_1) вектор, направленный внутрь Ξ_1 (K_1); n и n_2 — единичные нормальные к Γ (γ) и Γ_2 (γ_2) соответственно векторы, направленные внутрь Ξ_2 (K_2). Как отмечалось в доказательстве теоремы 1.16, λ_0 есть собственное число задачи (1.112), (1.113) тогда и только тогда, когда $\lambda_0' = \bar\lambda_0$ есть собственное число нелокальной задачи трансмиссии с параметром λ, соответствующей задаче (1.116)–(1.118) (указанная задача с параметром записывается очевидным образом). Следовательно, нелокальная задача трансмиссии с параметром λ также не содержит собственных чисел на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 0$. Тогда, по теореме 1.13, оператор

$$\begin{gathered} \Big(-v_\Delta + v,\ v_1|_{\gamma_1},\ v_2|_{\gamma_2},\ v_1|_\gamma - v_2|_\gamma,\ \frac{\partial v_1}{\partial n}\Big|_\gamma - \frac{\partial v_2}{\partial n}\Big|_\gamma +\\ +e_1\frac{\partial v_1}{\partial n_1}(\omega-\omega_0,\ r)\Big|_\gamma + e_2\frac{\partial v_2}{\partial n_2}(\omega+\omega_0,\ r)\Big|_\gamma\Big) :\\ \mathcal{E}_1^2(K) \to \mathcal{E}_1^0(K) \times \prod_{\sigma=1,\,2} E_1^{3/2}(\gamma_\sigma) \times \prod_{\nu=1,\,2} E_1^{2-\nu+1/2}(\gamma) \end{gathered} \tag{1.122}$$

имеет конечномерное ядро. Здесь $v_\Delta(y) = \Delta v_t(y)$ для $y \in K_t$, $t = 1,\ 2$. Покажем, что ядро оператора (1.122) тривиально.

Пусть $v \in \mathcal{E}_1^2(K)$ — решение однородной задачи (1.119)–(1.121). Рассмотрим сопряженный разностный оператор $\mathcal{R}_K^*$. Ему соответствует матрица $\mathcal{R}_1^* = \begin{pmatrix} 1 & -e_2\\ -e_1 & 1 \end{pmatrix}$. Поскольку $|e_1+e_2| < 2$, матрица $\mathcal{R}_1^*$ невырожденная, и, по лемме 1.23, существует обратный оператор $(\mathcal{R}_K^*)^{-1}$. Положим $v = (\mathcal{R}_K^*)^{-1}w$; тогда $w = \mathcal{R}_K^* v$.

Покажем, что $w \in E_1^2(K)$ и $w|_{\gamma_1} + e_2 w(\omega+\omega_0,\ r)|_{\gamma_1} = 0$, $w|_{\gamma_2} + e_1 w(\omega-\omega_0,\ r)|_{\gamma_2} = 0$. Действительно, по лемме 1.26, $w \in \mathcal{E}_1^2(K)$. Далее, используя изоморфизм $\mathfrak{U}$, матрицу $\mathcal{R}_1^*$ и лемму 1.22, получим

$$\begin{gathered} w_1|_\gamma = [\mathfrak{U}w]_1(0,\ r) = [\mathfrak{U}v]_1(0,\ r) - e_2[\mathfrak{U}v]_2(0,\ r) = \\ = v_1(0,\ r) - e_2 v_2(\omega_0,\ r) = v_1(0,\ r), \\ w_2|_\gamma = [\mathfrak{U}w]_2(-\omega_0,\ r) = -e_1[\mathfrak{U}v]_1(-\omega_0,\ r) + [\mathfrak{U}v]_2(-\omega_0,\ r) = \\ = -e_1 v_1(-\omega_0,\ r) + v_2(0,\ r) = v_2(0,\ r), \end{gathered} \tag{1.123}$$

поскольку v удовлетворяет однородном условиям (1.120). Из (1.123) и однородных условий (1.121) получаем $w_1|_{\gamma_2} = w_2|_{\gamma_2}$.

Аналогично,

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial w_1}{\partial \omega}\right|_\gamma = \frac{\partial v_1}{\partial \omega}(0,\ r) - e_2 \frac{\partial v_2}{\partial \omega}(\omega_0,\ r), \\ \left.\frac{\partial w_2}{\partial \omega}\right|_\gamma = -e_1 \frac{\partial v_1}{\partial \omega}(-\omega_0,\ r) + \frac{\partial v_2}{\partial \omega}(0,\ r). \end{gathered} \tag{1.124}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial n_\sigma} = (-1)^{\sigma+1}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \omega}$, $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \omega}$, из (1.124) и однородных условий (1.121) получаем $\left.\dfrac{\partial w_1}{\partial n}\right|_\gamma = \left.\dfrac{\partial w_2}{\partial n}\right|_\gamma$. Следовательно, $w \in E_1^2(K)$. Аналогично доказывается, что $w|_{\gamma_1} + e_2 w(\omega+\omega_0,\ r)|_{\gamma_1} = 0$, $w|_{\gamma_2} + e_1 w(\omega - \omega_0,\ r)|_{\gamma_2} = 0$.

Таким образом, $w \in E_1^2(K)$ есть решение задачи

$$-\Delta w + w = 0 \quad (y \in K), \tag{1.125}$$

$$\begin{gathered} w|_{\gamma_1} + e_2 w(\omega + \omega_0,\ r)|_{\gamma_1} = 0 \quad (y \in \gamma_1), \\ w|_{\gamma_2} + e_1 w(\omega - \omega_0,\ r)|_{\gamma_2} = 0 \quad (y \in \gamma_2). \end{gathered} \tag{1.126}$$

Задача (1.125), (1.126) есть нелокальная краевая задача типа (1.110), (1.111) (в последней необходимо заменить e_1 на e_2, а e_2 — на e_1). Поэтому, по доказанному, $w = 0$, если $|e_1 + e_2| < 2$. Следовательно, $v = (\mathcal{R}_K^*)^{-1} w = 0$.

Из леммы 1.20 вытекает, что размерность коядра оператора (1.114) равна размерности ядра оператора (1.122); следовательно, коядро оператора (1.114) тривиально. Наконец, применяя теорему 1.17, получаем следующий результат:

нелокальная краевая задача (1.108), (1.109) имеет единственное решение $\mathcal{U} \in H_{1+l}^{l+2}(\Xi)$ *для любой правой части* $\{f,\ g_1,\ g_2\} \in H_{1+l}^l(K) \times \prod\limits_{\sigma=1,\,2} H_{1+l}^{l+3/2}(\Gamma_\sigma)$.

Глава 2

Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах

В данной главе изучается асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах. Результаты работы [30] обобщаются на случай преобразования переменных, содержащего как поворот, так и растяжение–сжатие аргумента. Выводятся явные формулы для коэффициентов в асимптотике решений как в терминах сопряженных нелокальных операторов, так и в терминах формулы Грина, полученной в гл. 1. Доказанные здесь результаты будут использованы в гл. 3 при изучении асимптотики решений нелокальных задач в плоских ограниченных областях.

Для наглядности мы исследуем задачу в одном угле K с нелокальными членами, носители которых расположены на одном луче γ, лежащем строго внутри угла K. Общий случай (см. гл. 1) рассматривается совершенно аналогично, и именно его мы будем иметь в виду в гл. 3, ссылаясь на результаты настоящей главы.

2.1 Постановка нелокальной задачи в плоском угле. Асимптотика решений

1. Рассмотрим плоский угол $K = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ b_1 < \omega < b_2\}$ со сторонами $\gamma_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ \omega = b_\sigma\}$ $(\sigma = 1,\ 2)$, где $-\pi < b_1 < b_2 < \pi$.

Обозначим через $\mathcal{P}(D_y)$, $B_{\sigma\mu}(D_y)$ и $B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)$ однородные дифференциальные операторы с постоянными комплексными коэффициентами порядков $2m$, $m_{\sigma\mu}$ и $m_{\sigma\mu}$ соответственно ($m_{\sigma\mu} \le 2m-1$; $\sigma = 1,\ 2$; $\mu = 1,\ \ldots,\ m$). Так же как и в гл. 1, будем предполагать выполненными следующие условия [19, гл. 2, §§ 1.2, 1.4].

Условие 2.1. *Оператор $\mathcal{P}(D_y)$ собственно эллиптический.*

Условие 2.2. *Система операторов $\{B_{\sigma\mu}(D_y)\}_{\mu=1}^m$ является нормальной и накрывает $\mathcal{P}(D_y)$ на γ_σ ($\sigma = 1,\ 2$).*

На операторы $B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)$ (играющие в дальнейшем роль нелокальных) никаких условий, кроме ограничения на порядок, не накладывается.

Рассмотрим в плоском угле K нелокальную краевую задачу

$$\mathcal{P}(D_y)\mathcal{U} = f(y) \quad (y \in K), \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U} \equiv B_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U}(y)|_{\gamma_\sigma} + (B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U})(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} = g_{\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_\sigma),\\ \sigma = 1,\ 2;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $\mathcal{G}_\sigma$ — оператор поворота на угол ω_σ и растяжения в β_σ раз в плоскости $\{y\}$, так, что $b_1 < b_1 + \omega_1 = b_2 + \omega_2 = b < b_2$, $0 < \beta_\sigma$.

Введем соответствующий нелокальной задаче (2.1), (2.2) ограниченный оператор

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \{\mathcal{P}(D_y),\ \mathcal{B}_{\sigma\mu}(D_y)\} : H_a^{l+2m}(K) \to\\ \to H_a^l(K,\ \gamma) = H_a^l(K) \times \prod_{\sigma=1,2}\prod_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m_{\sigma\mu}-1/2}(\gamma_\sigma).\end{gathered}$$

2. Запишем операторы $\mathcal{P}(D_y)$, $B_{\sigma\mu}(D_y)$, $B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)$ в полярных координатах: $\mathcal{P}(D_y) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $B_{\sigma\mu}(D_y) = r^{-m_{\sigma\mu}}\tilde{B}_{\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y) = r^{-m_{\sigma\mu}}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$.

Аналогично пп. 1, 2 § 1.2 гл. 1 введем оператор–функцию

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = \{\tilde{\mathcal{P}}(\lambda),\ \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)\} : W^{l+2m}(b_1,\ b_2) \to W^l[b_1,\ b_2] = W^l(b_1,\ b_2) \times \mathbb{C}^{2m},$$

где $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)\tilde{\mathcal{U}}(\omega) = \tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}(\omega)$, $\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{\mathcal{U}}(\omega) = \tilde{B}_{\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{U}}(\omega)|_{\omega=b_\sigma} + \beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\omega,\ D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{U}}(\omega+\omega_\sigma)|_{\omega=b_\sigma}$; здесь (и далее) мы для краткости опускаем аргументы ω и D_ω в дифференциальных операторах.

Напомним некоторые известные определения и факты (см. [6]). Голоморфная в точке λ_0 вектор–функция $\varphi(\lambda)$ со значениями в $W^{l+2m}(b_1,\ b_2)$, такая, что $\varphi(\lambda_0) \ne 0$, называется *корневой функцией* оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$

в точке λ_0, если вектор–функция $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi(\lambda)$ обращается в этой точке в нуль. Если $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ имеет хотя бы одну корневую функцию в точке λ_0, то λ_0 называется *собственным числом* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Кратность нуля вектор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi(\lambda)$ в точке λ_0 называется *кратностью корневой функции* $\varphi(\lambda)$, а вектор $\varphi^{(0)} = \varphi(\lambda_0)$ — *собственным вектором*, отвечающим числу λ_0. Пусть $\varphi(\lambda)$ — корневая функция в точке λ_0 кратности $\varkappa$ и $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^j\varphi^{(j)}$. Тогда векторы $\varphi^{(1)},\ \dots,\ \varphi^{(\varkappa-1)}$ называются *присоединенными к собственному вектору* φ_0, а упорядоченный набор $\varphi^{(0)},\ \dots,\ \varphi^{(\varkappa-1)}$ — *жордановой цепочкой*, отвечающей числу λ_0. *Рангом* собственного вектора $\varphi^{(0)}$ ($\operatorname{rank}\varphi^{(0)}$) называется максимальная из кратностей всех корневых функций, таких, что $\varphi(\lambda_0) = \varphi^{(0)}$.

Замечание 2.1. Собственный и присоединенные векторы $\varphi^{(0)},\ \dots,\ \varphi^{(\varkappa-1)}$ оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, отвечающие собственному числу λ_0, удовлетворяют равенствам

$$\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}\partial_\lambda^q\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)\varphi^{(\nu-q)} = 0, \quad \nu = 0,\ \dots,\ \varkappa-1. \tag{2.3}$$

Здесь и далее ∂_λ^q обозначает производную по λ порядка q.

Нетрудно показать, что при повышении гладкости функции f в правой части $\{f,\ g_{\sigma\mu}\}$ задачи

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\mathcal{U} = \{f,\ g_{\sigma\mu}\}$$

повышается и гладкость решения $\mathcal{U}$. [1)] Отсюда и из равенств (2.3) следует, что собственные и присоединенные векторы оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ являются бесконечно гладкими функциями на отрезке $[b_1,\ b_2]$.

Из леммы 1.8 гл. 1 следует, что все собственные числа оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ изолированы; при этом $\dim\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0) < \infty$ для любого собственного числа λ_0 и ранги всех собственных векторов конечны. Пусть $J = \dim\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)$ и $\varphi^{(0,1)},\ \dots,\ \varphi^{(0,J)}$ — такая система собственных векторов, что $\operatorname{rank}\varphi^{(0,1)}$ — максимальный из рангов всех собственных векторов, отвечающих числу λ_0, а $\operatorname{rank}\varphi^{(0,j)}$ $(j = 2,\ \dots,\ J)$ — максимальный из рангов собственных векторов из какого-нибудь прямого дополнения в $\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)$ к линейной оболочке векторов $\varphi^{(0,1)},\ \dots,\ \varphi^{(0,j-1)}$. Числа

[1)]Для полноты картины мы приведем доказательство этого факта в § 2.2 (см. лемму 2.3), где также будет рассмотрен вопрос о гладкости решений сопряженной нелокальной задачи с параметром λ.

$\varkappa_j = \operatorname{rank}\varphi^{(0,j)}$ называют *частными кратностями* собственного числа λ_0, а сумму $\varkappa_1+\dots+\varkappa_J$ — *(полной) кратностью* λ_0. Если для каждого $j = 1, \dots, J$ векторы $\varphi^{(0,j)}, \dots, \varphi^{(\varkappa_j-1,j)}$ образуют жорданову цепочку, то набор векторов $\{\varphi^{(0,j)}, \dots, \varphi^{(\varkappa_j-1,j)} : j = 1, \dots, J\}$ называется *канонической системой жордановых цепочек*, отвечающей собственному числу λ_0.

Пример 2.1. Положим $b_1 = -\omega_0,\ b_2 = \omega_0$. Рассмотрим в плоском угле $K = \{y \in \mathbb{R}^2 : |\omega| < \omega_0\}$ $(0 < \omega_0 < \pi)$ со сторонами $\gamma_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 : \omega = (-1)^\sigma\omega_0\}$, $\sigma = 1,\ 2$, нелокальную задачу

$$-\Delta\mathcal{U} = f(y) \quad (y \in K), \tag{2.4}$$

$$\mathcal{U}|_{\gamma_1} = 0,\ \mathcal{U}|_{\gamma_2} + e_0\,\mathcal{U}(\mathcal{G}_0 y)|_{\gamma_2} = 0, \tag{2.5}$$

где $e_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{G}_0$ — оператор поворота на угол $-\omega_0$. Задаче (2.4), (2.5) соответствует следующая модельная нелокальная задача на собственные значения:

$$\frac{d^2\varphi(\omega)}{d\omega^2} - \lambda^2\varphi(\omega) = 0 \quad (|\omega| < \omega_0), \tag{2.6}$$

$$\varphi(-\omega_0) = 0,\ \varphi(\omega_0) + e_0\,\varphi(0) = 0. \tag{2.7}$$

Непосредственно проверяется (см. также [24, гл. 2]), что при $e_0 = 0$ (то есть если задача (2.4), (2.5) — "локальная") собственные значения задачи (2.6), (2.7) имеют вид $\lambda_k = i\frac{\pi k}{2\omega_0}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; им соответствуют (с точностью до умножения на произвольную постоянную) собственные векторы $\varphi_k^{(0)}(\omega) = e^{i\frac{\pi k}{2\omega_0}\omega} - e^{-i\frac{\pi k}{2\omega_0}\omega}$. Присоединенных векторов при $e_0 = 0$ нет, то есть все собственные числа имеют кратность 1.

Покажем, что при $e_0 \neq 0$ собственным значениям модельной задачи (2.6), (2.7) могут соответствовать жордановы цепочки длины больше чем 1.

I) Вначале рассмотрим случай $\lambda \neq 0$. Подставляя общее решение $\varphi(\omega) = c_1 e^{\lambda\omega} + c_2 e^{-\lambda\omega}$ уравнения (2.6) в нелокальные условия (2.7), получим

$$\begin{aligned} &c_1 e^{-\lambda\omega_0} + c_2 e^{\lambda\omega_0} = 0,\\ &(e^{\lambda\omega_0} + e_0)c_1 + (e^{-\lambda\omega_0} + e_0)c_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Приравняем определитель $D(\lambda)$ системы (2.8) к нулю:

$$(e^{-\lambda\omega_0} - e^{\lambda\omega_0})(e^{\lambda\omega_0} + e^{-\lambda\omega_0} + e_0) = 0.$$

1) Пусть $e^{-\lambda\omega_0} - e^{\lambda\omega_0} = 0$. Тогда получаем серию собственных значений

$$\lambda_{1k} = i\frac{\pi k}{\omega_0},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

им соответствуют собственные векторы

$$\varphi_{1k}^{(0)}(\omega) = e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} - e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega}.$$

Рассмотрим задачу на нахождение присоединенного вектора $\varphi_{1k}^{(1)}(\omega)$. Согласно (2.3), $\varphi_{1k}^{(1)}(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi_{1k}^{(1)}}{d\omega^2} + \frac{(\pi k)^2}{\omega_0^2}\varphi_{1k}^{(1)} - 2i\frac{\pi k}{\omega_0}\varphi_{1k}^{(0)} = 0 \quad (|\omega| < \omega_0)$$

и нелокальным условиям (2.7). Подставляя общее решение $\varphi(\omega) = c_1 e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} + c_2 e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} + \omega(e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} + e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega})$ последнего уравнения в нелокальные условия (2.7), получим

$$\begin{aligned} &c_1 + c_2 = 2\omega_0, \\ &((-1)^k + e_0)c_1 + ((-1)^k + e_0)c_2 = -2(-1)^k\omega_0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Следовательно, присоединенный вектор $\varphi_{1k}^{(1)}(\omega)$ существует тогда и только тогда, когда

$$e_0 = 2(-1)^{k+1}.$$

При этом можно положить

$$\varphi_{1k}^{(1)}(\omega) = (\omega + 2\omega_0)e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} + \omega e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega}.$$

Аналогично, используя (2.3), находим при $e_0 = 2(-1)^{k+1}$ второй присоединенный вектор

$$\varphi_{1k}^{(2)}(\omega) = (\frac{\omega^2}{2} + 2\omega_0\omega + 2\omega_0^2)e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} - \frac{\omega^2}{2}e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega}.$$

Непосредственно проверяется, что третьего присоединенного вектора не существует.

2) Пусть

$$e^{\lambda\omega_0} + e^{-\lambda\omega_0} + e_0 = 0. \tag{2.10}$$

Тогда имеем следующую серию собственных значений:

$$\lambda_{2n}^{\pm} = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(-\frac{e_0}{2} \pm \frac{\sqrt{e_0^2-4}}{2}\right)}{\omega_0} + i\dfrac{2\pi n}{\omega_0} & \text{при } e_0 < -2; \\ i\dfrac{\pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4-e_0^2}}{e_0} + 2\pi n}{\omega_0} & \text{при } -2 < e_0 < 0; \\ i\dfrac{\pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4-e_0^2}}{e_0} + (2n+1)\pi}{\omega_0} & \text{при } 0 < e_0 < 2; \\ \dfrac{\ln\left(\frac{e_0}{2} \pm \frac{\sqrt{e_0^2-4}}{2}\right)}{\omega_0} + i\dfrac{(2n+1)\pi}{\omega_0} & \text{при } e_0 > 2; \end{cases}$$

$n \in \mathbb{Z}$. Если $|e_0| = 2$, то мы получаем собственные значения из серии $\{\lambda_{1k}\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, рассмотренной выше. Собственному значению $\lambda_{2n}^{\pm}$ соответствует собственный вектор

$$\varphi_{2n}^{(0)\pm}(\omega) = e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega} - e^{-2\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega}.$$

Покажем, что при $\lambda = \lambda_{2n}^{\pm}$ присоединенные векторы отсутствуют. Подставим общее решение $\varphi_{2n}^{(1)\pm}(\omega) = c_1 e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega} + c_2 e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega} + \omega(e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega} + e^{-2\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega})$ уравнения

$$\frac{d^2\varphi_{2n}^{(1)\pm}}{d\omega^2} - (\lambda_{2n}^{\pm})^2\varphi_{2n}^{(1)\pm} - 2\lambda_{2n}^{\pm}\varphi_{2n}^{(0)\pm} = 0 \quad (|\omega| < \omega_0)$$

в нелокальные условия (2.7). Имеем

$$\begin{aligned} &e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}c_1 + e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}c_2 = 2\omega_0 e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}, \\ &(e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + e_0)c_1 + (e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + e_0)c_2 = -\omega_0(e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + e^{-3\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ранг матрицы системы (2.11) равен 1. Следовательно, система (2.11) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} & 2\omega_0 e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} \\ e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + e_0 & -\omega_0(e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + e^{-3\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}) \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$3e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + e^{-3\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + 2e_0 = 0.$$

Отсюда, учитывая (2.10), вытекает, что либо $e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} = 1$, $e_0 = -2$, либо $e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} = -1$, $e_0 = 2$. Однако мы рассматриваем случай $|e_0| \neq 2$. Следовательно, при $\lambda = \lambda_{2n}^{\pm}$ присоединенных векторов не существует.

II) Случай $\lambda = 0$ рассматривается аналогично. Оказывается, что $\lambda = 0$ есть собственное значение задачи (2.6), (2.7) тогда и только тогда, когда $e_0 = -2$. При этом, если $e_0 = -2$, собственному значению $\lambda = 0$ соответствует один собственный вектор $\varphi_0^{(0)}(\omega) = \omega + \omega_0$ и один присоединенный $\varphi_0^{(1)}(\omega) = 0$.

Таким образом, показано, что задача (2.6), (2.7) имеет собственные значения кратности больше, чем 1, тогда и только тогда, когда $|e_0| = 2$.

3. Прежде, чем сформулировать теорему об асимптотике решений задачи (2.1), (2.2), установим две леммы, описывающие решения однородной задачи.

Лемма 2.1. *Функция*

$$\mathcal{U}(\omega,\ r) = r^{i\lambda_0} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!}(i \ln r)^q \varphi^{(p-q)}(\omega), \tag{2.12}$$

где $\varphi^{(s)} \in W^{l+2m}(b_1,\ b_2)$, $s = 0,\ \ldots \varkappa - 1$, является решением однородной задачи (2.1), (2.2) в том и только в том случае, если λ_0 — собственное число оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, а $\varphi^{(0)},\ \ldots,\ \varphi^{(\varkappa-1)}$ — жорданова цепочка, отвечающая этому числу; $p \leq \varkappa - 1$.

Доказательство. Не указывая, как и ранее, зависимость дифференциальных операторов от ω и D_ω, запишем

$$\begin{gathered}\mathcal{P}(D_y)\mathcal{U} = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(rD_r)\mathcal{U} = r^{-2m+i\lambda_0}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0 + rD_r) \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!}(i \ln r)^q \varphi^{(p-q)} = \\ r^{-2m+i\lambda_0} \sum_{\nu=0}^{p} \frac{1}{\nu!} \partial_\lambda^\nu \tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0) \sum_{q=\nu}^{p} \frac{1}{(q-\nu)!}(i \ln r)^{q-\nu} \varphi^{(p-q)}.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Аналогично,

$$B_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U} = r^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0} \sum_{\nu=0}^{p} \frac{1}{\nu!} \partial_\lambda^\nu \tilde{B}_{\sigma\mu}(\lambda_0) \sum_{q=\nu}^{p} \frac{1}{(q-\nu)!}(i \ln r)^{q-\nu} \varphi^{(p-q)}. \tag{2.14}$$

Наконец, рассмотрим выражение $(B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U})(\mathcal{G}y)$.

$$(B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U})(\mathcal{G}y) = r^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0}\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0}\times \\ \times\sum_{s=0}^{p}\frac{1}{s!}\partial_\lambda^s\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda_0)\sum_{q=s}^{p}\frac{1}{(q-s)!}(i\ln r+i\ln\beta_\sigma)^{q-s}\varphi^{(p-q)}(\omega+\omega_\sigma). \quad (2.15)$$

Раскладывая $(i\ln r+i\ln\beta_\sigma)^{q-s}$ по формуле бинома Ньютона и используя соотношение

$$\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0}\sum_{s=0}^{\nu}\frac{1}{s!(\nu-s)!}\partial_\lambda^s\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda_0)(i\ln\beta_\sigma)^{\nu-s} = \frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu(\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_0},$$

из (2.15) получим

$$(B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U})(\mathcal{G}y) = r^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0}\times \\ \times\sum_{\nu=0}^{p}\frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu(\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{q=\nu}^{p}\frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\varphi^{(p-q)}(\omega+\omega_\sigma). \quad (2.16)$$

Группируя в равенствах (2.13), (2.14), (2.16) слагаемые при одинаковых степенях $i\ln r$, видим, что функция $\mathcal{U}$ удовлетворяет однородной задаче (2.1), (2.2) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{h!}\partial_\lambda^h\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)\varphi^{(k-h)} = 0, \quad k=0,\ \dots,\ p.$$

□

Всякое решение вида (2.12) однородной задачи (2.1), (2.2) будем называть *степенным решением порядка* p, отвечающим собственному числу λ_0.

Повторяя доказательство леммы 1.2 [20], из леммы 2.1 настоящей работы получим следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть* $\{\varphi^{(0,j)},\ \dots,\ \varphi^{(\varkappa_j-1,j)} : j=1,\ \dots,\ J\}$ — *каноническая система жордановых цепочек оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *отвечающая собственному числу* λ_0. *Тогда функции*

$$\mathcal{U}^{(k,j)}(\omega,\ r) = r^{i\lambda_0}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\varphi^{(k-q,j)}(\omega), \quad k=0,\ \dots,\ \varkappa_j-1,\ j=1,\ \dots,\ J, \quad (2.17)$$

образуют базис в пространстве степенных решений однородной задачи (2.1), (2.2), отвечающих числу λ_0.

Аналогично теореме 1.2 [20] при помощи теоремы 1.3 гл. 1 и леммы 2.2 данной главы доказывается следующее утверждение об асимптотическом представлении решений нелокальной задачи (2.1), (2.2).

Теорема 2.1. *Пусть* $\{f,\ g_{\sigma\mu}\} \in H_a^l(K,\ \gamma) \cap H_{a_1}^l(K,\ \gamma)$, *и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = a_1+1-l-2m$, $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *свободны от спектра оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Если* $\mathcal{U}$ *— решение задачи (2.1), (2.2) из пространства* $H_a^{l+2m}(K)$, *то*

$$\mathcal{U}(\omega,\ r) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} c_n^{(k,j)}\mathcal{U}_n^{(k,j)}(\omega,\ r) + \mathcal{U}_1(\omega,\ r). \tag{2.18}$$

Здесь $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_N$ *— собственные числа* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *заключенные между прямыми* $\operatorname{Im}\lambda = a_1+1-l-2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$;

$$\mathcal{U}_n^{(k,j)}(\omega,\ r) = r^{i\lambda_n}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\varphi_n^{(k-q,j)}(\omega) \tag{2.19}$$

— степенные (порядка k*) решения однородной задачи (2.1), (2.2);*

$$\{\varphi_n^{(0,j)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \ldots,\ J_n\}$$

— каноническая система жордановых цепочек оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *отвечающая собственному числу* λ_n, $n = 1,\ \ldots,\ N$; $c_n^{(k,j)}$ *— некоторые постоянные;* $\mathcal{U}_1$ *— решение задачи (2.1), (2.2) из пространства* $H_{a_1}^{l+2m}(K)$.

Таким образом, если $a > a_1$, формула (2.18) дает асимптотику решения $\mathcal{U}$ при $r \to 0$, а если $a < a_1$ — асимптотику асимптотику решения $\mathcal{U}$ при $r \to \infty$.

Замечание 2.2. Можно показать, что формула (2.18) верна и тогда, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ есть собственные числа оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Мы требуем, чтобы на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не было собственных чисел, поскольку это условие используется также при изучении асимптотики решений сопряженной задачи (теорема 2.3).

Замечание 2.3. Если выполнены условия теоремы 2.1 и полоса $a_1+1-l-2m \le \operatorname{Im}\lambda < a+1-l-2m$ не содержит собственных чисел $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то решение $\mathcal{U}$ из теоремы 2.1 принадлежит пространству $H_{a_1}^{l+2m}(K)$.

В гл. 3, при изучении асимптотики решений в ограниченной области, для простоты будут рассматриваться решения, принадлежащие весовым пространствам с одним и тем же показателем дифференцируемости l; поэтому и при изучении модельных задач мы считаем показатель l неизменным. Однако нетрудно обобщить результаты на случай, когда $\{f,\ g_{\sigma\mu}\} \in H_a^l(K,\ \gamma) \cap H_{a'}^{l'}(K,\ \gamma)$, $l' \ne l$. Например, при помощи теоремы 2.1 и теоремы 1.4 гл. 2 о повышении гладкости решений нелокальных задач в угле докажем следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Пусть* $\{f,\ g_{\sigma\mu}\} \in H_a^l(K,\ \gamma) \cap H_{a'}^{l'}(K,\ \gamma)$ *и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = a_1+1-l-2m$, $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *свободны от спектра оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Если* $\mathcal{U}$ *— решение задачи (2.1), (2.2) из пространства* $H_a^{l+2m}(K)$, *то имеет место формула (2.18), где* $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_N$ *— собственные числа* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *заключенные между прямыми* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a'+1-l'-2m$; $\mathcal{U}_1$ *— решение задачи (2.1), (2.2) из пространства* $H_{a'}^{l'+2m}(K)$.

Доказательство. 1) Пусть $l' > l$. Из вложения $H_{a'}^{l'}(K,\ \gamma) \subset H_{a_1}^{l}(K,\ \gamma)$, где $a_1 = a' - (l'-l)$, следует, что $\{f,\ g_{\sigma\mu}\} \in H_a^l(K,\ \gamma) \cap H_{a_1}^l(K,\ \gamma)$. Применяя теорему 2.1, получим формулу (2.18), в которой $\mathcal{U}_1$ — решение задачи (2.1), (2.2) из пространства $H_{a_1}^{l+2m}(K)$. Отсюда и из теоремы 1.4 гл. 2 получаем $\mathcal{U}_1 \in H_{a'}^{l'+2m}(K)$.

2) Пусть $l' < l$. Из вложения $H_a^{l+2m}(K) \subset H_{a_0}^{l'+2m}(K)$, где $a_0 = a - (l-l')$, следует, что $\mathcal{U}$ — решение задачи (2.1), (2.2) из пространства $H_{a_0}^{l'+2m}(K)$; $\{f,\ g_{\sigma\mu}\} \in H_{a_0}^{l'}(K,\ \gamma) \cap H_{a'}^{l'}(K,\ \gamma)$. Применяя теорему 2.1, получим формулу (2.18), в которой $\mathcal{U}_1$ — решение задачи (2.1), (2.2) из пространства $H_{a'}^{l'+2m}(K)$. $\square$

2.2 Гладкость решений нелокальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

В данном параграфе мы установим две вспомогательные леммы о гладкости решений нелокальных задач с параметром λ. Эти леммы используются для доказательства гладкости собственных и присоединенных векторов нелокальных задач (см. замечания 2.1 и 2.4).

Пусть $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$, $\tilde{B}_{\sigma\mu}(\lambda)$, $\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda)$, $\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)$ — дифференциальные операторы, определенные в § 2.1. Рассмотрим оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda) = \{\tilde{\mathcal{P}}(\lambda),\ \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)\} : W^{l+2m}(b_1,\ b_2) \to W^l[b_1,\ b_2] = W^l(b_1,\ b_2) \times \mathbb{C}^{2m}$$

(в данном параграфе будем в операторе явно указывать зависимость от l). Исследуем гладкость решений нелокальной задачи

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda)\mathcal{U} = \{f,\ g_{\sigma\mu}\}. \tag{2.20}$$

Лемма 2.3. *Пусть $\mathcal{U} \in W^{l+2m}(b_1,\ b_2)$ — решение задачи (2.20) с правой частью $\{f,\ g_{\sigma\mu}\} \in W^{l+k}[b_1,\ b_2]$; тогда $\mathcal{U} \in W^{l+2m+k}(b_1,\ b_2)$.*

Доказательство. Функция $\mathcal{U}(\omega)$ является решением "локальной" краевой задачи

$$\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)\mathcal{U}(\omega) = f(\omega) \quad (\omega \in (b_1,\ b_2)),$$
$$\tilde{B}_{\sigma\mu}(\lambda)\mathcal{U}(\omega)|_{\omega=b_\sigma} = \tilde{g}_{\sigma\mu}, \quad \sigma = 1,\ 2;\ \mu = 1,\ \dots,\ m.$$

Здесь $\tilde{g}_{\sigma\mu} = g_{\sigma\mu} - \beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda)\mathcal{U}(\omega+\omega_\sigma,\ \lambda)|_{\omega=b_\sigma} \in \mathbb{C}$. Следовательно, применяя теорему 5.1 [19, гл. 2], получаем $\mathcal{U} \in W^{l+2m+k}(b_1,\ b_2)$. $\square$

Обозначим $W^l[b_1,\ b_2]^* = W^l(b_1,\ b_2)^* \times \mathbb{C}^{2m}$.[2)] Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda) : W^l[b_1,\ b_2]^* \to W^{l+2m}(b_1,\ b_2)^*$, сопряженный с оператором $\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\bar{\lambda})$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(b_1,\ b_2) \times \mathbb{C}^{2m}$. Оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)$ действует на $\{\psi,\ \chi_{\sigma\mu}\} \in W^l[b_1,\ b_2]^*$ по формуле

$$< \varphi,\ \tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)\{\psi,\ \chi_{\sigma\mu}\} >=< \tilde{\mathcal{P}}(\bar{\lambda})\varphi,\ \psi > + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}\big(\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\bar{\lambda})\varphi,\ \chi_{\sigma\mu}\big)_{\mathbb{C}}$$

для всех $\varphi \in W^{l+2m}(b_1,\ b_2)$.

Докажем следующий результат о гладкости решений сопряженной нелокальной задачи

$$\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} = \Psi \tag{2.21}$$

(ср. с теоремой 1.15 гл. 1).

[2)]Пространство $W^l(b_1,\ b_2)^*$ может быть отождествлено с подпространством $W^{-l}_{[b_1,\ b_2]}(\mathbb{R})$ пространства $W^{-l}(\mathbb{R})$, состоящим из распределений с носителями, содержащимися в $[b_1,\ b_2]$ (см. замечание 12.4 [19, гл. 1, § 12.6]).

Лемма 2.4. *Пусть* $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} \in W^l[b_1,\ b_2]^*$ *— решение задачи (2.21) с правой частью* $\Psi \in \begin{cases} W^{2m-k}(b_1,\ b_2)^*, & \text{если } 0<k<2m, \\ W^{-2m+k}(b_1,\ b) \oplus W^{-2m+k}(b,\ b_2), & \text{если } k \geq 2m. \end{cases}$

Тогда $\mathcal{V} \in W^k(b_1,\ b) \oplus W^k(b,\ b_2)$.

Доказательство. 1) Пусть вначале $l = 0$. Обозначим $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda)$, $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda)$.

a) Введем вспомогательный оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda) : L_2(b_1,\ b_2)\times\mathbb{C}^{2m}\times\mathbb{C}^{2m} \to W^{2m}(b_1,\ b_2)^*$, действующий на $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}'_{\sigma\mu}\}$ по формуле

$$< \mathcal{U},\ \tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}'_{\sigma\mu}\} >= (\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)\mathcal{U},\ \mathcal{V})_{(b_1,\ b_2)}+$$
$$+\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(\tilde{B}_{\sigma\mu}(\lambda)\mathcal{U}|_{\omega=b_\sigma},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu})_{\mathbb{C}}+\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda)\mathcal{U}|_{\omega=b},\ \mathcal{W}'_{\sigma\mu})_{\mathbb{C}}$$

для всех $\mathcal{U} \in W^{2m}(b_1,\ b_2)$. Очевидно,

$$\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} = \tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}.$$

Введем бесконечно дифференцируемые функции $\zeta_\sigma(\omega)$ $(\sigma = 1,\ 2)$, $\zeta(\omega)$,

$$\zeta_\sigma(\omega) = 1 \text{ при } |b_\sigma-\omega| < |b_\sigma-b|/4,\ \zeta_\sigma(\omega) = 0 \text{ при } |b_\sigma-\omega| > |b_\sigma-b|/2;$$
$$\zeta(\omega) = 1-\zeta_1(\omega)-\zeta_2(\omega).$$

b) Положим $k = 1$. Рассмотрим выражение $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta_1\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\})$. Имеем

$$< \mathcal{U},\ \tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta_1\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}) >=$$
$$= (\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)\mathcal{U},\ \zeta_1\mathcal{V})_{(b_1,\ b_2)} + \sum_{\mu=1}^{m}(\tilde{B}_{1\mu}(\lambda)\mathcal{U}|_{\omega=b_1},\ \mathcal{W}_{1\mu})_{\mathbb{C}}$$

для всех $\mathcal{U} \in W^{2m}(b_1,\ b_2)$. Таким образом, умножая $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}$ на срезающую функцию ζ_1 (равную нулю вблизи точек $b,\ b_2$), мы “зануляем” нелокальные слагаемые в операторе $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)$ и в результате получаем оператор, сопряженный к оператору “локальной” краевой задачи.

Поскольку $k = 1$, имеем

$$\zeta_1\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} = \zeta_1\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} \in W^{2m-1}(b_1,\ b_2)^*,$$

где $\mathcal{V} \in L_2(b_1,\ b_2)$. Отсюда и из формулы Лейбница вытекает, что $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta_1\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}) \in W^{2m-1}(b_1,\ b_2)^*$. Поэтому, в силу теоремы 5.1 [19, гл. 2] о повышении гладкости решений “локальных” краевых задач, получаем $\zeta_1\mathcal{V} \in W^1(b_1,\ b_2)$.

Аналогично, $\zeta_2\mathcal{V} \in W^1(b_1,\ b_2)$.

c) Рассмотрим выражение $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\})$. Имеем

$$< \mathcal{U},\ \tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}) >= (\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)\mathcal{U},\ \zeta\mathcal{V})_{(-\infty,\ b)}$$
$$\text{для всех } \mathcal{U} \in C_0^\infty(-\infty,\ b),$$

где $\mathcal{V}(\omega)$ продолжена нулем при $\omega \leq b_1$. Таким образом, умножая $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}$ на срезающую функцию ζ (равную нулю вблизи точек $b_1,\ b_2$) и рассматривая в качестве пробных функции $\mathcal{U} \in C_0^\infty(-\infty,\ b)$, мы “зануляем” как краевые, так соответственно и нелокальные слагаемые в операторе $\mathcal{L}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)$, получая в результате к задачу на полупрямой.

Аналогично предыдущему, $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}) \in W^{-2m+1}(-\infty,\ b)$. [3)] Отсюда, из эллиптичности оператора $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$ и соотношения $\mathcal{V} \in L_2(-\infty,\ b)$ вытекает, что обобщенная производная $\dfrac{d^{2m}(\zeta\mathcal{V})}{d\omega^{2m}}$ принадлежит пространству $W^{-2m+1}(-\infty,\ b)$. Следовательно, по лемме 12.3 [19, гл. 1], $\zeta\mathcal{V} \in W^1(-\infty,\ b)$. Аналогично доказывается, что $\zeta\mathcal{V} \in W^1(b,\ +\infty)$, что совместно с п. 2) доказательства дает $\mathcal{V} \in W^1(b_1,\ b) \oplus W^1(b,\ b_2)$.

Повторяя описанную процедуру, за конечное число шагов получим, что $\mathcal{V} \in W^k(b_1,\ b) \oplus W^k(b,\ b_2)$.

2) Теперь рассмотрим случай произвольного $l \geq 0$. Из леммы 2.3 следует, что

$$\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda)) = \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda)) \cap W^l[b_1,\ b_2]. \tag{2.22}$$

Кроме того, по лемме 1.8 гл. 1, $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda))$ замкнут, а $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda))$ конечна. Отсюда и из (2.22) следует, что вложение $W^l[b_1,\ b_2]$ в $W^0[b_1,\ b_2]$ индуцирует изоморфизм между факторпространствами $W^l[b_1,\ b_2]/\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda))$ и $W^0[b_1,\ b_2]/\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda))$.

Таким образом, $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda)) = \operatorname{codim}\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda))$, а значит $\dim\ker\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda) = \dim\ker\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda)$. Отсюда и из очевидного вложения $\ker\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda) \subset \ker\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)$ получаем, что $\ker\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda) = \ker\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda)$.

Далее, поскольку $\Psi \in \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda))$,

$$< \mathcal{U},\ \Psi >= 0 \quad \text{для всех } \mathcal{U} \in \ker\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda).$$

[3)] $W^{-s}(-\infty,\ b)$, $s \geq 0$, есть пространство, сопряженное с $\mathring{W}^s(-\infty,\ b)$, где $\mathring{W}^s(-\infty,\ b)$ — замыкание множества $C_0^\infty(-\infty,\ b)$ по норме $\|v\| = \left(\sum\limits_{j=0}^{s}\int\limits_{-\infty}^{b}\left|\dfrac{d^jv}{d\omega^j}\right|^2 d\omega\right)^{1/2}$.

Но из леммы 2.3 вытекает, что $\ker \tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda) = \ker \tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda)$; поэтому

$$<\mathcal{U},\ \Psi>=0 \quad \text{для всех } \mathcal{U} \in \ker \tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda).$$

Следовательно $\Psi \in \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda))$, так как $\Psi \in W^{2m}(b_1,\ b_2)^*$ по предположению. Пусть $\{f,\ g_{\sigma\mu}\} \in W^0[b_1,\ b_2]^* = W^0[b_1,\ b_2]$ — некоторое решение задачи $\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda)\{f,\ g_{\sigma\mu}\} = \Psi$. По доказанному, $f \in W^k(b_1,\ b) \oplus W^k(b,\ b_2)$.

Очевидно, $\{f,\ g_{\sigma\mu}\}$ является также решением задачи $\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)\{f,\ g_{\sigma\mu}\} = \Psi$; следовательно

$$\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} - \{f,\ g_{\sigma\mu}\} \in \ker \tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda) = \ker \tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda).$$

Значит, $\mathcal{V}$ также принадлежит $W^k(b_1,\ b) \oplus W^k(b,\ b_2)$. $\square$

2.3 Сопряженные нелокальные задачи в угле

1. Для вычисления постоянных $c_\nu^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.18) нам потребуются операторы, сопряженные с операторами нелокальных задач.

Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda) : W^l[b_1,\ b_2]^* \to W^{l+2m}(b_1,\ b_2)^*$, [4] сопряженный с оператором $\tilde{\mathcal{L}}(\bar{\lambda})$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(b_1,\ b_2) \times \mathbb{C}^{2m}$. Так же как и в § 2.2, оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$ действует на $\{\psi,\ \chi_{\sigma\mu}\} \in W^l[b_1,\ b_2]^*$ по формуле

$$<\varphi,\ \tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)\{\psi,\ \chi_{\sigma\mu}\}>=<\tilde{\mathcal{P}}(\bar{\lambda})\varphi,\ \psi> + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\bar{\lambda})\varphi,\ \chi_{\sigma\mu})_{\mathbb{C}}$$

для всех $\varphi \in W^{l+2m}(b_1,\ b_2)$.

Прежде всего сделаем одно замечание, аналогичное замечанию 2.1.

Замечание 2.4. Собственный и присоединенные векторы $\{\psi^{(0)},\ \chi_{\sigma\mu}^{(0)}\},\ \dots,\ \{\psi^{(\varkappa-1)},\ \chi_{\sigma\mu}^{(\varkappa-1)}\}$ оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, отвечающие собственному числу $\bar{\lambda}_0$, удовлетворяют равенствам

$$\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}\partial_\lambda^q\tilde{\mathcal{L}}^*(\bar{\lambda}_0)\ \{\psi^{(\nu-q)},\ \chi_{\sigma\mu}^{(\nu-q)}\} = 0, \quad \nu = 0,\ \dots,\ \varkappa - 1. \tag{2.23}$$

[4] См. сноску на стр. 91.

Из равенств (2.23) и леммы 2.4 следует, что компоненты $\psi^{(0)},\ \ldots,\ \psi^{(\varkappa-1)}$ собственного и присоединенных векторов оператора $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$ являются бесконечно гладкими функциями на отрезках $[b_1,\ b]$ и $[b,\ b_2]$.

Обозначим $H_a^l(K,\ \gamma)^* = H_a^l(K)^* \times \prod\limits_{\sigma=1,2}\prod\limits_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m_{\sigma\mu}-1/2}(\gamma_\sigma)^*$. Пусть $\mathcal{L}^* : H_a^l(K,\ \gamma)^* \to H_a^{l+2m}(K)^*$ — оператор, сопряженный с $\mathcal{L}$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(K)\times \prod\limits_{\sigma=1,2}\prod\limits_{\mu=1}^{m} L_2(\gamma_\sigma)$. Оператор $\mathcal{L}^*$ действует на $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} \in H_a^l(K,\ \gamma)^*$ по формуле

$$<\mathcal{U},\ \mathcal{L}^*\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}>=<\mathcal{P}(D_y)\mathcal{U},\ \mathcal{V}> + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m} <\mathcal{B}_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}> \tag{2.24}$$

для всех $\mathcal{U} \in H_a^{l+2m}(K)$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\mathcal{L}^*\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} = 0. \tag{2.25}$$

Лемма 2.5. *Функция*

$$\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} = \Big\{r^{i\bar\lambda_0+2m-2}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi^{(p-q)},\ r^{i\bar\lambda_0+m_{\sigma\mu}-1}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\chi_{\sigma\mu}^{(p-q)}\Big\}, \tag{2.26}$$

где $\{\psi^{(s)},\ \chi^{(s)}\} \in W^l[b_1,\ b_2]^*$, $s = 0,\ \ldots\varkappa{-}1$, *является решением однородного уравнения (2.25) в том и только в том случае, если* $\bar\lambda_0$ *— собственное число оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, *а* $\{\psi^{(0)},\ \chi_{\sigma\mu}^{(0)}\},\ \ldots,\ \{\psi^{(\varkappa-1)},\ \chi_{\sigma\mu}^{(\varkappa-1)}\}$ *— жорданова цепочка, отвечающая этому числу;* $p \le \varkappa - 1$.

Доказательство. Согласно замечанию 2.4, функции $\psi^{(s)}$, $s = 0,\ \ldots p$, принадлежат $L_2(b_1,\ b_2)$; поэтому для любых $\mathcal{U} \in C_0^\infty(\bar K \setminus \{0\})$ выполняется тождество

$$< \mathcal{U},\ \mathcal{L}^*\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} >=$$

$$= \int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_0^\infty r^{-1}\tilde{\mathcal{P}}(rD_r)\mathcal{U}\cdot\overline{r^{i\bar\lambda_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi^{(p-q)}}\,dr\,d\omega+$$

$$+\int\limits_0^\infty\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}r^{-1}\tilde{B}_{\sigma\mu}(rD_r)\mathcal{U}|_{\omega=b_\sigma}\cdot\overline{r^{i\bar\lambda_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\chi_{\sigma\mu}^{(p-q)}}\,dr+$$

$$+\int\limits_0^\infty\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}r^{-1}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(rD_r)\mathcal{U}|_{\omega=b}\times$$

$$\times\overline{r^{i\bar\lambda_0}\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}-i\bar\lambda_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln\beta_\sigma^{-1}+i\ln r)^q\chi_{\sigma\mu}^{(p-q)}}\,dr \quad (2.27)$$

(если в последнем интеграле положить $r'=r\beta_\sigma^{-1}$, то получим в точности формулу (2.24)).

Обозначим через $\delta_{b'}=\delta_{b'}(\omega)$ дельта–функцию с носителем в точке b' ($b_1\le b'\le b_2$). Пусть $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$, $\tilde{B}^*_{\sigma\mu}(\lambda)$ и $(\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu})^*(\lambda)$ — операторы, формально сопряженные с $\tilde{\mathcal{P}}(\bar\lambda)$, $\tilde{B}_{\sigma\mu}(\bar\lambda)$ и $\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\bar\lambda)$ соответственно.

Заметим, что тождества вида

$$\int\limits_{b_1}^{b_2}D_\omega\varphi\cdot\overline{\psi^{(p-q)}}\,d\omega=<\varphi,\ D_\omega\psi^{(p-q)}>,$$

$$D_\omega\varphi|_{\omega=b'}\cdot\overline{\chi^{(p-q)}}=<\varphi,\ D_\omega(\chi^{(p-q)}\otimes\delta_{b'})>$$

(для $\varphi\in W^l(b_1,\ b_2)$) порождают функционалы $D_\omega\psi^{(p-q)}$ и $D_\omega(\chi^{(p-q)}\otimes\delta_{b'})$ из пространства $W^l(b_1,\ b_2)^*$. Следовательно, интегрируя в (2.27) по частям (при фиксированных ω) и пользуясь соотношениями

$$\tilde{\mathcal{P}}^*(rD_r)\Big(r^{i\bar\lambda_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi^{(p-q)}\Big)=$$

$$=r^{i\bar\lambda_0}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu\tilde{\mathcal{P}}^*(\bar\lambda_0)\sum_{q=\nu}^{p}\frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\psi^{(p-q)},$$

$$\tilde{B}^*_{\sigma\mu}(rD_r)\Big(r^{i\bar{\lambda}_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\chi^{(p-q)}_{\sigma\mu}\otimes\delta_{b_\sigma}\Big)=$$
$$=r^{i\bar{\lambda}_0}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{1}{\nu!}\partial^\nu_\lambda\tilde{B}^*_{\sigma\mu}(\bar{\lambda}_0)\Big(\sum_{q=\nu}^{p}\frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\chi^{(p-q)}_{\sigma\mu}\otimes\delta_{b_\sigma}\Big),$$
$$(\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu})^*(rD_r)\Big(r^{i\bar{\lambda}_0}\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}-i\bar{\lambda}_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln\beta_\sigma^{-1}+i\ln r)^q\chi^{(p-q)}_{\sigma\mu}\otimes\delta_b\Big)=$$
$$=r^{i\bar{\lambda}_0}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{1}{\nu!}\partial^\nu_\lambda(\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}-i\lambda}(\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu})^*(\lambda))|_{\lambda=\bar{\lambda}_0}\Big(\sum_{q=\nu}^{p}\frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\chi^{(p-q)}_{\sigma\mu}\otimes\delta_b\Big)$$

(которые доказываются аналогично равенствам (2.13), (2.14), (2.16)), заключаем, что функция $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}$ удовлетворяет однородному уравнению (2.25) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{h!}\partial^h_\lambda\tilde{\mathcal{L}}^*(\bar{\lambda}_0)\{\psi^{(k-h)},\ \chi^{(k-h)}_{\sigma\mu}\}=0,\quad k=0,\ \dots,\ p$$

(ср. с доказательством леммы 2.1). □

Всякое решение вида (2.26) однородного уравнения (2.25) будем называть *степенным решением порядка* p, отвечающим собственному числу $\bar{\lambda}_0$.

2. В дальнейшем нам понадобится специальный выбор жордановых цепочек, удовлетворяющих условиям биортогональности и нормировки. Такие цепочки описываются в следующей лемме.

Лемма 2.6. *Пусть собственному числу λ_0 оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ отвечает каноническая система жордановых цепочек*

$$\{\varphi^{(0,j)},\ \dots,\ \varphi^{(\varkappa_j-1,j)}:j=1,\ \dots,\ J\}.$$

Тогда существует такая каноническая система жордановых цепочек

$$\Big\{\{\psi^{(0,j)},\ \chi^{(0,j)}_{\sigma\mu}\},\ \dots,\ \{\psi^{(\varkappa_j-1,j)},\ \chi^{(\varkappa_j-1,j)}_{\sigma\mu}\}:j=1,\ \dots,\ J\Big\}$$

оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, отвечающая числу $\bar{\lambda}_0$, что выполняются соотношения

$$\sum_{p=0}^{\nu}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{(\nu+k+1-p-q)!}\Big\{(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\ \psi^{(p,\zeta)})_{(b_1,\ b_2)}+$$
$$+\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\ \chi^{(p,\zeta)}_{\sigma\mu})_{\mathbb{C}}\Big\}=\delta_{\xi,\zeta}\delta_{\varkappa_\xi-k-1,\nu},\tag{2.28}$$

где $\zeta,\ \xi=1,\ \dots,\ J$; $\nu=0,\ \dots,\ \varkappa_\zeta-1$; $k=0,\ \dots,\ \varkappa_\xi-1$; $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера.

Доказательство. В силу леммы 1.8 гл. 1, λ_0 является нормальным числом оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то есть $\dim\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0) < \infty$, $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)) < \infty$ и все точки некоторого проколотого круга $0 < |\lambda-\lambda_0| < \rho$ (при достаточно малом ρ) являются регулярными для $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$; поэтому необходимый результат вытекает из леммы 2.1 [20]. □

2.4 Вычисление коэффициентов в асимптотике решения нелокальной задачи в угле

1. В данном параграфе выводятся явные формулы для коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.18). Вначале мы вычислим коэффициенты при помощи степенных решений $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}$ однородного уравнения (2.25), а затем получим представление коэффициентов в терминах формулы Грина.

Пусть $\bar{\lambda}_n$ — собственное число оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, заключенное между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = a_1+1-l-2m$ и $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ (см. теорему 2.1), и пусть

$$\Big\{\{\psi_n^{(0,j)},\ \chi_{\sigma\mu,n}^{(0,j)}\},\ \dots,\ \{\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)},\ \chi_{\sigma\mu,n}^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\} : j=1,\ \dots,\ J_n\Big\}$$

— жордановы цепочки $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, отвечающие числу $\bar{\lambda}_n$ и составляющие каноническую систему. Рассмотрим степенные решения (порядка ν) уравнения (2.25)

$$\{\mathcal{V}_n^{(\nu,j)},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu,n}^{(\nu,j)}\} = \\ = \Big\{r^{i\bar{\lambda}_n+2m-2}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q,j)},\ r^{i\bar{\lambda}_n+m_{\sigma\mu}-1}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\chi_{\sigma\mu,n}^{(\nu-q,j)}\Big\}, \tag{2.29}$$

где $\nu=0,\ \dots,\ \varkappa_{j,n}-1$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1; тогда коэффициенты $c_n^{(k,j)}$ из (2.18) вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)} = \Big(f,\ i\mathcal{V}_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\Big)_K + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}\Big(g_{\sigma\mu},\ i\mathcal{W}_{\sigma\mu,n}^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\Big)_{\gamma_\sigma}, \tag{2.30}$$

где $\{\mathcal{V}_n^{(\nu,j)},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu,n}^{(\nu,j)}\}$ — вектор, определенный равенством (2.29), причем жордановы цепочки

$$\{\varphi_n^{(0,j)},\ \dots,\ \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j=1,\ \dots,\ J_n\},$$

$$\Big\{\{\psi_n^{(0,j)},\ \chi_{\sigma\mu,n}^{(0,j)}\},\ \ldots,\ \{\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)},\ \chi_{\sigma\mu,n}^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\}: j=1,\ \ldots,\ J_n\Big\},$$

фигурирующие в (2.19) и (2.29), подчинены условиям (2.28) биортогональности и нормировки.

Теорема 2.2 доказывается аналогично теореме 3.1 [20]. При этом используются леммы 2.5 и 2.6 данной главы.

Замечание 2.5. Согласно замечанию 2.4, функции $\psi_n^{(\nu,j)}$ принадлежат пространству $L_2(b_1,\ b_2)$. Отсюда и из равенств (2.29) и (2.30) вытекает, что если $\{f,\ g_{\sigma\mu}\}\in H_a^l(K,\ \gamma)\cap H_{a_1}^l(K,\ \gamma)$ и $a_1+1-l-2m<\operatorname{Im}\lambda_n<a+1-l-2m$, то имеет место оценка

$$|c_n^{(k,j)}|\le c(\|\{f,\ g_{\sigma\mu}\}\|_{H_a^l(K,\ \gamma)}+\|\{f,\ g_{\sigma\mu}\}\|_{H_{a_1}^l(K,\ \gamma)}).$$

При изучении асимптотики решений нелокальных задач в ограниченных областях (а именно, при вычислении коэффициентов в асимптотике) потребуются результаты об асимптотическом поведении решений сопряженной задачи

$$\mathcal{L}^*\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}=\Psi. \tag{2.31}$$

При помощи теорем 2.1, 2.2 и соображений двойственности докажем следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть* $\Psi\in H_a^{l+2m}(K)^*\cap H_{a_1}^{l+2m}(K)^*$, *и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda=a_1+1-l-2m$, $\operatorname{Im}\lambda=a+1-l-2m$ *свободны от спектра оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Если* $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}$ *— решение задачи (2.31) из пространства* $H_{a_1}^l(K,\ \gamma)^*$, *то*

$$\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1}d_n^{(k,j)}\{\mathcal{V}_n^{(k,j)},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu,n}^{(k,j)}\}+\{V,\ W_{\sigma\mu}\}. \tag{2.32}$$

Здесь $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_N$ *— собственные числа* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *заключенные между прямыми* $\operatorname{Im}\lambda=a_1+1-l-2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda=a+1-l-2m$; $\{\mathcal{V}_n^{(k,j)},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu,n}^{(k,j)}\}$ *— векторы, определенные формулой (2.29);* $d_n^{(k,j)}$ *— некоторые постоянные;* $\{V,\ W_{\sigma\mu}\}$ *— решение задачи (2.31) из пространства* $H_a^l(K,\ \gamma)^*$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\{f,\ g_{\sigma\mu}\}\in C_0^\infty(\bar K\setminus\{0\})\times\prod\limits_{\sigma=1,2}\prod\limits_{\mu=1}^{m}C_0^\infty(\gamma_\sigma)$. Очевидно, $\{f,\ g_{\sigma\mu}\}\in H_a^l(K,\ \gamma)\cap H_{a_1}^l(K,\ \gamma)$.

Согласно теореме 1.3 гл. 1, существует функция $\mathcal{U}_1 \in H_{a_1}^{l+2m,\,N}(K)$, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}\mathcal{U}_1 = \{f,\ g_{\sigma\mu}\}$. Отсюда и из (2.31) получаем

$$< \{f,\ g_{\sigma\mu}\},\ \{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} >=< \mathcal{L}\mathcal{U}_1,\ \{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} >=< \mathcal{U}_1,\ \Psi > . \qquad (2.33)$$

Здесь первые и вторые скобки обозначают полуторалинейные формы на паре сопряженных пространств $H_{a_1}^{l}(K,\ \gamma),\ H_{a_1}^{l}(K,\ \gamma)^*$, а третьи скобки — на паре $H_{a_1}^{l+2m,\,N}(K),\ H_{a_1}^{l+2m,\,N}(K)^*$.

Далее, из теоремы 2.1 следует

$$< \mathcal{U}_1,\ \Psi >=< \mathcal{U},\ \Psi > + \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} c_n^{(k,j)} < \mathcal{U}_n^{(k,j)},\ \Psi > .$$

Здесь $\mathcal{U} \in H_a^{l+2m,\,N}(K)$ — функция, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}\mathcal{U} = \{f,\ g_{\sigma\mu}\}$; первые скобки в правой части равенства обозначают полуторалинейную форму на паре сопряженных пространств $H_a^{l+2m,\,N}(K),\ H_a^{l+2m,\,N}(K)^*$, а вторые скобки — действие функционала $\Psi \in H_a^{l+2m}(K)^* \cap H_{a_1}^{l+2m}(K)^*$ на функцию $\mathcal{U}_n^{(k,j)}$. В силу теоремы 2.2, последнее равенство можно записать в виде

$$\begin{aligned} &< \mathcal{U}_1,\ \Psi >=< \mathcal{U},\ \Psi > + \\ &+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} \overline{d_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}} < \{f,\ g_{\sigma\mu}\},\ \{\mathcal{V}_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu,n}^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\} >= \\ &=< \mathcal{U},\ \Psi > + < \{f,\ g_{\sigma\mu}\},\ \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} d_n^{(k,j)}\{\mathcal{V}_n^{(k,j)},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu,n}^{(k,j)}\} > . \qquad (2.34) \end{aligned}$$

Здесь $\overline{d_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}} = -i < \mathcal{U}_n^{(k,j)},\ \Psi >$.

Поскольку, в силу теоремы 1.3, оператор $\mathcal{L}^*$ есть изоморфизм из $H_a^{l+2m}(K)^*$ на $H_a^{l}(K,\ \gamma)^*$, существует функция $\{V,\ W_{\sigma\mu}\} \in H_a^{l}(K,\ \gamma)^*$, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}^*\{V,\ W_{\sigma\mu}\} = \Psi$. Отсюда, из (2.33) и (2.34) получаем

$$\begin{aligned} &< \{f,\ g_{\sigma\mu}\},\ \{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu}\} - \{V,\ W_{\sigma\mu}\} - \\ &\qquad - \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} d_n^{(k,j)}\{\mathcal{V}_n^{(k,j)},\ \mathcal{W}_{\sigma\mu,n}^{(k,j)}\} >= 0. \qquad (2.35) \end{aligned}$$

Теперь утверждение теоремы следует из (2.35) и произвольности выбора $\{f,\ g_{\sigma\mu}\} \in C_0^\infty(\bar K \setminus \{0\}) \times \prod\limits_{\sigma=1,2} \prod\limits_{\mu=1}^{m} C_0^\infty(\gamma_\sigma)$. □

2. Рассмотрим формулу Грина для нелокальных эллиптических задач. Для этого введем множество $\gamma = \{y:\ \varphi = b\}$, являющееся носителем нелокальных данных в задаче (2.1), (2.2). Обозначим $K_1 = \{y:\ b_1 < \varphi < b\}$, $K_2 = \{y:\ b < \varphi < b_2\}$. Для заданных в K функций $\mathcal{V}(y)$ будем обозначать через $\mathcal{V}_\sigma(y)$ их сужения на K_σ, $\sigma = 1,\ 2$. Будем говорить, что $\mathcal{V}$ принадлежит $\mathcal{C}^\infty(\bar K \setminus \{0\})$, если $\mathcal{V}_\sigma$ принадлежат $C^\infty(\bar K_\sigma \setminus \{0\})$, $\sigma = 1,\ 2$.

Описывая формулу Грина в угле K, для краткости не будем указывать зависимость дифференциальных операторов от D_y. Обозначим через $\mathcal{P}^*$ оператор, формально сопряженный с $\mathcal{P}$. Согласно теореме 1.7 гл. 1, можно выбрать (не единственным образом) 1) систему нормальных на γ_σ операторов $\{B'_{\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ с постоянными коэффициентами и порядками $2m - 1 - m'_{\sigma\mu}$, дополняющую $\{B_{\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ до системы Дирихле порядка $2m$ на γ_σ [5)]; 2) систему $\{B_\mu,\ B'_\mu\}_{\mu=1}^m$, являющуюся системой Дирихле порядка $2m$ на γ, такую, что порядки операторов B_μ и B'_μ равны $2m - \mu$ и $m - \mu$ соответственно.

Если этот выбор сделан, то существуют дифференциальные операторы $C_{\sigma\mu}$, $C'_{\sigma\mu}$, T_ν и $T^{\mathcal{G}}_{\sigma\nu}$ ($\sigma = 1,\ 2$; $\mu = 1,\ \ldots,\ m$; $\nu = 1,\ \ldots,\ 2m$) с постоянными коэффициентами, обладающие следующими свойствами: I) порядки операторов $C_{\sigma\mu}$, $C'_{\sigma\mu}$, T_ν и $T^{\mathcal{G}}_{\sigma\nu}$ равны $m'_{\sigma\mu}$, $2m-1-m_{\sigma\mu}$, $\nu-1$ и $\nu - 1$ соответственно; II) система $\{C_{\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ накрывает оператор $\mathcal{P}^*$ на γ_σ и дополняет $\{C'_{\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ до системы Дирихле порядка $2m$ на γ_σ, система $\{T_\nu\}_{\nu=1}^{2m}$ есть система Дирихле порядка $2m$ на γ; III) для любых функций $\mathcal{U} \in C_0^\infty(\bar K \setminus \{0\})$, $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^\infty(\bar K_\sigma \setminus \{0\})$ имеет место формула Грина

$$(\mathcal{P}\mathcal{U},\ \mathcal{V})_{K_\sigma} + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(\mathcal{B}_{\sigma\mu}\mathcal{U},\ C'_{\sigma\mu}\mathcal{V}_\sigma|_{\gamma_\sigma})_{\gamma_\sigma} + \sum_{\mu=1}^{m}(B_\mu\mathcal{U}|_\gamma,\ \mathcal{T}_\mu\mathcal{V})_\gamma =$$
$$= \sum_{\sigma=1,2}(\mathcal{U},\ \mathcal{P}^*\mathcal{V}_\sigma)_{K_\sigma} + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(B'_{\sigma\mu}\mathcal{U}|_{\gamma_\sigma},\ C_{\sigma\mu}\mathcal{V}_\sigma|_{\gamma_\sigma})_{\gamma_\sigma} +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m}(B'_\mu\mathcal{U}|_\gamma,\ \mathcal{T}_{m+\mu}\mathcal{V})_\gamma. \quad (2.36)$$

[5)] Определение системы Дирихле см. в [19, гл. 2, п. 2.2].

Здесь

$$\mathcal{T}_\nu \mathcal{V} \equiv T_\nu \mathcal{V}_1|_\gamma - T_\nu \mathcal{V}_2|_\gamma + \sum_{k=1,2} (T^{\mathcal{G}}_{k\nu} \mathcal{V}_k)(\mathcal{G}_k^{-1} y)|_\gamma,$$

где $\mathcal{G}_k^{-1}$ — оператор поворота на угол $-\omega_k$ и растяжения в $1/\beta_k$ раз в плоскости $\{y\}$ $(k = 1,\ 2;\ \nu = 1,\ \ldots,\ 2m)$.

Формула (2.36) порождает задачу, формально сопряженную к задаче (2.1), (2.2):

$$\mathcal{P}^*(D_y)\mathcal{V}_\sigma = f_\sigma(y) \quad (y \in K_\sigma;\ \sigma = 1,\ 2), \tag{2.37}$$

$$\mathcal{C}_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{V} \equiv C_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{V}_\sigma|_{\gamma_\sigma} = g_{\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_\sigma;\ \sigma = 1,\ 2;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m), \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\nu(D_y)\mathcal{V} \equiv T_\nu(D_y)\mathcal{V}_1|_\gamma - T_\nu(D_y)\mathcal{V}_2|_\gamma + \\ + \sum_{k=1,2} (T^{\mathcal{G}}_{k\nu}(D_y)\mathcal{V}_k)(\mathcal{G}_k^{-1} y)|_\gamma = h_\nu(y) \quad (y \in \gamma;\ \nu = 1,\ \ldots,\ 2m). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Задача (2.37)–(2.39) есть *нелокальная задача трансмиссии в плоском угле* K (см. § 1.5 гл. 1).

Для заданных на интервале $(b_1,\ b_2)$ функций $\tilde{\mathcal{V}}(\omega)$ будем обозначать через $\tilde{\mathcal{V}}_1(\omega)$ и $\tilde{\mathcal{V}}_2(\omega)$ их сужения на интервалы $(b_1,\ b)$ и $(b,\ b_2)$ соответственно. Будем говорить, что $\tilde{\mathcal{V}}$ принадлежит $\mathcal{C}^\infty([b_1,\ b_2])$, если $\tilde{\mathcal{V}}_1$ принадлежат $C^\infty([b_1,\ b])$, $\tilde{\mathcal{V}}_2$ принадлежат $C^\infty([b,\ b_2])$.

Запишем все дифференциальные операторы, фигурирующие в (2.36), в полярных координатах (опуская ω и D_ω): $\mathcal{P}(D_y) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(rD_r)$, $B_{\sigma\mu}(D_y) = r^{-m_{\sigma\mu}}\tilde{B}_{\sigma\mu}(rD_r)$ и т. п. Согласно теореме 1.9 гл. 1, для любых функций $\tilde{\mathcal{U}} \in C^\infty([b_1,\ b_2])$, $\tilde{\mathcal{V}} \in \mathcal{C}^\infty([b_1,\ b_2])$ имеет место следующая формула Грина с параметром λ:

$$\begin{gathered} (\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)\tilde{\mathcal{U}},\ \tilde{\mathcal{V}})_{(b_1,\ b_2)} + \\ + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m} (\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{\mathcal{U}},\ \tilde{C}'_{\sigma\mu}(\lambda')\tilde{\mathcal{V}}_\sigma|_{\omega=b_\sigma})_{\mathbb{C}} + \sum_{\mu=1}^{m} (\tilde{B}_\mu(\lambda)\tilde{\mathcal{U}}|_{\omega=b},\ \tilde{\mathcal{T}}_\mu(\lambda')\tilde{\mathcal{V}})_{\mathbb{C}} = \\ = (\tilde{\mathcal{U}},\ \tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda')\tilde{\mathcal{V}}_1)_{(b_1,\ b)} + (\tilde{\mathcal{U}},\ \tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda')\tilde{\mathcal{V}}_2)_{(b,\ b_2)} + \\ + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m} (\tilde{B}'_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{\mathcal{U}}|_{\omega=b_\sigma},\ \tilde{C}_{\sigma\mu}(\lambda')\tilde{\mathcal{V}}_\sigma|_{\omega=b_\sigma})_{\mathbb{C}} + \sum_{\mu=1}^{m} (\tilde{B}'_\mu(\lambda)\tilde{\mathcal{U}}|_{\omega=b},\ \tilde{\mathcal{T}}_{m+\mu}(\lambda')\tilde{\mathcal{V}})_{\mathbb{C}}. \end{gathered} \tag{2.40}$$

Здесь $\lambda' = \bar{\lambda} - 2i(m-1)$;

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}_\nu(\lambda')\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{T}_\nu(\lambda')\tilde{\mathcal{V}}_1(\omega)|_{\omega=b} - \tilde{T}_\nu(\lambda')\tilde{\mathcal{V}}_2(\omega)|_{\omega=b} + \\ + \sum_{k=1,2} \beta_k^{-i\lambda'+(\nu-1)} \tilde{T}^{\mathcal{G}}_{k\nu}(\lambda')\tilde{\mathcal{V}}_k(\omega-\omega_k)|_{\omega=b}. \end{aligned}$$

Формула (2.40) порождает нелокальную задачу трансмиссии с параметром λ (см. § 1.5 гл. 1), которой соответствует оператор–функция

$$\tilde{\mathcal{M}}(\lambda): W^{l+2m}(b_1,\ b)\oplus W^{l+2m}(b,\ b_2)\to (W^l(b_1,\ b)\oplus W^l(b,\ b_2))\times\mathbb{C}^{2m}\times\mathbb{C}^{2m},$$

действующая по формуле

$$\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}=\{\tilde{z},\ \tilde{\mathcal{C}}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}},\ \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}\}.$$

Здесь $\tilde{z}(\omega)=\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}_1(\omega)$ при $\omega\in(b_1,\ b)$, $\tilde{z}(\omega)=\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}_2(\omega)$ при $\omega\in(b,\ b_2)$; $\tilde{\mathcal{C}}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}=\tilde{C}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{\sigma}(\omega)|_{\omega=\omega_\sigma}$ ($\sigma=1,\ 2;\ \mu=1,\ \dots,\ m$); $\tilde{\mathcal{T}}_{\nu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}=\tilde{T}_{\nu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}_1(\omega)|_{\omega=b}-\tilde{T}_{\nu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}_2(\omega)|_{\omega=b}+\sum\limits_{k=1,2}\beta_k^{-i\lambda+(\nu-1)}\tilde{T}^{\mathcal{G}}_{k\nu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}_k(\omega-\omega_k)|_{\omega=b}$ ($\nu=1,\ \dots,\ 2m$). Отметим, что мы не можем определить $\tilde{z}$ формулой $\tilde{z}(\omega)=\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}(\omega)$ при $\omega\in(b_1,\ b_2)$, так как функция $\tilde{\mathcal{V}}\in W^{l+2m}(b_1,\ b)\oplus W^{l+2m}(b,\ b_2)$ может иметь разрыв в точке $\omega=b$.

3. Установим связь между жордановыми цепочками оператор–функций $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$. Положим

$$\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}=\tilde{C}'_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}_{\sigma}(\omega)|_{\omega=b_\sigma}.$$

Повторяя доказательство предложения 2.5 [24, гл. 1], получим при помощи формулы Грина (2.40) и замечания 2.4 следующий результат.

Лемма 2.7. *Векторы* $\{\psi^{(0)},\ \chi^{(0)}_{\sigma\mu}\},\ \dots,\ \{\psi^{(\varkappa-1)},\ \chi^{(\varkappa-1)}_{\sigma\mu}\}$ *образуют жорданову цепочку оператора* $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, *отвечающую собственному числу* $\bar{\lambda}_0$, *тогда и только тогда, когда векторы* $\psi^{(0)},\ \dots,\ \psi^{(\varkappa-1)}$ *образуют жорданову цепочку оператора* $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$, *отвечающую собственному числу* $\bar{\lambda}_0-2i(m-1)$ *и векторы* $\psi^{(k)}$ *и* $\chi^{(k)}_{\sigma\mu}$ *связаны соотношением*

$$\chi^{(k)}_{\sigma\mu}=\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{r!}\partial^r_\lambda\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar{\lambda}_0-2i(m-1))\psi^{(k-r)}.$$

Комбинируя леммы 2.6 и 2.7, получаем следующее условие биортогональности и нормировки жордановых цепочек в терминах формулы Грина.

Лемма 2.8. *Пусть собственному числу* λ_0 *оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ *отвечает каноническая система жордановых цепочек*

$$\{\varphi^{(0,j)},\ \dots,\ \varphi^{(\varkappa_j-1,j)}:j=1,\ \dots,\ J\}.$$

Тогда существует такая каноническая система жордановых цепочек

$$\{\psi^{(0,j)},\ \ldots,\ \psi^{(\varkappa_j-1,j)} : j=1,\ \ldots,\ J\}$$

оператор-функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$, *отвечающая числу* $\bar\lambda_0-2i(m-1)$, *что выполняются соотношения*

$$\sum_{p=0}^{\nu}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{(\nu+k+1-p-q)!}\Big\{(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\ \psi^{(p,\zeta)})_{(b_1,\ b_2)}+$$
$$+\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\ \sum_{r=0}^{p}\frac{1}{r!}\partial_\lambda^r\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar\lambda_0-2i(m-1))\psi^{(p-r,\zeta)})_{\mathbb{C}}\Big\}=$$
$$=\delta_{\xi,\zeta}\delta_{\varkappa_\xi-k-1,\nu}. \tag{2.41}$$

Положим

$$\mathcal{C}'_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{V}=C'_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{V}_\sigma(y)|_{\gamma_\sigma}.$$

Сформулируем основной результат о представлении коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.18) в терминах формулы Грина.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1; тогда коэффициенты* $c_n^{(k,j)}$ *из (2.18) вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)}=\Big(f,\ i\mathcal{V}_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\Big)_K+\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}\Big(g_{\sigma\mu},\ i\mathcal{C}'_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{V}_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\Big)_{\gamma_\sigma}, \tag{2.42}$$

где $\mathcal{V}_n^{(\nu,j)}$ *— степенное решение однородной задачи трансмиссии (2.37)–(2.39), определяемое формулой*

$$\mathcal{V}_n^{(\nu,j)}=r^{i\bar\lambda_n+2m-2}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q,j)},$$

причем $\{\psi_n^{(0,j)},\ \ldots,\ \psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j=1,\ \ldots,\ J_n\}$ *— каноническая система жордановых цепочек оператор-функции* $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$, *отвечающая числу* $\bar\lambda_n-2i(m-1)$, *а цепочки* $\{\varphi_n^{(0,j)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j=1,\ \ldots,\ J_n\}$ *(фигурирующие в (2.19)) и* $\{\psi_n^{(0,j)},\ \ldots,\ \psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j=1,\ \ldots,\ J_n\}$ *подчинены условиям (2.41) биортогональности и нормировки.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2.1 показывается, что $\mathcal{V}_n^{(\nu,j)}$ является решением однородной задачи (2.37)–(2.39) тогда и только тогда, когда $\psi_n^{(0,j)},\ \dots,\ \psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}$ — жорданова цепочка оператор–функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$, отвечающая числу $\bar{\lambda}_n - 2i(m-1)$.

Далее, имеем

$$\mathcal{C}'_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{V}_n^{(\nu,j)} = r^{i\bar{\lambda}_n+m_{\sigma\mu}-1}\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar{\lambda}_n-2i(m-1)+rD_r)\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q,j)} =$$

$$= r^{i\bar{\lambda}_n+m_{\sigma\mu}-1}\sum_{s=0}^{\nu}\frac{1}{s!}\partial_\lambda^s\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar{\lambda}_n-2i(m-1))\sum_{q=s}^{\nu}\frac{1}{(q-s)!}(i\ln r)^{q-s}\psi_n^{(\nu-q,j)} =$$

$$= r^{i\bar{\lambda}_n+m_{\sigma\mu}-1}\sum_{s=0}^{\nu}\frac{1}{s!}\partial_\lambda^s\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar{\lambda}_n-2i(m-1))\sum_{q=0}^{\nu-s}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q-s,j)},$$

откуда, меняя порядок суммирования и применяя лемму 2.7, получаем

$$\mathcal{C}'_{\sigma\mu}(D_y)\mathcal{V}_n^{(\nu,j)} =$$

$$= r^{i\bar{\lambda}_n+m_{\sigma\mu}-1}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\sum_{s=0}^{\nu-q}\frac{1}{s!}\partial_\lambda^s\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar{\lambda}_0-2i(m-1))\psi^{(\nu-q-s)} =$$

$$= r^{i\bar{\lambda}_n+m_{\sigma\mu}-1}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^\nu\chi_{\sigma\mu,n}^{(\nu-q,j)}.$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из формулы (2.29), теоремы 2.2 и леммы 2.8. □

3. В заключение параграфа рассмотрим асимптотику решений нелокальной задачи в угле со специальной правой частью. Соответствующий результат будет использован в гл. 3 при изучении асимптотики решений нелокальных краевых задач в ограниченных областях. Пусть

$$F(\omega,\ r) = \sum_{q=0}^{M}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q f^{(q)}(\omega),\ G_{\sigma\mu}(r) = \sum_{q=0}^{M}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q g_{\sigma\mu}^{(q)},$$
$$\{f^{(q)},\ g_{\sigma\mu}^{(q)}\} \in W^l(b_1,\ b_2)\times\mathbb{C}^{2m}.$$

Пусть Λ — некоторое комплексное число. Если Λ — собственное число оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то обозначим через $\varkappa(\Lambda)$ наибольшую из частных кратностей этого числа; если Λ не является собственным числом оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, положим $\varkappa(\Lambda) = 0$.

Лемма 2.9. *Для задачи (2.1), (2.2) с правой частью* $\{r^{i\Lambda-2m}F,\ r^{i\Lambda-m_{\sigma\mu}}G_{\sigma\mu}\}$ *существует решение*

$$\mathcal{U}(\omega,\ r) = r^{i\Lambda}\sum_{q=0}^{M+\varkappa(\Lambda)}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\mathcal{U}^{(q)}(\omega), \tag{2.43}$$

где $\mathcal{U}^{(q)}\in W^{l+2m}(b_1,\ b_2)$. *Решение такого вида единственно, если* $\varkappa(\Lambda)=0$ *(то есть, если* Λ *— не является собственным числом* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*), а при* $\varkappa(\Lambda)>0$ *решение (2.43) определено с точностью до произвольной линейной комбинации степенных решений (2.17), отвечающих числу* Λ.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 [24, гл. 3].

Замечание 2.6. Результаты §§ 2.1–2.4 обобщаются на случай эллиптической системы уравнений, а также на случай произвольного числа нелокальных членов с носителями на различных лучах.

2.5 Асимптотика решений локальных задач в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

1. В гл. 3, при исследовании нелокальных эллиптических задач в ограниченных областях, решения будут рассматриваться не во всей области G, а в $G\setminus\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — конечное множество точек, лежащих как на границе области G, так и строго внутри G (см. [30, 33]). При этом в окрестности множества $\mathcal{K}$ решения могут иметь степенные особенности, что соответствует определенным условиям согласования. Для исследования асимптотики решений таких задач наряду с результатами §§ 2.1–2.4 используются результаты настоящего параграфа.

Пусть $\mathcal{P}(D_y)$ однородный собственно эллиптический дифференциальный оператор с постоянными комплексными коэффициентами порядка $2m$.

Введем ограниченный оператор $\mathcal{P}=\mathcal{P}(D_y): H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)\to H_a^l(\mathbb{R}^2)$. Будем изучать асимптотику решений $\mathcal{U}\in H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ уравнения

$$\mathcal{P}\mathcal{U}=f,^{6)} \tag{2.44}$$

полагая, что $f\in H_a^l(\mathbb{R}^2)\cap H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)$.

[6)] Соотношение (2.44) есть операторная запись уравнения

$$\mathcal{P}(D_y)\mathcal{U}(y)=f(y)\quad (y\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}).$$

Запишем оператор $\mathcal{P}(D_y)$ в полярных координатах: $\mathcal{P}(D_y) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$. Коэффициенты оператора $\tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$ как функции ω принадлежат классу $C^\infty_{2\pi}[0,\ 2\pi]$ — 2π-периодических бесконечно дифференцируемых функций.

Введем ограниченный оператор $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda) = \tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda) : W^{l+2m}_{2\pi}(0,\ 2\pi) \to W^l_{2\pi}(0,\ 2\pi)$, где $W^l_{2\pi}(0,\ 2\pi)$ есть замыкание множества $C^\infty_{2\pi}[0,\ 2\pi]$ в $W^l(0,\ 2\pi)$.

Из [30, § 1] следует существование конечно–мероморфной оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(\lambda)$, такой, что ее полюса (совпадающие с собственными числами $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$), за исключением, быть может, конечного числа, расположены внутри двойного угла раствора меньше π, содержащего мнимую ось, и для λ, не являющегося ее полюсом, оператор $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(\lambda)$ является ограниченным обратным к оператору $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$. Если прямая $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не содержит полюсов оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(\lambda)$, (или, что то же самое, собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$), то, в силу работы [30, § 1], оператор $\mathcal{P}$ есть изоморфизм.

Используя указанные результаты и повторяя рассуждения работы [24, гл. 3], получим большую часть утверждений данного параграфа.

Теорема 2.5. *Пусть $f \in H^l_a(\mathbb{R}^2) \cap H^l_{a_1}(\mathbb{R}^2)$, и пусть прямые $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l - 2m$, $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ свободны от спектра оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$. Если $\mathcal{U}$ — решение задачи (2.44) из пространства $H^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2)$, то*

$$\mathcal{U}(\omega,\ r) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} c_n^{(k,j)}\mathcal{U}_n^{(k,j)}(\omega,\ r) + \mathcal{U}_1(\omega,\ r). \tag{2.45}$$

Здесь $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_N$ — собственные числа $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$, заключенные между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l - 2m$ и $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$;

$$\mathcal{U}_n^{(k,j)}(\omega,\ r) = r^{i\lambda_n}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\varphi_n^{(k-q,j)}(\omega) \tag{2.46}$$

— степенные (порядка k) решения однородной задачи (2.44);

$$\{\varphi_n^{(0,j)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \ldots,\ J_n\}$$

— каноническая система жордановых цепочек оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$, отвечающая собственному числу λ_n, $n = 1,\ \ldots,\ N$; $c_n^{(k,j)}$ — некоторые постоянные; $\mathcal{U}_1$ — решение задачи (2.44) из пространства $H^{l+2m}_{a_1}(\mathbb{R}^2)$.

Таким образом, если $a > a_1$, формула (2.45) дает асимптотику решения $\mathcal{U}$ при $r \to 0$, а если $a < a_1$ — асимптотику асимптотику решения $\mathcal{U}$ при $r \to \infty$.

Замечание 2.7. Так же, как и в случае плоского угла, можно показать, что формула (2.45) верна и тогда, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ есть собственные числа оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$. Мы требуем, чтобы на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не было собственных чисел, так как это условие используется также при получении асимптотики решений сопряженной задачи (теорема 2.7).

2. Далее выводятся явные формулы для коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.45). Вначале мы вычислим коэффициенты при помощи степенных решений однородного сопряженного уравнения, а затем получим представление коэффициентов в терминах формулы Грина.

Рассмотрим оператор $\mathcal{P}^* : H_a^l(\mathbb{R}^2)^* \to H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)^*$, сопряженный с $\mathcal{P}$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^2)$, и оператор $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda) : W_{2\pi}^l(0,\ 2\pi)^* \to W_{2\pi}^{l+2m}(0,\ 2\pi)^*$, сопряженный с $\tilde{\mathcal{P}}(\bar{\lambda})$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(0,\ 2\pi)$.

Пусть $\bar{\lambda}_n$ — собственное число оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$ и пусть

$$\{\psi_n^{(0,j)},\ \ldots,\ \psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \ldots,\ J_n\}$$

— жордановы цепочки оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$, отвечающие числу $\bar{\lambda}_n$ и составляющие каноническую систему. Используя эллиптичность оператора $\tilde{\mathcal{P}}^*(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)$, метод замороженных коэффициентов, разложение функций $\psi_n^{(\nu,j)}$ в ряд Фурье по функциям $e^{ik\omega}/\sqrt{2\pi}$ [7] и равенства типа (2.23), можно показать, что $\psi_n^{(\nu,j)}$ — 2π-периодические бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0,\ 2\pi]$ функции.

Рассмотрим степенные решения (порядка ν)

$$\mathcal{V}_n^{(\nu,j)} = r^{i\bar{\lambda}_n+2m-2}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q,j)}, \quad \nu = 0,\ \ldots,\ \varkappa_{j,n}-1, \qquad (2.47)$$

уравнения $\mathcal{P}^*\mathcal{V} = 0$, отвечающие собственному числу $\bar{\lambda}_n$ оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$.

---

[7] Возможность разложить распределение $\mathcal{V} \in W_{2\pi}^l(0,\ 2\pi)^*$ в ряд Фурье по функциям $e_k(\omega) = e^{ik\omega}/\sqrt{2\pi}$ оправдывается следующими равенствами:

$$<\mathcal{U},\ \mathcal{V}>=<\sum_k(\mathcal{U},\ e_k)_{(0,\ 2\pi)}e_k,\ \mathcal{V}>=<\mathcal{U},\ \sum_k\mathcal{V}_k e_k>,$$

где $\mathcal{U} \in W_{2\pi}^l(0,\ 2\pi)$, $\mathcal{V}_k = \overline{<e_k,\ \mathcal{V}>}$.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.5; тогда коэффициенты* $c_n^{(k,j)}$ *из (2.45) вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)} = \Big(f,\ i\mathcal{V}_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\Big)_{\mathbb{R}^2}, \tag{2.48}$$

где $\mathcal{V}_n^{(\nu,j)}$ *определены равенствами (2.47), причем жордановы цепочки* $\{\varphi_n^{(0,j)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \ldots,\ J_n\}$ *и* $\Big\{\psi_n^{(0,j)},\ \ldots,\ \psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \ldots,\ J_n\Big\}$, *фигурирующие в (2.46) и (2.47), подчинены следующим условиям биортогональности и нормировки*

$$\sum_{p=0}^{\nu}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{(\nu+k+1-p-q)!}(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\ \psi^{(p,\zeta)})_{(0,\ 2\pi)} =$$

$$= \delta_{\xi,\zeta}\delta_{\varkappa_\xi-k-1,\nu}, \tag{2.49}$$

где $\zeta,\ \xi = 1,\ \ldots,\ J$; $\nu = 0,\ \ldots,\ \varkappa_\zeta - 1$; $k = 0,\ \ldots,\ \varkappa_\xi - 1$; $\delta_{p,q}$ *— символ Кронекера.*

Замечание 2.8. Так как функции $\psi_n^{(\nu,j)}$ бесконечно дифференцируемы, из равенств (2.47) и (2.48) вытекает, что если $f \in H_a^l(\mathbb{R}^2) \cap H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)$ и $a_1 + 1 - l - 2m < \operatorname{Im}\lambda_n < a + 1 - l - 2m$, то имеет место оценка

$$|c_n^{(k,j)}| \le c(\|f\|_{H_a^l(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)}).$$

При изучении асимптотики решений нелокальных задач в ограниченных областях (а именно, при вычислении коэффициентов в асимптотике) потребуются результаты об асимптотическом поведении решений сопряженной задачи

$$\mathcal{P}^*\mathcal{V} = \Psi. \tag{2.50}$$

При помощи теорем 2.5, 2.6 и соображений двойственности, аналогично доказательству теоремы 2.3, доказывается следующий результат.

Теорема 2.7. *Пусть* $\Psi \in H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)^* \cap H_{a_1}^{l+2m}(\mathbb{R}^2)^*$, *и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l - 2m$, $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *свободны от спектра оператор-функции* $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$. *Если* $\mathcal{V}$ *— решение задачи (2.31) из пространства* $H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)^*$, *то*

$$\mathcal{V} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} d_n^{(k,j)}\mathcal{V}_n^{(k,j)} + V. \tag{2.51}$$

Здесь $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_N$ *— собственные числа* $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$*, заключенные между прямыми* $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l - 2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$*;* $\mathcal{V}_n^{(k,j)}$ *— векторы, определенные формулой (2.47);* $d_n^{(k,j)}$ *— некоторые постоянные;* V *— решение задачи (2.50) из пространства* $H_a^l(\mathbb{R}^2)^*$*.*

3. Рассмотрим формулу Грина для локальных эллиптических задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Очевидно, что для любых функций $\mathcal{U} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, $\mathcal{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ имеет место формула Грина

$$(\mathcal{P}(D_y)\mathcal{U},\ \mathcal{V})_{\mathbb{R}^2} = (\mathcal{U},\ \mathcal{P}^*(D_y)\mathcal{V})_{\mathbb{R}^2}. \tag{2.52}$$

Формула (2.52) порождает задачу, формально сопряженную к задаче (2.44):

$$\mathcal{P}^*(D_y)\mathcal{V} = f(y) \quad (y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \tag{2.53}$$

Далее, не трудно показать, что для любых функций $\tilde{\mathcal{U}} \in C_{2\pi}^\infty[0,\ 2\pi]$, $\tilde{\mathcal{V}} \in C_{2\pi}^\infty[0,\ 2\pi]$ имеет место следующая формула Грина с параметром λ:

$$(\tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}},\ \tilde{\mathcal{V}})_{(0,\ 2\pi)} = (\tilde{\mathcal{U}},\ \tilde{\mathcal{P}}^*(\omega,\ D_\omega,\ \lambda')\tilde{\mathcal{V}})_{(0,\ 2\pi)}, \tag{2.54}$$

где $\lambda' = \bar{\lambda} - 2i(m-1)$.

Формула (2.54) порождает оператор

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda) = \tilde{\mathcal{P}}^*(\omega,\ D_\omega,\ \lambda) : W_{2\pi}^{l+2m}(0,\ 2\pi) \to W_{2\pi}^{l}(0,\ 2\pi).$$

При помощи формулы Грина (2.54) и соотношений типа (2.23) устанавливается связь между жордановыми цепочками оператор–функций $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda)$.

Лемма 2.10. *Векторы* $\psi^{(0)},\ \ldots,\ \psi^{(\varkappa-1)}$ *образуют жорданову цепочку оператора* $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$*, отвечающую собственному числу* $\bar{\lambda}_0$*, тогда и только тогда, когда они образуют жорданову цепочку оператора* $\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda)$*, отвечающую собственному числу* $\bar{\lambda}_0 - 2i(m-1)$*.*

Наконец, используя лемму 2.10, сформулируем основной результат о представлении коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.45) в терминах формулы Грина.

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия теоремы 2.5; тогда коэффициенты* $c_n^{(k,j)}$ *из (2.45) вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)} = \left(f,\ i\mathcal{V}_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\right)_{\mathbb{R}^2}, \tag{2.55}$$

где $\mathcal{V}_n^{(\nu,j)}$ *— степенное решение однородной задачи (2.53), определяемое формулой (2.47), причем* $\{\psi_n^{(0,j)},\ \dots,\ \psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \dots,\ J_n\}$ *— каноническая система жордановых цепочек оператор–функции* $\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda)$*, отвечающая числу* $\bar{\lambda}_n - 2i(m-1)$*, а цепочки* $\{\varphi_n^{(0,j)},\ \dots,\ \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \dots,\ J_n\}$ *(фигурирующие в (2.46)) и* $\{\psi_n^{(0,j)},\ \dots,\ \psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \dots,\ J_n\}$ *подчинены условиям (2.49) биортогональности и нормировки.*

4. В гл. 3, при исследовании асимптотики решений нелокальных задач в ограниченных областях, нам потребуется результат об асимптотике решений сопряженной локальной задачи в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ со специальной правой частью. Обратим внимание на отличие от модельной задачи в угле, где нужен результат об асимптотике решений исходной (а не сопряженной) задачи со специальной правой частью.

Пусть Λ — некоторое комплексное число. Если $\bar{\Lambda}$ — собственное число оператор–функции $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$, то обозначим через $\varkappa(\bar{\Lambda})$ наибольшую из частных кратностей этого числа; в противном случае положим $\varkappa(\bar{\Lambda}) = 0$.

Лемма 2.11. *Для задачи (2.53) с правой частью* $\Psi = r^{i\bar{\Lambda}-2}\sum\limits_{q=0}^{M}\dfrac{1}{q!}(i\ln r)^q\Psi^{(q)}$, $\Psi^{(q)} \in W_{2\pi}^{l+2m}(0,\ 2\pi)^*$*, существует решение*

$$\mathcal{V} = r^{i\bar{\Lambda}+2m-2}\sum_{q=0}^{M+\varkappa(\bar{\Lambda})}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\mathcal{V}^{(q)}, \tag{2.56}$$

где $\mathcal{V}^{(q)} \in W_{2\pi}^{l}(0,\ 2\pi)^*$*. Решение такого вида единственно, если* $\varkappa(\bar{\Lambda}) = 0$ *(то есть, если* $\bar{\Lambda}$ *— не является собственным числом* $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$*), а при* $\varkappa(\bar{\Lambda}) > 0$ *решение (2.56) определено с точностью до произвольной линейной комбинации степенных решений (2.47), отвечающих числу* $\bar{\Lambda}$*.*

Доказательство. Доказательство идейно аналогично доказательству леммы 3.1 [24, гл. 3]. Для полноты картины приведем его схему. Необходимо подставить формулу (2.56) для искомого решения в уравнение

$$\mathcal{P}^*\mathcal{V} = r^{i\bar{\Lambda}-2}\sum_{q=0}^{M}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\Psi^{(q)},$$

сократить слева и справа множитель $r^{i\bar{\Lambda}-2}$ и собрать коэффициенты при одинаковых степенях $i\ln r$. В результате получится система $M + \varkappa(\bar{\Lambda})$

уравнений, из которой и определяются неизвестные $\mathcal{V}^{(q)}$. Утверждение о том, что решение вида (2.56) единственно, если $\varkappa(\bar{\Lambda}) = 0$, или определено с точностью до произвольной линейной комбинации степенных решений (2.47), отвечающих числу $\bar{\Lambda}$, если $\varkappa(\bar{\Lambda}) > 0$, следует из результата, аналогичного лемме 1.3 [24, гл. 3], который ограничивает произвол в выборе степенных решений уравнения $\mathcal{P}^*\mathcal{V} = 0$. $\square$

Глава 3

Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских ограниченных областях

В данной главе рассматриваются нелокальные эллиптические задачи в плоских ограниченных областях. При помощи результатов гл. 2 будет получена асимптотика решений нелокальных задач и выведены явные формулы для коэффициентов в указанной асимптотике в терминах сопряженных нелокальных операторов. Попутно будет установлена связь между индексами одной и той же нелокальной задачи, рассматриваемой в пространствах с различными показателями веса.

3.1 Постановка задачи в ограниченной области

1. Пусть $G \in \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей ∂G. Введем множество $\mathcal{K}_1 \subset \partial G$, состоящее из конечного числа точек. Пусть $\partial G \setminus \mathcal{K}_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i$, где Υ_i — открытые (в топологии ∂G) кривые класса C^∞. Будем предполагать, что в окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}_1$ область G совпадает с некоторым углом $K = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ b_1 < \omega < b_2\}$ $(-\pi < b_1 < b_2 < \pi)$, где $(\omega,\ r)$ — полярные координаты точки y с полюсом в точке g.

Обозначим через $\mathbf{P}(y,\ D_y)$ и $B_{i\mu s}(y,\ D_y)$ дифференциальные операторы с комплекснозначными коэффициентами класса $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ порядков $2m$ и $m_{i\mu} \le 2m-1$ соответственно ($i = 1,\ \ldots,\ N_0$; $\mu = 1,\ \ldots,\ m$; $s = 0,\ \ldots,\ S_i$).

Пусть Ω_{is} ($i = 1,\ \ldots,\ N_0$; $s = 1,\ \ldots,\ S_i$) — бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_i$ многообразия Υ_i на множество $\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$, так, что $\Omega_{is}(\Upsilon_i) \subset G$. Представим множество

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \Big\{\bigcup_{i,\,s}\Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i)\Big\} \cup \Big\{\bigcup_{j,\,p}\bigcup_{i,\,s}\Omega_{jp}(\Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \cap \Upsilon_j)\Big\}$$

в виде $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{\nu=1}^{3}\mathcal{K}_\nu$, где $\mathcal{K}_1$ определено выше, $\mathcal{K}_2 = \bigcup\limits_{p=1}^{N_2} h_2^p \subset \partial G \setminus \mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_3 = \bigcup\limits_{p=1}^{N_3} h_3^p \subset G$; h_2^p, h_3^p — некоторые точки. Будем предполагать, что в окрестности каждой точки $h_2^p \in \mathcal{K}_2$ граница ∂G совпадает с прямой.

Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathbf{P}(y,\ D_y)u = f(y) \quad (y \in G \setminus \mathcal{K}), \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{B}_{i\mu}(y,\ D_y)u \equiv \sum_{s=0}^{S_i}(B_{i\mu s}(y,\ D_y)u)(\Omega_{is}(y))|_{\Upsilon_i} = f_{i\mu}(y)\\ (y \in \Upsilon_i;\ i = 1,\ \ldots,\ N_0;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $(B_{i\mu s}(y,\ D_y)u)(\Omega_{is}(y)) = B_{i\mu s}(y',\ D_{y'})u(y')|_{y'=\Omega_{is}(y)}$, $\Omega_{i0}(y) \equiv y$.

Введем пространство $H_a^l(G)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar{G} \setminus \mathcal{K})$ по норме

$$\|u\|_{H_a^l(G)} = \left(\sum_{|\alpha| \le l}\int\limits_Q \rho^{2(a-l+|\alpha|)}|D^\alpha u|^2 dy\right)^{1/2}.$$

Здесь $l \ge 0$ — целое; $a \in \mathbb{R}$; $\rho = \rho(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K})$ — вещественнозначная функция, совпадающая в достаточно малой окрестности множества $\mathcal{K}$ с расстоянием до множества $\mathcal{K}$, такая, что $\rho(y) > 0$ при $y \in \bar{G} \setminus \mathcal{K}$. [1)]

Если вместо области G рассматривается угол с вершиной в точке g или некоторая окрестность точки g, то в определении весового пространства полагаем $\mathcal{K} = \{g\}$.

Через $H_a^{l-1/2}(\Upsilon)$ обозначим пространство следов на гладкой кривой $\Upsilon \subset \bar{G}$ с нормой $\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Upsilon)} = \inf \|u\|_{H_a^l(G)} \quad (u \in H_a^l(G):\ u|_\Upsilon = \psi)$.

[1)] Существование функции $\rho(x)$ вытекает из теоремы 2 [34, Гл. 6, § 2].

Введем ограниченный оператор, соответствующий нелокальной задаче (3.1), (3.2):

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(y,\ D_y),\ \mathbf{B}_{i\mu}(y,\ D_y)\} :$$
$$H_a^{l+2m}(G) \to H_a^l(G,\ \Upsilon) = H_a^l(G) \times \prod_{i=1}^{N_0} \prod_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_i).$$

2. Пусть операторы $\mathbf{P}(y,\ D_y)$, $B_{i\mu 0}(y,\ D_y)$ удовлетворяют следующим условиям (см., например, [19, гл. 2, § 1]).

Условие 3.1. *Для всех $y \in \bar{G}$ оператор $\mathbf{P}(y,\ D_y)$ собственно эллиптический.*

Условие 3.2. *Для всех $i = 1,\ \ldots,\ N_0$ и $y \in \bar{\Upsilon}_i$ система операторов $\{B_{i\mu 0}(y,\ D_y)\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию накрытия по отношению к оператору $\mathbf{P}(y,\ D_y)$.*

На операторы $B_{i\mu s}(y,\ D_y)$, $s \geq 1$ (играющие роль нелокальных), никаких условий, кроме ограничения на порядок, не накладывается.

Обозначим преобразование $\Omega_{is} : \mathcal{O}_i \to \Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ через Ω_{is}^{+1}, а через $\Omega_{is}^{-1} : \Omega_{is}(\mathcal{O}_i) \to \mathcal{O}_i$ — преобразование, обратное к Ω_{is}. Назовем орбитой точки $g \in \mathcal{K}_1$ и обозначим $\mathrm{Orb}(g)$ множество всех точек вида $\Omega_{i_p s_p}^{\pm 1}(\ldots \Omega_{i_1 s_1}^{\pm 1}(g)) \in \mathcal{K}_1$ $(1 \leq s_j \leq S_{i_j},\ j = 1,\ \ldots,\ p)$, то есть всех тех, которые можно получить, применяя к g последовательно преобразования $\Omega_{i_j s_j}^{+1}$ или $\Omega_{i_j s_j}^{-1}$, отображающие точки множества $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_1$. Очевидно, для любых $g,\ g' \in \mathcal{K}_1$ либо $\mathrm{Orb}(g) = \mathrm{Orb}(g')$, либо $\mathrm{Orb}(g) \cap \mathrm{Orb}(g') = \varnothing$. Таким образом, $\mathcal{K}_1 = \bigcup\limits_{p=1}^{N_1} \mathrm{Orb}_p$, где $\mathrm{Orb}_{p_1} \cap \mathrm{Orb}_{p_2} = \varnothing$ $(p_1 \neq p_2)$ и для любого $p = 1,\ \ldots,\ N_1$ множество Orb_p совпадает с орбитой некоторой точки $g \in \mathcal{K}_1$.

Введем множество индексов $\mathcal{S}_{i1} = \{0 \leq s \leq S_i : \Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i) \cap \mathcal{K}_1 \neq \varnothing\}$. Очевидно, $0 \in \mathcal{S}_{i1}$. Пусть множество Orb_p состоит из точек g_j^p, $j = 1,\ \ldots,\ N = N_{p1}$. Выберем для точек g_j^p окрестности

$$\mathcal{V}(g_j^p) \subset \hat{\mathcal{V}}(g_j^p) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{ \bigcup_{i,\,s} \Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i) \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \Big\}\ (s \notin \mathcal{S}_{i1}),$$

такие, что 1) в окрестности $\hat{\mathcal{V}}(g_j^p)$ граница ∂G совпадает с некоторым углом; 2) $\overline{\hat{\mathcal{V}}(g_j^p)} \cap \overline{\hat{\mathcal{V}}(g_q^k)} = \varnothing$ при $(p,\ j) \neq (q,\ k)$; 3) если $g_j^p \in \bar{\Upsilon}_i \cap \mathrm{Orb}_p$ и $\Omega_{is}(g_j^p) = g_k^p$, то $\hat{\mathcal{V}}(g_j^p) \subset \mathcal{O}_i$ и $\Omega_{is}(\mathcal{V}(g_j^p)) \subset \hat{\mathcal{V}}(g_k^p)$.

Для каждой точки $g_j^p \in \mathrm{Orb}_p$ зафиксируем преобразование $y \mapsto y'(g_j^p)$, представляющее собой сдвиг на вектор $-g_j^p$ и поворот на некоторый угол, так, что множество $\mathcal{V}(g_j^p)$ $(\hat{\mathcal{V}}(g_j^p))$ перейдет в окрестность нуля $\mathcal{V}_j^p(0)$ $(\hat{\mathcal{V}}_j^p(0))$, а $G\cap\mathcal{V}(g_j^p)$ $(G\cap\hat{\mathcal{V}}(g_j^p))$ и $\Upsilon_i\cap\mathcal{V}(g_j^p)$ $(\Upsilon_i\cap\hat{\mathcal{V}}(g_j^p))$ перейдут соответственно в пересечение плоского угла $K_j^p = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0, \ b_{j1}^p < \omega < b_{j2}^p\}$ $(-\pi < b_{j1}^p < b_{j2}^p < \pi)$ с окрестностью $\mathcal{V}_j^p(0)$ $(\hat{\mathcal{V}}_j^p(0))$ и пересечение стороны угла K_j^p с окрестностью $\mathcal{V}_j^p(0)$ $(\hat{\mathcal{V}}_j^p(0))$.

Условие 3.3. *Преобразованию $\Omega_{is}(y)$ $(s \in \mathcal{S}_{i1} \setminus \{0\})$ при $y \in \mathcal{V}(g_j^p)$ в новой системе координат $\{y'\}$ соответствует поворот и растяжение вектора y'.*

Преобразование $\Omega_{is}(y)$ $(s \notin \mathcal{S}_{i1})$ при $y \in \mathcal{V}(g_j^p)$ совпадает с поворотом относительно точки g_j^p, растяжением относительно точки g_j^p и сдвигом на вектор, не зависящий от y.

Совместно с условием $\Omega_{is}(\Upsilon_i) \subset G$, условие 3.3 означает, в частности, что если $g \in \Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \cap \bar{\Upsilon}_j \cap \mathcal{K}_1 \neq \varnothing$, то кривые $\Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i)$ и $\bar{\Upsilon}_j$ пересекаются в точке g под углом не равным 0 и π.

Выберем для точек $h_2^p \in \mathcal{K}_2$ окрестности

$$\mathcal{V}(h_2^p) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{ \bigcup_{p_1=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_{p_1 1}} \hat{\mathcal{V}}(g_j^{p_1}) \cup \mathcal{K}_3 \Big\},$$

такие, что 1) в окрестности $\mathcal{V}(h_2^p)$ граница ∂G совпадает с прямой; 2) $\overline{\mathcal{V}(h_2^p)} \cap \overline{\mathcal{V}(h_2^q)} = \varnothing$ при $p \neq q$; 3) если $h_2^p \in \Upsilon_i$, то $\mathcal{V}(h_2^p) \in \mathcal{O}_i$.

Условие 3.4. *Если $h_2^p \in \Upsilon_i$, то преобразование $\Omega_{is}(y)$ $(s \neq 0)$ при $y \in \mathcal{V}(h_2^p)$ совпадает с поворотом вокруг точки h_2^p, растяжением относительно точки h_2^p и сдвигом на вектор, не зависящий от y.*

Выберем для точек $h_3^p \in \mathcal{K}_3$ окрестности

$$\mathcal{V}(h_3^p) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{ \bigcup_{p_1=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_{p_1 1}} \hat{\mathcal{V}}(g_j^{p_1}) \cup \bigcup_{p_2=1}^{N_2} \mathcal{V}(h_2^{p_2}) \Big\},$$

такие, что 1) $\overline{\mathcal{V}(h_3^p)} \cap \partial G = \varnothing$; 2) $\overline{\mathcal{V}(h_3^p)} \cap \overline{\mathcal{V}(h_3^q)} = \varnothing$ при $p \neq q$.

Условие 3.5. *Если $h_3^p \cap \Omega_{is}(\Upsilon_i) \neq \varnothing$, то $\Omega_{is}^{-1}(h_3^p) \subset \mathcal{K}$.*

Условие 3.5 гарантирует, что множество $\mathcal{K}$, участвующее в определении весового пространства $H_a^l(G)$, конечно.

Замечание 3.1. Предположение о линейности преобразований Ω_{is} вблизи множества $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ сделано для простоты. Все результаты обобщаются на случай гладких преобразований, таких, что если $g \in \Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \cap \bar{\Upsilon}_j \cap \mathcal{K}_1 \neq \varnothing$, то кривые $\Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i)$ и $\bar{\Upsilon}_j$ имеют различные касательные в точке g. При этом если $\Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \subset \partial G \setminus \mathcal{K}_1$, то на характер подхода кривой $\Omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i)$ к границе ∂G никаких ограничений (так же, как и в работах [30, 33]) накладывать не следует.

3.2 Асимптотика решений нелокальной задачи

1. Получим асимптотику решения $u \in H_a^{l+2m}(G)$ задачи (3.1), (3.2) с правой частью $\{f,\ f_{i\mu}\} \in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)$, $0 < a - a_1 < 1$.

Отметим, что нарушение неравенства $a - a_1 < 1$ означает “слишком большую” регулярность правой части $\{f,\ f_{i\mu}\}$, и при этом точные результаты должны выделять больше членов асимптотики, чем в нашем случае. Это можно сделать, как и в работе [30] (см. также [16, 24]), составляя соответствующие уравнения для остатка в асимптотической формуле и последовательно применяя к ним полученные для случая $a - a_1 < 1$ результаты. В настоящей диссертации это делать не будем, так как подробные доказательства приводят к большому увеличению размеров работы, не внося существенно нового (по отношению к настоящей работе и работе [30]).

Зафиксируем точку $h_3^p \in \mathcal{K}_3$ $(p = 1,\ \dots,\ N_3)$. Асимптотическое поведение решения задачи (3.1), (3.2) при $y \in \mathcal{V}(h_3^p)$ не зависит от нелокальных условий (3.2), а определяется лишь уравнением

$$\mathbf{P}(y,\ D_y)u = f(y) \quad (y \in \mathcal{V}(h_3^p)). \tag{3.3}$$

Обозначим через $\mathcal{P}(D_y)$ главную однородную часть оператора $\mathbf{P}(h_3^p,\ D_y)$ и запишем уравнение (3.3) в виде

$$\mathcal{P}(D_y)u(y) = \hat{f}(y) \quad (y \in \mathcal{V}(h_3^p)),$$

где $\hat{f}$, в силу условия $0 < a - a_1 < 1$, принадлежит пространству $H_{a_1}^l(\mathcal{V}(h_3^p))$. Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_3^p = \mathcal{P}(D_y) : H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to H_a^l(\mathbb{R}^2),$$

где в определении весового пространства полагаем $\mathcal{K} = \{h_3^p\}$.

Отметим, что оператор $\mathcal{L}_3^p$ рассматривался в § 2.5 гл. 2; там он обозначался через $\mathcal{P}$.

Запишем оператор $\mathcal{P}(D_y)$ в полярных координатах с полюсом в точке h_3^p: $\mathcal{P}(D_y) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$.

Введем ограниченный оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}_3^p(\lambda) = \tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda) : W_{2\pi}^{l+2m}(0,\ 2\pi) \to W_{2\pi}^{l}(0,\ 2\pi).$$

Отметим, что оператор $\tilde{\mathcal{L}}_3^p(\lambda)$ изучен в § 2.5 гл. 2; там он обозначался через $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$.

Положим $h_1 = a_1 + 1 - l - 2m$, $h = a + 1 - l - 2m$.

Аналогично доказательству теоремы 2.1 [24, гл. 4], из теоремы 2.5 гл. 2 получим следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = h_1$, $\operatorname{Im}\lambda = h$ *свободны от спектра оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}_3^p(\lambda)$, *а в полосе* $h_1 < \operatorname{Im}\lambda < h$ *лежат собственные числа* $\lambda_{3,n}^p$ *этой оператор–функции. Тогда*

$$u(y) = c_3^p u_3^p(y) + u_1(y) \quad (y \in \mathcal{V}(h_3^p)). \tag{3.4}$$

Здесь $c_3^p = \{c_{3,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ *— вектор констант,* $u_3^p = \{u_{3,n}^{p,(k,\zeta)}\}$,

$$u_{3,n}^{p,(k,\zeta)}(\omega,\ r) = r^{i\lambda_{3,n}^p} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}(i\ln r)^q \varphi_{3,n}^{p,(k-q,\zeta)}(\omega), \tag{3.5}$$

$(\omega,\ r)$ *— полярные координаты с полюсом в точке* h_3^p;

$$\{\varphi_{3,n}^{p,(0,\zeta)},\ \ldots,\ \varphi_{3,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,3,n}^p-1,\zeta)} : \zeta = 1,\ \ldots,\ J_{3,n}^p\}$$

— каноническая система жордановых цепочек оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}_3^p(\lambda)$, *отвечающая собственному числу* $\lambda_{3,n}^p$; $u_1 \in H_{a_1}^{l+2m}(\mathcal{V}(h_3^p))$.

Замечание 3.2. В формуле (3.4) и далее выражение вида $c_3^p u_3^p$ вычисляется как произведение вектор–строки c_3^p на вектор–столбец u_3^p:

$$c_3^p u_3^p = \sum_{h_1 < \lambda_{3,n}^p < h} \sum_{\zeta=1}^{J_{3,n}^p} \sum_{k=0}^{\varkappa_{\zeta,3,n}^p - 1} c_{3,n}^{p,(k,\zeta)} u_{3,n}^{p,(k,\zeta)}.$$

Аналогично предложению 5.4 [24, гл. 3], можно показать, что функции $u_{3,n}^{p,(k,\zeta)}$, определяемые формулой (3.5), удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{L}_3^p u_{3,n}^{p,(k,\zeta)} = 0. \tag{3.6}$$

2. Зафиксируем точку $h_2^p \in \mathcal{K}_2$ $(p = 1,\ \ldots,\ N_2)$. Пусть $h_2^p \in \Upsilon_i$. Легко видеть, что асимптотика решения задачи (3.1), (3.2) при $y \in \mathcal{V}(h_2^p)$ совпадает с асимптотикой решения задачи

$$\mathbf{P}(y,\ D_y)u = f(y) \quad (y \in \mathcal{V}(h_2^p) \cap G), \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} B_{i\mu 0}(y,\ D_y)u|_{\mathcal{V}(h_2^p)\cap\Upsilon_i} = f_{i\mu}(y) - \sum_{s=1}^{S_i} (B_{i\mu s}(y,\ D_y)u)(\Omega_{is}(y))|_{\mathcal{V}(h_2^p)\cap\Upsilon_i} \\ (y \in \mathcal{V}(h_2^p) \cap \Upsilon_i;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Рассмотрим слагаемые, стоящие под знаком суммы. Пусть $\Omega_{is}(h_2^p) = h_3^{p_3} \in \mathcal{K}_3$. Обозначим через $B_{i\mu s}(D_y)$ $(s \ne 0)$ главную однородную часть оператора $B_{i\mu s}(h_3^{p_3},\ D_y)$. В силу теоремы 3.1, условия $0 < a - a_1 < 1$ и леммы 3.9 [16] имеем

$$\begin{aligned} (B_{i\mu s}(y,\ D_y)u)(\Omega_{is}(y))|_{\mathcal{V}(h_2^p)\cap\Upsilon_i} &= c_3^{p_3}(B_{i\mu s}(D_y)u_3^{p_3})(\Omega_{is}(y))|_{\mathcal{V}(h_2^p)\cap\Upsilon_i} + \\ &+ \hat{f}_{i\mu s}(y) = c_3^{p_3} f_{3,i\mu s}^{p_3}(y)|_{\mathcal{V}(h_2^p)\cap\Upsilon_i} + \hat{f}_{i\mu s}(y). \end{aligned}$$

Здесь $\hat{f}_{i\mu s} \in H_{a_1}^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathcal{V}(h_2^p) \cap \Upsilon_i)$, $f_{3,i\mu s}^{p_3} = \{f_{3,n,i\mu s}^{p_3,(k,\zeta)}\}$, $f_{3,n\ldots}^{p_3\ldots}$ есть, в силу условия 3.4, линейные комбинации функций вида $r^{i\lambda_{3,n}^{p_3} - m_{i\mu}}(i\ln r)^q f_{3,n\ldots q}^{p_3\ldots}(\omega)$, где $(\omega,\ r)$ — полярные координаты с полюсом в точке h_2^p и полярной осью, направленной перпендикулярно границе ∂G внутрь области.

Обозначим через $\mathcal{P}(D_y)$, $\mathcal{B}_{i\mu 0}(D_y)$ главные однородные части операторов $\mathbf{P}(h_2^p,\ D_y)$, $B_{i\mu 0}(h_2^p,\ D_y)$. Тогда, с учетом сказанного, задача (3.7), (3.8) примет вид

$$\mathcal{P}(D_y)u(y) = \hat{f}(y) \quad (y \in \mathcal{V}(h_2^p) \cap G), \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{B}_{i\mu 0}(D_y)u|_{\mathcal{V}(h_2^p)\cap\Upsilon_i} = -\sum_{p_3=1}^{N_3} \sum_s c_3^{p_3} f_{3,i\mu s}^{p_3}(y)|_{\mathcal{V}(h_2^p)\cap\Upsilon_i} + \hat{f}_{i\mu}(y) \\ (y \in \mathcal{V}(h_2^p) \cap \Upsilon_i;\ \mu = 1,\ \ldots,\ m). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь $\hat{f} \in H_{a_1}^l(\mathcal{V}(h_2^p))$, $\hat{f}_{i\mu} \in H_{a_1}^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathcal{V}(h_2^p) \cap \Upsilon_i)$, и суммирование проводится по тем $s \in \{1,\ \ldots,\ S_i\}$, для которых $\Omega_{is}(h_2^p) = h_3^{p_3}$.

Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_2^p : H_a^{l+2m}(K_{\pi/2}) \to H_a^l(K_{\pi/2},\ \gamma) = H_a^l(K_{\pi/2}) \times \prod_{j=1}^{2}\prod_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\gamma_j)$$

по формуле

$$\mathcal{L}_2^p u = \{\mathcal{P}(D_y)u(y),\ \mathcal{B}_{i\mu 0}(D_y)u(y)|_{\gamma_j}\},$$

где $K_{\pi/2} = \{y : r > 0,\ |\omega| < \pi/2\}$, $\gamma_j = \{y : \omega = (-1)^j\pi/2\}$, $j = 1,\ 2$; $(\omega,\ r)$ — полярные координаты с полюсом в точке h_2^p и полярной осью, направленной перпендикулярно границе ∂G внутрь области.

Запишем операторы $\mathcal{P}(D_y)$, $\mathcal{B}_{i\mu 0}(D_y)$ в полярных координатах: $\mathcal{P}(D_y) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $\mathcal{B}_{i\mu 0}(D_y) = r^{-m_{i\mu}}\tilde{\mathcal{B}}_{i\mu 0}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$.

Введем аналитическую оператор–функцию

$$\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\lambda) : W^{l+2m}(-\pi/2,\ \pi/2) \to W^l[-\pi/2,\ \pi/2] = W^l(-\pi/2,\ \pi/2) \times \mathbb{C}^{2m}$$

по формуле

$$\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\lambda)\tilde{U} = \{\tilde{\mathcal{P}}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{U}(\omega),\ \tilde{\mathcal{B}}_{i\mu 0}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{U}(\omega)|_{\omega=(-1)^j\pi/2}\},\ j = 1,\ 2.$$

Из [16, § 1] следует существование конечномероморфной оператор–функции $\tilde{\mathcal{R}}_2^p(\lambda)$, такой, что ее полюса, за исключением, быть может, конечного числа, расположены внутри двойного угла раствора меньше π, содержащего мнимую ось, и для λ, не являющегося ее полюсом, оператор $\tilde{\mathcal{R}}_2^p(\lambda)$ является ограниченным обратным к оператору $\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\lambda)$. Если прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не содержит полюсов оператор–функции $\tilde{\mathcal{R}}_2^p(\lambda)$ (или, что то же самое, не содержит собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\lambda)$) то, в силу работы [16, § 1], оператор $\mathcal{L}_2^p$ есть изоморфизм. Используя теорему 5.12 [24, гл. 3] об асимптотике решений краевых задач со специальными правыми частями, получим следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = h_1$, $\operatorname{Im}\lambda = h$ *свободны от спектра оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\lambda)$, *а в полосе* $h_1 < \operatorname{Im}\lambda < h$ *лежат собственные числа* $\lambda_{2,n}^p$ *этой оператор–функции. Тогда*

$$u(y) = c_2^p u_2^p(y) + \sum_{p_3} c_3^{p_3} u_{23}^{pp_3}(y) + u_1(y) \quad (y \in \mathcal{V}(h_2^p) \cap G), \tag{3.11}$$

суммирование проводится по тем p_3, *для которых найдутся преобразования* Ω_{is}, *такие, что* $\Omega_{is}^{-1}(h_3^{p_3}) = h_2^p \in \Upsilon_i$. *Здесь* $c_2^p = \{c_{2,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ *— вектор констант,* $u_2^p = \{u_{2,n}^{p,(k,\zeta)}\}$,

$$u_{2,n}^{p,(k,\zeta)}(\omega,\ r) = r^{i\lambda_{2,n}^p} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}(i\ln r)^q \varphi_{2,n}^{p,(k-q,\zeta)}(\omega), \tag{3.12}$$

$$\{\varphi_{2,n}^{p,(0,\zeta)},\ \ldots,\ \varphi_{2,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,2,n}^p-1,\zeta)}:\zeta=1,\ \ldots,\ J_{2,n}^p\}$$

— каноническая система жордановых цепочек оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\lambda)$, отвечающая собственному числу $\lambda_{2,n}^p$; $u_{23}^{pp_3}=\{u_{23,n}^{pp_3,(k,\zeta)}\}$, $u_{23,n}^{pp_3\ldots}$ — линейная комбинация функций вида $r^{i\lambda_{3,n}^{p_3}}(i\ln r)^q\varphi_{23,n,q}^{pp_3\ldots}(\omega)$; $(\omega,\ r)$ — полярные координаты с полюсом в точке h_2^p; наконец, $u_1\in H_{a_1}^{l+2m}(\mathcal{V}(h_2^p)\cap G)$.

Отметим, что, согласно предложению 5.4 [24, гл. 3], функции $u_{2,n}^{p,(k,\zeta)}$, определяемые формулой (3.12), удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{L}_2^p u_{2,n}^{p,(k,\zeta)}=0. \tag{3.13}$$

Функции $u_{23,n}^{pp_3\ldots}$ состоят из суммы частных решений $u_{23,n\ldots}^{pp_3\ldots}$ задачи (3.9), (3.10), рассматриваемой во всем угле $K_{\pi/2}$, с правыми частями $\{0,\ -f_{3,n\ldots}^{p_3\ldots}\}$. Каждое частное решение $u_{23,n\ldots}^{pp_3\ldots}$ есть линейная комбинация функций вида $r^{i\lambda_{3,n}^{p_3}}(i\ln r)^q\varphi_{23,n\ldots q}^{pp_3\ldots}(\omega)$. Решение такого вида единственно, если $\lambda_{3,n}^{p_3}$ не является собственным числом оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\lambda)$; в противном случае $u_{23,n\ldots}^{pp_3\ldots}$ определено с точностью до произвольной линейной комбинации степенных решений вида (3.12), отвечающих собственному числу $\lambda_{3,n}^{p_3}$ оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\lambda)$ (см. лемму 5.11 [24, гл. 3]). Далее будем считать фиксированными некоторые частные решения $u_{23,n\ldots}^{pp_3\ldots}$, а следовательно, и функции $u_{23,n}^{pp_3\ldots}$.

Итак, асимптотика решения в окрестности $\mathcal{K}_2$ зависит как от данных задачи в окрестности $\mathcal{K}_2$, так и от данных в окрестности $\mathcal{K}_3$.

3. Теперь зафиксируем некоторую орбиту $\mathrm{Orb}_p\subset\mathcal{K}_1$ $(p=1,\ \ldots,\ N_1)$. Вначале предположим, что $\operatorname{supp}u\subset\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{N_{p1}}\mathcal{V}(g_j^p)\Big)\cap\bar{G}$. Обозначим $u(y)$ при $y\in\hat{\mathcal{V}}(g_j^p)\cap G$ через $u_j(y)$. Если $g_j^p\in\bar{\Upsilon}_i$, $y\in\mathcal{V}(g_j^p)$, $\Omega_{is}(y)\in\hat{\mathcal{V}}(g_k^p)$, то обозначим $u(\Omega_{is}(y))$ через $u_k(\Omega_{is}(y))$; при этом, очевидно, $u(\Omega_{i0}(y))\equiv u(y)\equiv u_j(y)$. Тогда нелокальная краевая задача (3.1), (3.2) примет вид

$$\mathbf{P}(y,\ D_y)u_j=f(y)\quad(y\in\mathcal{V}(g_j^p)\cap G),$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}_{i1}}(B_{i\mu s}(y,\ D_y)u_k)(\Omega_{is}(y))|_{\Upsilon_i}=f_{i\mu}(y)$$
$$(y\in\mathcal{V}(g_j^p)\cap\Upsilon_i;\ i\in\{1\le i\le N_0:g_j^p\in\bar{\Upsilon}_i\};$$
$$j=1,\ \ldots,\ N=N_{p1};\ \mu=1,\ \ldots,\ m).$$

Пусть $y\mapsto y'(g_j^p)$ — преобразование координат, описанное в § 3.1. Введем функцию $\mathcal{U}_j(y')=u_j(y(y'))$ и переобозначим y' через y. Положим

$\gamma^p_{j\sigma} = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega = b^p_{j\sigma}\}$ $(\sigma = 1,\ 2)$, где $(\omega,\ r)$ — полярные координаты с полюсом в точке 0. Тогда, в силу условия 3.3, задача (3.1), (3.2) примет вид

$$\mathcal{P}^p_j(y,\ D_y)\mathcal{U}_j = f_j(y) \quad (y \in \mathcal{V}^p_j(0) \cap K^p_j), \tag{3.14}$$

$$\mathcal{B}^p_{j\sigma\mu}(y,\ D_y)\mathcal{U} \equiv \sum_{k,s}(B^p_{j\sigma\mu ks}(y,\ D_y)\mathcal{U}_k)(\mathcal{G}^p_{j\sigma ks}y)|_{\mathcal{V}^p_j(0)\cap\gamma^p_{j\sigma}} =$$
$$= f_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \mathcal{V}^p_j(0) \cap \gamma^p_{j\sigma}). \tag{3.15}$$

Здесь $j,\ k = 1,\ \dots,\ N_{p1}$; $\sigma = 1,\ 2$; $\mu = 1,\ \dots,\ m$; $s = 0,\ \dots,\ S^p_{j\sigma k}$; $\mathcal{P}^p_j(y,\ D_y)$, $B^p_{j\sigma\mu ks}(y,\ D_y)$ — операторы порядков $2m$, $m^p_{j\sigma\mu} \le 2m-1$ соответственно с переменными коэффициентами класса C^∞; $\mathcal{G}^p_{j\sigma ks}$ — оператор поворота на угол $\omega^p_{j\sigma ks}$ и растяжения в $\beta^p_{j\sigma ks} > 0$ раз в плоскости $\{y\}$; при этом $b^p_{k1} < b^p_{j\sigma} + \omega^p_{j\sigma ks} < b^p_{k2}$, если $(j,\ 0) \ne (k,\ s)$, и $\omega^p_{j\sigma j0} = 0$, $\beta^p_{j\sigma j0} = 1$.

Замечание 3.3. В настоящей главе нам не потребуется выписывать задачу, формально сопряженную относительно формулы Грина к задаче (3.14), (3.15) и содержащую условия сопряжения на лучах, лежащих строго внутри углов K^p_j. Поэтому в данном случае мы опускаем в нелокальных операторах и операторах преобразования переменных нижний индекс q, соответствующий номеру указанного луча (ср. с задачей (1.10), (1.11) гл. 1). Таким образом, все нелокальные операторы, соответствующие преобразованию луча $\gamma^p_{j\sigma}$ внутрь угла K^p_k, занумерованы индексом s, изменяющимся от 0 до $S^p_{j\sigma k}$.

Ясно, что $f_j \in H^l_{a_1}(\mathcal{V}^p_j(0) \cap K^p_j)$, $f_{j\sigma\mu} \in H^{l+2m-m^p_{j\sigma\mu}-1/2}_{a_1}(\mathcal{V}^p_j(0) \cap \gamma^p_{j\sigma})$.

Теперь откажемся от предположения $\operatorname{supp} u \subset \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{N_{p1}} \mathcal{V}(g^p_j)\Big) \cap \bar{G}$. Обозначим через $\mathcal{P}^p_j(D_y)$, $B^p_{j\sigma\mu ks}(D_y)$ главные однородные части операторов $\mathcal{P}^p_j(0,\ D_y)$, $B^p_{j\sigma\mu ks}(0,\ D_y)$ соответственно. Положим

$$\mathcal{B}^p_{j\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U} \equiv \sum_{k,s}(B^p_{j\sigma\mu ks}(D_y)\mathcal{U}_k)(\mathcal{G}^p_{j\sigma ks}(y))|_{\mathcal{V}^p_j(0)\cap\gamma^p_{j\sigma}}.$$

Тогда аналогично п. 2 настоящего параграфа получим, что асимптотика решения задачи (3.1), (3.2) при $y \in \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{N_{p1}} \mathcal{V}(g^p_j)\Big) \cap G$ определяется, в силу теорем 3.1, 3.2, следующей задачей:

$$\mathcal{P}^p_j(D_y)\mathcal{U}_j = \hat{f}_j(y) \quad (y \in \mathcal{V}^p_j(0) \cap K^p_j), \tag{3.16}$$

$$\mathcal{B}^p_{j\sigma\mu}(D_y)\mathcal{U} = -\sum_{p_2=1}^{N_2}\sum_{i,s} c_2^{p_2} f^{p_2}_{2,i\mu s,j}(y)|_{\mathcal{V}^p_j(0)\cap\gamma^p_{j\sigma}} -$$
$$-\sum_{p_2=1}^{N_2}\sum_{i,s}\sum_{p_3} c_3^{p_3} f^{p_2p_3}_{23,i\mu s,j}(y)|_{\mathcal{V}^p_j(0)\cap\gamma^p_{j\sigma}} - \sum_{p_3=1}^{N_3}\sum_{i,s} c_3^{p_3} f^{p_3}_{3,i\mu s,j}(y)|_{\mathcal{V}^p_j(0)\cap\gamma^p_{j\sigma}} +$$
$$+\hat{f}_{j\sigma\mu}(y) \quad (y\in\mathcal{V}^p_j(0)\cap\gamma^p_{j\sigma}). \quad (3.17)$$

Здесь в первой и второй суммах берутся те i, s, для которых $g^p_j \in \bar{\Upsilon}_i$ и $\Omega_{is}(g^p_j) = h^{p_2}_2 \in \mathcal{K}_2$; в третьей сумме — те, для которых $g^p_j \in \bar{\Upsilon}_i$ и $\Omega_{is}(g^p_j) = h^{p_3}_3 \in \mathcal{K}_3$; p_3 во второй сумме принимает те же значения, что и в формуле (3.11) (в которой следует заменить p на p_2). Далее, в силу условий 3.3 и 3.4, $f^{p_2}_{2,i\mu s,j} = \{f^{p_2,(k,\zeta)}_{2,n,i\mu s,j}\}$, $f^{p_2p_3}_{23,i\mu s,j} = \{f^{p_2p_3,(k,\zeta)}_{23,n,i\mu s,j}\}$, $f^{p_3}_{3,i\mu s,j} = \{f^{p_3,(k,\zeta)}_{3,n,i\mu s,j}\}$, $f^{p_2\dots}_{2,n\dots}$, $f^{p_2p_3\dots}_{23,n\dots}$, $f^{p_3\dots}_{3,n\dots}$ — линейные комбинации функций вида $r^{i\lambda^{p_2}_{2,n}-m^p_{j\sigma\mu}}(i\ln r)^q f^{p_2\dots}_{2,n\dots q}(\omega)$, $r^{i\lambda^{p_3}_{3,n}-m^p_{j\sigma\mu}}(i\ln r)^q f^{p_2p_3\dots}_{23,n\dots q}(\omega)$, $r^{i\lambda^{p_3}_{3,n}-m^p_{j\sigma\mu}}(i\ln r)^q f^{p_3,\dots}_{3,n\dots q}(\omega)$ соответственно (функции $f^{p_2\dots}_{2,n\dots}$, $f^{p_2p_3\dots}_{23,n\dots}$ и $f^{p_3\dots}_{3,n\dots}$ получаются применением главных однородных частей соответствующих нелокальных операторов $B_{i\mu s}(y,\ D_y)$ к функциям $u^{p_2\dots}_{2,n}$, $u^{p_2p_3\dots}_{23,n}$ и $u^{p_3\dots}_{3,n}$, описанным в теоремах 3.2 и 3.1). Наконец, $\hat{f}_j \in H^l_{a_1}(\mathcal{V}^p_j(0)\cap K^p_j)$, $\hat{f}_{j\sigma\mu} \in H^{l+2m-m^p_{j\sigma\mu}-1/2}_{a_1}(\mathcal{V}^p_j(0)\cap\gamma^p_{j\sigma})$.

Определим пространства вектор-функций

$$H^{l+2m,\,N}_a(K^p) = \prod_{j=1}^{N_{p1}} H^{l+2m}_a(K^p_j),\ H^{l,\,N}_a(K^p,\ \gamma^p) = \prod_{j=1}^{N_{p1}} H^l_a(K^p_j,\ \gamma^p_j),$$

$$H^l_a(K^p_j,\ \gamma^p_j) = H^l_a(K^p_j)\times\prod_{\sigma=1,2}\prod_{\mu=1}^{m} H^{l+2m-m^p_{j\sigma\mu}-1/2}_a(\gamma^p_{j\sigma}).$$

Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}^p_1 = \{\mathcal{P}^p_j(D_y),\ \mathcal{B}^p_{j\sigma\mu}(D_y)\} : H^{l+2m,\,N}_a(K^p) \to H^{l,\,N}_a(K^p,\ \gamma^p).$$

Отметим, что асимптотика решений модельной задачи, соответствующей оператору $\mathcal{L}^p_1$, изучалась в гл. 2; там оператор $\mathcal{L}^p_1$ обозначался через $\mathcal{L}$.

Запишем операторы $\mathcal{P}^p_j(D_y)$, $B^p_{j\sigma\mu ks}(D_y)$ в полярных координатах: $\mathcal{P}^p_j(D_y) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}^p_j(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$, $B^p_{j\sigma\mu ks}(D_y) = r^{-m^p_{j\sigma\mu}}\tilde{B}^p_{j\sigma\mu ks}(\omega,\ D_\omega,\ rD_r)$.

Рассмотрим аналитическую оператор–функцию $\tilde{\mathcal{L}}_1^p(\lambda) : W^{l+2m,\,N}(b_1^p,\ b_2^p) \to W^{l,\,N}[b_1^p,\ b_2^p]$, определенную по формуле

$$\tilde{\mathcal{L}}_1^p(\lambda)\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{\mathcal{P}}_j^p(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}_j,\\ \sum_{k,s}(\beta^p_{j\sigma ks})^{i\lambda - m^p_{j\sigma\mu}}\tilde{B}^p_{j\sigma\mu ks}(\omega,\ D_\omega,\ \lambda)\tilde{\mathcal{U}}_k(\omega+\omega^p_{j\sigma ks})|_{\omega=b^p_{j\sigma}}\}$$

(см. § 1.2 гл. 1 и § 2.1 гл. 2, где оператор $\tilde{\mathcal{L}}_1^p(\lambda)$ обозначался через $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$).

В гл. 2 получены асимптотические формулы решений нелокальных задач в плоских углах для случая $N_{p1} = 1$, $s = 1$ (один угол и одно “нелокальное” слагаемое). Эти формулы без труда обобщаются на случай произвольных N_{p1} и s, поэтому, ссылаясь на результаты гл. 2, будем иметь в виду общий случай.

Теорема 3.3. *Пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = h_1$, $\operatorname{Im}\lambda = h$ *свободны от спектра оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}_1^p(\lambda)$, *а в полосе* $h_1 < \operatorname{Im}\lambda < h$ *лежат собственные числа* $\lambda^p_{1,n}$ *этой оператор–функции. Тогда*

$$u(y) = c_1^p u_1^p(y) + \sum_{p_2} c_2^{p_2} u_{12}^{pp_2}(y) + \sum_{p_2}\sum_{p_3} c_3^{p_3} u_{123}^{pp_2p_3}(y) + \\ + \sum_{p_3} c_3^{p_3} u_{13}^{pp_3}(y) + u_1(y) \ \Big(y \in \bigcup_{j=1}^{N_{p1}} \mathcal{V}(g_j^p) \cap G\Big), \tag{3.18}$$

в первой и второй суммах p_2 *принимает те значения, для которых найдутся преобразования* Ω_{is}, *такие, что* $\Omega_{is}^{-1}(h_2^{p_2}) \in \mathrm{Orb}_p \cap \bar{\Upsilon}_i$; *в последней сумме* p_3 *принимает те значения, для которых найдутся преобразования* Ω_{is}, *такие, что* $\Omega_{is}^{-1}(h_3^{p_3}) \in \mathrm{Orb}_p \cap \bar{\Upsilon}_i$; p_3 *во второй сумме изменяется так же, как в формуле (3.11) (в которой следует заменить* p *на* p_2*). Далее,* $c_1^p = \{c_{1,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ *— вектор констант,* $u_1^p = \{u_{1,n}^{p,(k,\zeta)}\}$,

$$u_{1,n}^{p,(k,\zeta)}(y) = [\mathcal{U}_{1,n}^{p,(k,\zeta)}]_j(y'(y)) \ \text{при}\ y \in \mathcal{V}(g_j^p),\ j = 1,\ \dots,\ N_{p1},$$

где вектор $\mathcal{U}_{1,n}^{p,(k,\zeta)} = ([\mathcal{U}_{1,n}^{p,(k,\zeta)}]_1,\ \dots,\ [\mathcal{U}_{1,n}^{p,(k,\zeta)}]_{N_{p1}})$ *определяется формулой*

$$\mathcal{U}_{1,n}^{p,(k,\zeta)}(\omega,\ r) = r^{i\lambda^p_{1,n}} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}(i\ln r)^q \varphi_{1,n}^{p,(k-q,\zeta)}(\omega), \tag{3.19}$$

$$\{\varphi_{1,n}^{p,(0,\zeta)},\ \dots,\ \varphi_{1,n}^{p,(\varkappa^p_{\zeta,1,n}-1,\zeta)} : \zeta = 1,\ \dots,\ J^p_{1,n}\}$$

— каноническая система жордановых цепочек оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}_1^p(\lambda)$, *отвечающая собственному числу* $\lambda^p_{1,n}$, $(\omega,\ r)$ *— полярные*

координаты с полюсом в точке 0; $u_{12}^{pp_2} = \{u_{12,n}^{pp_2,(k,\zeta)}\}$, $u_{123}^{pp_2p_3} = \{u_{123,n}^{pp_2p_3,(k,\zeta)}\}$, $u_{13}^{pp_3} = \{u_{13,n}^{pp_3,(k,\zeta)}\}$, $u_{12,n}^{pp_2\dots}(y)$, $u_{123,n}^{pp_2p_3\dots}(y)$, $u_{13,n}^{pp_3\dots}(y)$ *при* $y \in \mathcal{V}(g_j^p)$, $j = 1, \dots, N_{p1}$, *суть линейные комбинации функций вида* $r^{i\lambda_{2,n}^{p_2}}(i\ln r)^q\varphi_{12,n,jq}^{pp_2\dots}(\omega)$, $r^{i\lambda_{3,n}^{p_3}}(i\ln r)^q\varphi_{123,n,jq}^{pp_2p_3\dots}(\omega)$, $r^{i\lambda_{3,n}^{p_3}}(i\ln r)^q\varphi_{13,n,jq}^{pp_3\dots}(\omega)$, $(\omega,\ r)$ — *полярные координаты с полюсом в точке* g_j^p; *наконец,* $u_1 \in H_{a_1}^{l+2m}\Big((\bigcup\limits_{j=1}^{N_{p1}}\mathcal{V}(g_j^p))\cap G\Big)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_{12,i\mu s}^{pp_2} = \{\mathcal{U}_{12,n,i\mu s}^{pp_2,(k,\zeta)}\}$, $\mathcal{U}_{123,i\mu s}^{pp_2p_3} = \{\mathcal{U}_{123,n,i\mu s}^{pp_2p_3,(k,\zeta)}\}$, $\mathcal{U}_{13,i\mu s}^{pp_3} = \{\mathcal{U}_{13,n,i\mu s}^{pp_3,(k,\zeta)}\}$, где $\mathcal{U}_{12,n,i\mu s}^{pp_2,(k,\zeta)}$, $\mathcal{U}_{123,n,i\mu s}^{pp_2p_3,(k,\zeta)}$, $\mathcal{U}_{13,n,i\mu s}^{pp_3,(k,\zeta)}$ — частные решения задачи (3.16), (3.17), рассматриваемой в $\prod\limits_{j=1}^{N_{p1}} K_j^p$, с правыми частями $\{0,\ -f_{2,n,i\mu s,j}^{p_2,(k,\zeta)}\}$, $\{0,\ -f_{23,n,i\mu s,j}^{p_2p_3,(k,\zeta)}\}$, $\{0,\ -f_{3,n,i\mu s,j}^{p_3,(k,\zeta)}\}$ соответственно, определяемые леммой 2.9 гл. 2.

Введем срезающую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\eta \subset \bigcap\limits_{j=1}^{N_{p1}} \mathcal{V}_j^p(0)$, равную единице в некоторой окрестности нуля. Положим

$$\mathcal{W} = \eta\Big(\mathcal{U} - \sum_{p_2,i,s} c_2^{p_2}\mathcal{U}_{12,i\mu s}^{pp_2} - \sum_{p_2,i,s}\sum_{p_3} c_3^{p_3}\mathcal{U}_{123,i\mu s}^{pp_2p_3} - \sum_{p_3,i,s} c_3^{p_3}\mathcal{U}_{13,i\mu s}^{pp_3}\Big),$$

где индексы изменяются так же, как в формуле (3.17). Распространим вектор-функцию $\mathcal{W}$ на $\prod\limits_{j=1}^{N_{p1}} K_j^p$, считая равной нулю вне носителя η. Используя формулу Лейбница, условие $0 < a - a_1 < 1$ и лемму 3.9 [16], легко проверить, что $\mathcal{L}_1^p\mathcal{W} \in H_{a_1}^{l,N}(K^p,\ \gamma^p)$; поэтому требуемый результат следует из теоремы 2.1 гл. 2. □

Отметим, что, согласно лемме 2.1 гл. 2, функции $\mathcal{U}_{1,n}^{p,(k,\zeta)}$, определяемые формулой (3.19), удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{L}_1^p U_{1,n}^{p,(k,\zeta)} = 0. \tag{3.20}$$

Функции $u_{12,n}^{pp_2\dots}$, $u_{123,n}^{pp_2p_3\dots}$, $u_{13,n}^{pp_3\dots}$ состоят (после соответствующей замены переменных $y \to y'(g_j^p)$ в окрестности точки g_j^p) из сумм частных решений $\mathcal{U}_{12,n\dots}^{pp_2\dots}$, $\mathcal{U}_{123,n\dots}^{pp_2p_3\dots}$, $\mathcal{U}_{13,n\dots}^{pp_3\dots}$ задачи (3.16), (3.17), рассматриваемой в $\prod\limits_{j=1}^{N_{p1}} K_j^p$, с правыми частями $\{0,\ -f_{2,n\dots}^{p_2\dots}\}$, $\{0,\ -f_{23,n\dots}^{p_2p_3\dots}\}$, $\{0,\ -f_{3,n\dots}^{p_3\dots}\}$ соответственно. Каждое частное решение единственно, если $\lambda_{2,n}^{p_2}$ (для решений

$\mathcal{U}^{pp_2\cdots}_{12,n\ldots}$) или $\lambda^{p_3}_{3,n}$ (для решений $\mathcal{U}^{pp_2p_3\cdots}_{123,n\ldots}$, $\mathcal{U}^{pp_3\cdots}_{13,n\ldots}$) не является собственным числом оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}^p_1(\lambda)$; в противном случае упомянутые решения определены с точностью до произвольной линейной комбинации степенных решений вида (3.19), отвечающих собственному числу $\lambda^{p_2}_{2,n}$ или соответственно $\lambda^{p_3}_{3,n}$ оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}^p_1(\lambda)$ (см. лемму 2.9 гл. 2). Далее будем считать фиксированными некоторые частные решения $\mathcal{U}^{pp_2\cdots}_{12,n\ldots}$, $\mathcal{U}^{pp_2p_3\cdots}_{123,n\ldots}$, $\mathcal{U}^{pp_3\cdots}_{13,n\ldots}$, а следовательно, и функции $u^{pp_2\cdots}_{12,n}$, $u^{pp_2p_3\cdots}_{123,n}$, $u^{pp_3\cdots}_{13,n}$.

Таким образом, асимптотика решения в окрестности $\mathcal{K}_1$ зависит от данных задачи в окрестности всего множества $\mathcal{K}$. При этом зависимость от данных в окрестности $\mathcal{K}_3$ возникает как за счет преобразований Ω_{is}, отображающих $\mathcal{K}_1$ непосредственно в $\mathcal{K}_3$, так и за счет преобразований, отображающих $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_2$ (а затем $\mathcal{K}_2$ в $\mathcal{K}_3$).

4. В дальнейшем нам будет удобно иметь асимптотическую формулу для решения $u \in H^{l+2m}_a(G)$ нелокальной задачи (3.1), (3.2) во всей области G. Для этого введем бесконечно гладкие функции η^{pj}, η^p_ν ($\nu = 2,\ 3$) с носителями в $\mathcal{V}(g^p_j)$, $\mathcal{V}(g^p_\nu)$, равные единице в некоторых окрестностях g^p_j, g^p_ν соответственно; положим также $\eta^p_1 = \sum\limits_{j=1}^{N_{p1}} \eta^{pj}$. Рассмотрим векторы

$$U^{p_1}_1 = \eta^{p_1}_1 u^{p_1}_1; \tag{3.21}$$

$$U^{p_2}_2 = \eta^{p_2}_2 u^{p_2}_2 + \sum_{p_1} \eta^{p_1}_1 u^{p_1p_2}_{12}, \tag{3.22}$$

где суммирование проводится по тем p_1, для которых найдется преобразование Ω_{is}, такое, что $\Omega^{-1}_{is}(h^{p_2}_2) \in \mathrm{Orb}_{p_1} \cap \bar{\Upsilon}_i$;

$$U^{p_3}_3 = \eta^{p_3}_3 u^{p_3}_3 + \sum_{p_1} \eta^{p_1}_1 u^{p_1p_3}_{13} + \sum_{p_2} \eta^{p_2}_2 u^{p_2p_3}_{23} + \sum_{p_2}\sum_{p_1} \eta^{p_1}_1 u^{p_1p_2p_3}_{123}, \tag{3.23}$$

где p_1 в первой сумме принимает те значения, для которых найдется преобразование Ω_{is}, такое, что $\Omega^{-1}_{is}(h^{p_3}_3) \in \mathrm{Orb}_{p_1} \cap \bar{\Upsilon}_i$; p_2 во второй и третьей суммах — те значения, для которых найдется преобразование Ω_{is}, такое, что $\Omega^{-1}_{is}(h^{p_3}_3) = h^{p_2}_2 \in \Upsilon_i$; наконец, p_1 в третьей сумме (при каждом фиксированном p_2) — те значения, для которых найдется преобразование Ω_{is}, такое, что $\Omega^{-1}_{is}(h^{p_2}_2) \in \mathrm{Orb}_{p_1} \cap \bar{\Upsilon}_i$.

Каждую из функций (3.21)–(3.23) распространим на всю область G, считая равной нулю вне носителя η^p_1, η^p_2, η^p_3 соответственно. Тогда из теорем 3.1–3.3 получим асимптотическое представление для $u \in H^{l+2m}_a(G)$, которое запишем в виде следующего сравнения

$$u \equiv \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{p=1}^{N_\nu} c_\nu^p U_\nu^p \, \Big(\mathrm{mod}\, H_{a_1}^{l+2m}(G)\Big). \tag{3.24}$$

Для дальнейшего отметим, что элементы вектор-функций (3.21)–(3.23) обладают следующим свойством:

$$\mathbf{L} U_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)} \in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon). \tag{3.25}$$

Свойство (3.25) проверяется при помощи формулы Лейбница, соотношений (3.6), (3.13), (3.20), условия $0 < a - a_1 < 1$, леммы 3.9 [16] и того, что функции $u_{23}^{p_2p_3}$ и $u_{12}^{p_1p_2}$, $u_{123}^{p_1p_2p_3}$, $u_{13}^{p_1p_3}$ суть частные решения задач (3.9), (3.10) и (3.16), (3.17) с правыми частями, которые получаются применением нелокальных операторов к функциям $u_3^{p_3}$ и $u_2^{p_2}$, $u_{23}^{p_2p_3}$, $u_3^{p_3}$ соответственно.

3.3 Индекс нелокальной задачи

1. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые свойства ядра, коядра и индекса оператора $\mathbf{L}$ нелокальной задачи (3.1), (3.2).

Лемма 3.1. *Пусть прямые* $\mathrm{Im}\,\lambda = h_1$, $\mathrm{Im}\,\lambda = h$ *свободны от спектра оператор–функций* $\tilde{\mathcal{L}}_\nu^p(\lambda)$ *(*$\nu = 1,\ 2,\ 3$*;* $p = 1,\ \dots,\ N_\nu$*), а в полосе* $h_1 < \mathrm{Im}\,\lambda < h$ *лежат собственные числа* $\lambda_{\nu,n}^p$ *этих оператор–функций и*

$$\varkappa = \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{p=1}^{N_\nu} \sum_{n,\zeta} \varkappa_{\zeta,\nu,n}^p$$

— сумма полных кратностей чисел $\lambda_{\nu,n}^p$. [2)]

Тогда однородная задача (3.1), (3.2) может иметь не более чем $\varkappa$ *решений из пространства* $H_a^{l+2m}(G)$*, линейно независимых по модулю пространства* $H_{a_1}^{l+2m}(G)$*.*

Доказательство. Упорядочим множество $\{U_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ так, чтобы сначала шли функции множества $\{U_{3,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ в произвольном порядке, потом — $\{U_{2,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ также в произвольном порядке и, наконец, — $\{U_{1,n}^{p,(k,\zeta)}\}$

[2)]Полная кратность собственного числа $\lambda_{\nu,n}^p$ равна $\sum\limits_{\zeta} \varkappa_{\zeta,\nu,n}^p$ (см. гл. 2 § 2.1).

в произвольном порядке; обозначим элементы этого множества через $U_1, \ \dots, \ U_\varkappa$. Согласно формуле (3.24), всякое решение $u_0 \in H_a^{l+2m}(G)$ однородной задачи (3.1), (3.2) удовлетворяет сравнению

$$u_0 \equiv \sum_{t=1}^{\varkappa} c_t U_t \, \Bigl(\operatorname{mod} H_{a_1}^{l+2m}(G)\Bigr), \tag{3.26}$$

где c_t — некоторые константы. □

Замечание 3.4. Для доказательства леммы 3.1 можно упорядочить множество $\{U_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ произвольным образом, однако в § 3.5, при вычислении коэффициентов асимптотики, такой порядок будет важен.

Введем вектор $U = (U_1, \ \dots, \ U_\varkappa)^T$ и вектор $Z = (Z_1, \ \dots, \ Z_d)^T$, $0 \le d \le \varkappa$, компоненты которого составляют максимальный набор решений однородной задачи (3.1), (3.2) из пространства $H_a^{l+2m}(G)$, линейно независимых по модулю пространства $H_{a_1}^{l+2m}(G)$ (базис по модулю $H_{a_1}^{l+2m}(G)$). В силу (3.26), $Z \equiv \mathbf{C}U \, \Bigl(\operatorname{mod} H_{a_1}^{l+2m}(G)\Bigr)$, где $\mathbf{C}$ — матрица размеров $d\times\varkappa$, ранг которой равен d. Будем считать, что $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1, \ \mathbf{C}_2)$, где $\mathbf{C}_1$ — невырожденная $(d\times d)$-матрица. Тогда $\mathbf{C}_1^{-1}Z \equiv (\mathbf{I}, \ \mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2)U \, \Bigl(\operatorname{mod} H_{a_1}^{l+2m}(G)\Bigr)$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Поэтому без ограничения общности можем предположить, что

$$Z_t \equiv \Bigl(U_t + \sum_{k=d+1}^{\varkappa} c_{tk} U_k\Bigr) \, \Bigl(\operatorname{mod} H_{a_1}^{l+2m}(G)\Bigr), \quad t = 1, \ \dots, \ d. \tag{3.27}$$

Базис вида (3.27) будем называть каноническим. В дальнейшем считаем фиксированным некоторый канонический базис.

2. Наряду с оператором $\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(y, \ D_y), \ \mathbf{B}_{i\mu}(y, \ D_y)\} : H_{a_1}^{l+2m}(G) \to H_{a_1}^{l}(G, \ \Upsilon)$ рассмотрим сопряженный оператор $\mathbf{L}^* : H_{a_1}^{l}(G, \ \Upsilon)^* \to H_{a_1}^{l+2m}(G)^*$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия леммы 3.1 и d — число элементов базиса по модулю пространства $H_{a_1}^{l+2m}(G)$ в пространстве решений из $H_a^{l+2m}(G)$ однородной задачи (3.1), (3.2). Тогда уравнение $\mathbf{L}^*\{v, \ w_{i\mu}\} = 0$ имеет $\varkappa - d$ решений из пространства $H_{a_1}^{l}(G, \ \Upsilon)^*$, линейно независимых по модулю $H_a^{l}(G, \ \Upsilon)^*$.*

Доказательство. 1) В силу соотношений (3.25), доказательство данной леммы аналогично доказательству предложения 3.2 [24, гл. 4]. Однако мы приведем это доказательство для полноты картины. Пусть $\{\varphi_t,\ \psi_t\}_{t=1}^q$ — какой-нибудь базис по модулю $H^l_a(G,\ \Upsilon)^*$ в пространстве решений из $H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)^*$ уравнения $\mathbf{L}^*\{v,\ w_{i\mu}\} = 0$.

Предположим, что $q < \varkappa - d$. Тогда найдется такая линейная комбинация $U = c_{d+1}U_{d+1} + \cdots + c_\varkappa U_\varkappa$, что

$$< \mathbf{L}U,\ \{\varphi_t,\ \psi_t\} >= 0, \quad t = 1,\ \ldots,\ q.$$

Здесь угловые скобки обозначают полуторалинейную форму на паре сопряженных пространств $H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)$ и $H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)^*$ (напомним, что, согласно (3.25), $\mathbf{L}U \in H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)$). Следовательно, существует решение $\hat{U} \in H^{l+2m}_{a_1}(G)$ уравнения $\mathbf{L}\hat{U} = \mathbf{L}U$. При этом функция $Z = U - \hat{U} \neq 0$ является решением из $H^{l+2m}_a(G)$ однородной задачи (3.1), (3.2) и удовлетворяет сравнению

$$Z \equiv \Big(\sum_{k=d+1}^{\varkappa} c_k U_k\Big)\ \Big(\operatorname{mod} H^{l+2m}_{a_1}(G)\Big). \tag{3.28}$$

Мы получили, что функция Z линейно независима по модулю $H^{l+2m}_{a_1}(G)$ от элементов $Z_1,\ \ldots,\ Z_d$ базиса (3.27). (Действительно, пусть $Z \equiv \Big(\sum\limits_{t=1}^{d} h_t Z_t\Big)\ \Big(\operatorname{mod} H^{l+2m}_{a_1}(G)\Big)$; тогда, в силу (3.27), имеем $Z \equiv \Big(\sum\limits_{t=1}^{d} h_t U_t + \sum\limits_{k=d+1}^{\varkappa}\big(\sum\limits_{t=1}^{d} h_t c_{kt}\big)U_k\Big)\ \Big(\operatorname{mod} H^{l+2m}_{a_1}(G)\Big)$. Отсюда, из (3.28) и из линейной независимости функций $U_1,\ \ldots,\ U_\varkappa$ по модулю пространства $H^{l+2m}_{a_1}(G)$ следует, что $h_1 = \cdots = h_d = 0$.) Это противоречие показывает, что $q \geq \varkappa - d$.

2) Допустим, что $q > \varkappa - d$. Обозначим через $\{\Phi_h,\ \Psi_h\}_{h=1}^q$ систему элементов пространства $H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)$, биортогональную системе $\{\varphi_t,\ \psi_t\}_{t=1}^q$ и ортогональную всем решениям уравнения $\mathbf{L}^*\{v,\ w_{i\mu}\} = 0$ из пространства $H^l_a(G,\ \Upsilon)^*$. Тогда существует решение $u_h \in H^{l+2m}_a(G)$ задачи $\mathbf{L}u_h = \{\Phi_h,\ \Psi_h\}$, $h = 1,\ \ldots,\ q$. Вычитая из u_h (если требуется) линейную комбинацию элементов $Z_1,\ \ldots,\ Z_d$ базиса (3.27), можно добиться, чтобы выполнялось сравнение

$$u_h \equiv \Big(\sum_{k=d+1}^{\varkappa} d_{hk} U_k\Big)\ \Big(\operatorname{mod} H^{l+2m}_{a_1}(G)\Big), \quad h = 1,\ \ldots,\ q. \tag{3.29}$$

Функции $u_1,\ \ldots,\ u_q$ линейно независимы по модулю пространства $H^{l+2m}_{a_1}(G)$. Действительно, в противном случае некоторая линейная комбинация функций u_h, $h = 1,\ \ldots,\ q$ принадлежала бы пространству

$H^{l+2m}_{a_1}(G)$. Тогда соответствующая линейная комбинация функций $\mathbf{L}u_h = \{\Phi_h,\ \Psi_h\}$, $h = 1,\ \ldots,\ q$, была бы ортогональна всем векторам $\{\varphi_t,\ \psi_t\}_{t=1}^{q}$, что противоречит выбору функций $\{\Phi_h,\ \Psi_h\}_{h=1}^{q}$. Из линейной независимости функций u_h и сравнений (3.29) следует, что $q \le \varkappa - d$. Таким образом, $q = \varkappa - d$. □

3. Рассмотрим операторы

$$\mathbf{L}_a = \{\mathbf{P}(y,\ D_y),\ \mathbf{B}_{i\mu}(y,\ D_y)\} : H^{l+2m}_{a}(G) \to H^{l}_{a}(G,\ \Upsilon),$$
$$\mathbf{L}_{a_1} = \{\mathbf{P}(y,\ D_y),\ \mathbf{B}_{i\mu}(y,\ D_y)\} : H^{l+2m}_{a_1}(G) \to H^{l}_{a_1}(G,\ \Upsilon).$$

То есть $\mathbf{L}_a$ и $\mathbf{L}_{a_1}$ — операторы одной и той же нелокальной задачи (3.1), (3.2), но действующие в пространствах с разными показателями веса. В следующей теореме мы по-прежнему считаем $a > a_1$, но не предполагаем, что $a - a_1 < 1$.

Теорема 3.4. *Пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = h_1$ *свободны от спектра оператор–функций* $\tilde{\mathcal{L}}^p_\nu(\lambda)$ *(*$\nu = 1,\ 2,\ 3$*;* $p = 1,\ \ldots,\ N_\nu$*). Тогда справедлива формула*

$$\operatorname{ind}\mathbf{L}_a = \operatorname{ind}\mathbf{L}_{a_1} + \varkappa.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $0 < a - a_1 < 1$ (иначе, в силу мероморфности оператор–функций $\tilde{\mathcal{R}}^p_\nu(\lambda)$, можно выбрать числа $a = a^0 > a^1 > \cdots > a^M = a_1$, такие, что $0 < a^i - a^{i+1} < 1$ и прямые $\operatorname{Im}\lambda = a^i + 1 - l - 2m$ не содержат полюсов $\tilde{\mathcal{R}}^p_\nu(\lambda)$).

По теореме 3.4 [30], операторы $\mathbf{L}_a$ и $\mathbf{L}_{a_1}$ фредгольмовы. [3)] В силу леммы 3.1, $\dim\ker\mathbf{L}_a = \dim\ker\mathbf{L}_{a_1} + d$, а, по лемме 3.2, $\dim\ker\mathbf{L}^*_a = \dim\ker\mathbf{L}^*_{a_1} - (\varkappa - d)$. Следовательно, $\operatorname{ind}\mathbf{L}_a = \dim\ker\mathbf{L}_a - \dim\ker\mathbf{L}^*_a = \dim\ker\mathbf{L}_{a_1} - \dim\ker\mathbf{L}^*_{a_1} + \varkappa = \operatorname{ind}\mathbf{L}_{a_1} + \varkappa$. □

3.4 Асимптотика решений сопряженной нелокальной задачи

1. В данном параграфе мы получим асимптотику решений сопряженной нелокальной задачи в окрестности точек множества $\mathcal{K}$. Результаты данного параграфа будут использованы для вычисления коэффициентов $c^{p,(k,j)}_{\nu,n}$ в формуле (3.24).

[3)] Точнее, мы пользуемся обобщением теоремы 3.4 [30] на случай, когда преобразования в окрестности точек множества $\mathcal{K}_1$ содержат не только поворот, но и растяжение; см. также [33].

Рассмотрим оператор $\mathbf{L}^*: H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)^* \to H^{l+2m}_{a_1}(G)^*$, сопряженный с оператором $\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(y,\ D_y),\ \mathbf{B}_{i\mu}(y,\ D_y)\}: H^{l+2m}_{a_1}(G) \to H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)$. Оператор $\mathbf{L}^*$ действует на элемент $\{v,\ w_{i\mu}\} \in H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)^*$ по формуле

$$< u,\ \mathbf{L}^*\{v,\ w_{i\mu}\} >=< \mathbf{P}(y,\ D_y)u,\ v >_G + \\ + \sum_{i=1}^{N_0}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{s=0}^{S_i} < (B_{i\mu s}(y,\ D_y)u)(\Omega_{is}(y))|_{\Upsilon_i},\ w_{i\mu} >_{\Upsilon_i}\ ^{4)} \quad (3.30)$$

для всех $u \in H^{l+2m}_{a_1}(G)$.

Введем следующее обозначение: для всякой гладкой кривой $\Upsilon \subset \bar{G}$ и распределения $w \in H^{k-1/2}_{a_1}(\Upsilon)^*$ обозначим через $w \otimes \delta_\Upsilon$ распределение из $H^k_{a_1}(G)^*$, действующее по формуле

$$< u,\ w \otimes \delta_\Upsilon >_G=< u|_\Upsilon,\ w >_\Upsilon \text{ для всех } u \in H^k_{a_1}(G). \quad (3.31)$$

Тогда оператор $\mathbf{L}^*: H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)^* \to H^{l+2m}_{a_1}(G)^*$, очевидно, задается формулой

$$\mathbf{L}^*\{v,\ w_{i\mu}\} = \mathbf{P}^*(y,\ D_y)v + \sum_{i=1}^{N_0}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{s=0}^{S_i} B^*_{i\mu s}(y,\ D_y)(w^\Omega_{i\mu s} \otimes \delta_{\Upsilon_{is}}). \quad (3.32)$$

Здесь $\mathbf{P}^*(y,\ D_y)$, $B^*_{i\mu s}(y,\ D_y)$ — операторы, формально сопряженные с $\mathbf{P}(y,\ D_y)$, $B_{i\mu s}(y,\ D_y)$ соответственно; $\Upsilon_{is} = \Omega_{is}(\Upsilon_i)$ (в частности, $\Upsilon_{i0} = \Upsilon_i$); наконец, $w^\Omega_{i\mu s} \in H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}_{a_1}(\Upsilon_{is})^*$ — распределение, действующее по формуле

$$< \psi,\ w^\Omega_{i\mu s} >_{\Upsilon_{is}}=< \psi(\Omega_{is}y),\ w_{i\mu} >_{\Upsilon_i} \text{ для всех } \psi \in H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}_{a_1}(\Upsilon_{is}) \quad (3.33)$$

(в частности, $w^\Omega_{i\mu 0} = w_{i\mu}$). Действительно, используя определение (3.30) сопряженного оператора $\mathbf{L}^*$, а затем последовательно соотношения (3.33) и (3.31), получим

$$< u,\ \mathbf{L}^*\{v,\ w_{i\mu}\} >=< u,\ \mathbf{P}(y,\ D_y)^*v >_G + \\ + \sum_{i=1}^{N_0}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{s=0}^{S_i} < B_{i\mu s}(y,\ D_y)u|_{\Upsilon_{is}},\ w^\Omega_{i\mu s} >_{\Upsilon_{is}}=< u,\ \mathbf{P}(y,\ D_y)^*v+ \\ + \sum_{i=1}^{N_0}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{s=0}^{S_i} B_{i\mu s}(y,\ D_y)^*(w^\Omega_{i\mu s} \otimes \delta_{\Upsilon_{is}}) >_G$$

[4)] В данном параграфе будем для наглядности обозначать полуторалинейные формы на парах сопряженных пространств $H^k_{a_1}(G)$, $H^k_{a_1}(G)^*$ и $H^{k-1/2}_{a_1}(\Upsilon_i)$, $H^{k-1/2}_{a_1}(\Upsilon_i)^*$ соответственно через $< \cdot,\ \cdot >_G$ и $< \cdot,\ \cdot >_{\Upsilon_i}$.

для всех $u \in H_{a_1}^{l+2m}(G)$, откуда и следует (3.32).

Будем изучать асимптотику решений задачи

$$\mathbf{L}^*\{v,\ w_{i\mu}\} = \Psi, \tag{3.34}$$

полагая, что $\{v,\ w_{i\mu}\} \in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)^*$, а $\Psi \in H_a^{l+2m}(G)^*$.

Для этого наряду с оператором $\mathbf{L}^*$ рассмотрим вспомогательный оператор $\mathbf{L}_\Omega^* : H_{a_1}^l(G)^* \times \prod\limits_{i=1}^{N_0}\prod\limits_{\mu=1}^{m}\prod\limits_{s=0}^{S_i} H_{a_1}^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_{is})^* \to H_{a_1}^{l+2m}(G)^*$, действующий по формуле

$$\mathbf{L}_\Omega^*\{v,\ w_{i\mu s}\} = \mathbf{P}^*(y,\ D_y)v + \sum_{i=1}^{N_0}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{s=0}^{S_i} B_{i\mu s}^*(y,\ D_y)(w_{i\mu s} \otimes \delta_{\Upsilon_{is}})$$

(ср. с вспомогательным оператором $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\theta)^*$ в § 1.9 гл. 1). Отметим, что оператор $\mathcal{L}_\Omega^*$ является “локальным”, поскольку распределения $w_{i\mu 0}$ и $w_{i\mu s}$, $s > 0$, между собой никак не связаны (в отличие от распределений $w_{i\mu}$ и $w_{i\mu s}^\Omega$, $s > 0$, фигурирующих в определении нелокального оператора $\mathcal{L}_\Omega^*$).

Очевидно, $\mathbf{L}^*\{v,\ w_{i\mu}\} = \mathbf{L}_\Omega^*\{v,\ w_{i\mu s}^\Omega\}$, и, следовательно, $\{v,\ w_{i\mu s}^\Omega\}$ удовлетворяет задаче

$$\mathbf{L}_\Omega^*\{v,\ w_{i\mu s}^\Omega\} = \Psi. \tag{3.35}$$

Изучив асимптотику решения $\{v,\ w_{i\mu s}^\Omega\}$ “локальной” задачи (3.35), мы тем самым получим асимптотику решения $\{v,\ w_{i\mu}\} = \{v,\ w_{i\mu 0}^\Omega\}$ нелокальной задачи (3.34). При этом, благодаря “локальности” оператора $\mathbf{L}_\Omega^*$, исследуя асимптотику решения $\{v,\ w_{i\mu s}^\Omega$ соответствующего уравнения (3.35), мы можем применить метод срезающих функций (метод разбиения единицы).

Асимптотику решений вспомогательной сопряженной задачи (3.35) начнем изучать (в отличие от исходной задачи) с точек множества $\mathcal{K}_1$. Зафиксируем некоторую орбиту $\mathrm{Orb}_p \subset \mathcal{K}_1$ $(p = 1,\ \ldots,\ N_1)$. Используя срезающую функцию η_1^p с носителем, сосредоточенным вблизи орбиты Orb_p, сведем изучение задачи вблизи Orb_p к изучению соответствующей модельной нелокальной задачи в плоских углах. Далее, используя асимптотику решения модельной задачи в углах (см. § 2.3 гл. 2), получим асимптотику решений задачи в ограниченной области вблизи орбиты Orb_p.

Итак, имеем

$$\mathbf{L}_\Omega^*\eta_1^p\{v,\ w_{i\mu s}^\Omega\} = \mathbf{P}^*(y,\ D_y)\eta_1^p v + \sum_{i,\mu,s} B_{i\mu s}^*(y,\ D_y)(\eta_1^p w_{i\mu s}^\Omega \otimes \delta_{\Upsilon_{is}}),$$

где суммирование проводится по тем i, s, для которых $\bar{\Upsilon}_{is} \cap \mathrm{Orb}_p \neq \varnothing$; μ здесь и далее принимает значения $1, \ \dots, \ m$. С другой стороны, из формулы Лейбница, равенства (3.35) и условия $0 < a - a_1 < 1$ вытекает, что $\mathbf{L}_\Omega^* \eta_1^p \{v, \ w_{i\mu s}^\Omega\} = \eta_1^p \Psi + \hat{\Psi}_0$, где $\hat{\Psi}_0 \in H_a^{l+2m}(G)^*$ и $\operatorname{supp} \hat{\Psi}_0 \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N_{p1}} \mathcal{V}(g_j^p)$. Таким образом, $\eta_1^p\{v, \ w_{i\mu s}^\Omega\}$ удовлетворяет задаче

$$\mathbf{P}^*(y, \ D_y)\eta_1^p v + \sum_{i,\mu,s} B_{i\mu s}^*(y, \ D_y)(\eta_1^p w_{i\mu s}^\Omega \otimes \delta_{\Upsilon_{is}}) = \hat{\Psi}, \tag{3.36}$$

где $\hat{\Psi} = \eta_1^p \Psi + \hat{\Psi}_0 \in H_a^{l+2m}(G)^*$ и $\operatorname{supp} \hat{\Psi} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N_{p1}} \mathcal{V}(g_j^p)$.

Пусть $y \mapsto y'(g_j^p)$ — преобразование координат, описанное в § 3.1 и переводящее $\mathcal{V}(g_j^p) \cap G$ в $\mathcal{V}_j^p(0) \cap K_j^p$. Введем распределение $\mathcal{V}_j \in H_{a_1}^{l+2m}(K_j^p)^*$ по формуле

$$< \mathcal{U}(y'), \ \mathcal{V}_j >_{K_j^p} = < \eta^{pj} \mathcal{U}(y'(y)), \ v >_G$$

для всех $\mathcal{U} \in H_{a_1}^{l+2m}(K_j^p)$, где $\mathcal{U}(y'(y))$ считаем равной нулю вне $\mathcal{V}(g_j^p)$. Далее, если $g_j^p \in \bar{\Upsilon}_{is}$ и преобразование координат $y \mapsto y'(g_j^p)$ переводит $\mathcal{V}(g_j^p) \cap \Upsilon_{is}$ в $\mathcal{V}_j^p(0) \cap \gamma_{j\sigma}^p$, повернутое на угол $\omega_{j\sigma ks}^p$, то введем распределение $\mathcal{W}_{j\sigma\mu ks}^{\mathcal{G}} \in H_{a_1}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}^p-1/2}(\gamma_{j\sigma ks}^p)^*$ по формуле

$$< \psi(y'), \ \mathcal{W}_{j\sigma\mu ks}^{\mathcal{G}} >_{\gamma_{j\sigma ks}^p} = < \eta^{pj} \psi(y'(y)), \ w_{i\mu s}^\Omega >_{\Upsilon_{is}}$$

для всех $\psi \in H_{a_1}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}^p-1/2}(\gamma_{j\sigma ks}^p)$, где $m_{j\sigma\mu}^p = m_{i\mu}$; $\gamma_{j\sigma ks}^p$ — луч, в который переходит $\gamma_{j\sigma}^p$ после поворота на угол $\omega_{j\sigma ks}^p$; $\psi(y'(y))$ считаем равной нулю вне $\mathcal{V}(g_j^p)$.

Легко видеть, что распределения $\mathcal{W}_{j\sigma\mu ks}^{\mathcal{G}}$ определяются также через $\mathcal{W}_{j\sigma\mu} \equiv \mathcal{W}_{j\sigma\mu j0}^{\mathcal{G}}$:

$$< \psi, \ \mathcal{W}_{j\sigma\mu ks}^{\mathcal{G}} >_{\gamma_{j\sigma ks}^p} = < \psi(\mathcal{G}_{j\sigma ks}^p y'), \ \mathcal{W}_{j\sigma\mu} >_{\gamma_{j\sigma}^p} \tag{3.37}$$

для всех $\psi \in H_{a_1}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}^p-1/2}(\gamma_{j\sigma ks}^p)$, где $\mathcal{G}_{j\sigma ks}^p$ — оператор поворота на угол $\omega_{j\sigma ks}^p$ и растяжения в $\beta_{j\sigma ks}^p > 0$ раз.

Таким образом, в силу условия 3.3, задача (3.36) примет вид

$$\begin{gathered}(\mathcal{P}_j^p)^*(y', \ D_{y'})\mathcal{V}_j + \sum_{\sigma,\mu,k,s} (B_{j\sigma\mu ks}^p)^*(y', \ D_{y'})(\mathcal{W}_{j\sigma\mu ks}^{\mathcal{G}} \otimes \delta_{\gamma_{j\sigma ks}^p}) = \hat{\Psi}_j, \\ j = 1, \ \dots, \ N_{p1}.\end{gathered} \tag{3.38}$$

Здесь $(\mathcal{P}_j^p)^*(y',\ D_{y'})$, $(B^p_{j\sigma\mu ks})^*(y',\ D_{y'})$ формально сопряжены с $\mathcal{P}_j^p(y',\ D_{y'})$, $B^p_{j\sigma\mu ks}(y',\ D_{y'})$ (см. § 3.2, п. 3); $\hat{\Psi}_j \in H_a^{l+2m}(K_j^p)^*$ — распределение, действующее по формуле

$$<\mathcal{U}(y'),\ \hat{\Psi}_j>_{K_j^p}=<\hat{\eta}^{pj}\mathcal{U}(y'(y)),\ \hat{\Psi}>_G \ \text{для всех}\ \mathcal{U}\in H_{a_1}^{l+2m}(K_j^p),$$

где $\hat{\eta}^{pj}$ — бесконечно гладкая функция, равная единице на $\operatorname{supp}\hat{\Psi}\cap\mathcal{V}(g_j^p)$ и нулю вне $\mathcal{V}(g_j^p)$, $\mathcal{U}(y'(y))$ считаем равной нулю вне $\mathcal{V}(g_j^p)$; суммирование в (3.38) проводится следующим образом: $\sigma = 1,\ 2$; $\mu = 1,\ \ldots,\ m$; $k = 1,\ \ldots,\ N_{p1}$; $s = 0,\ \ldots,\ S^p_{j\sigma k}$.

Теперь переобозначим y' через y. Пусть $(\mathcal{P}_j^p)^*(D_y)$, $(B^p_{j\sigma\mu ks})^*(D_y)$ — главные однородные части операторов $(\mathcal{P}_j^p)^*(0,\ D_y)$, $(B^p_{j\sigma\mu ks})^*(0,\ D_y)$ соответственно. Используя соотношение $0 < a - a_1 < 1$, перепишем задачу (3.38) в виде

$$(\mathcal{P}_j^p)^*(D_y)\mathcal{V}_j + \sum_{\sigma,\mu,k,s}(B^p_{j\sigma\mu ks})^*(D_y)(\mathcal{W}^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu ks}\otimes\delta_{\gamma^p_{j\sigma ks}}) = \Psi_j,$$
$$j = 1,\ \ldots,\ N_{p1},$$

где $\Psi_j \in H_a^l(K_j^p)^*$. Отсюда и из соотношений (3.37) следует, что $\{\mathcal{V}_j,\ \mathcal{W}_{j\sigma\mu}\} \in H_{a_1}^{l,\,N}(K^p,\ \gamma^p)^*$ (напомним: $\mathcal{W}_{j\sigma\mu} = \mathcal{W}^{\mathcal{G}}_{j\sigma\mu j0}$) является решением задачи

$$(\mathcal{L}_1^p)^*\{\mathcal{V}_j,\ \mathcal{W}_{j\sigma\mu}\} = \{\Psi_j\} \tag{3.39}$$

с правой частью $\{\Psi_j\} \in H_a^{l+2m,\,N}(K^p)^*$. Здесь $(\mathcal{L}_1^p)^* : H_{a_1}^{l,\,N}(K^p,\ \gamma^p)^* \to H_{a_1}^{l+2m,\,N}(K^p)^*$ — оператор, сопряженный с оператором $\mathcal{L}_1^p = \{\mathcal{P}_j^p(D_y),\ \mathcal{B}^p_{j\sigma\mu}(D_y)\} : H_{a_1}^{l+2m,\,N}(K^p) \to H_{a_1}^{l,\,N}(K^p,\ \gamma^p)$.

Обозначим $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}\} = \{\mathcal{V}_j,\ \mathcal{W}_{j\sigma\mu}\}$. Так как $\operatorname{supp}\Psi_j \subset \mathcal{V}_j^p(0)$, имеем $\{\Psi_j\} \in H_a^{l+2m,\,N}(K^p)^* \cap H_{a_1}^{l+2m,\,N}(K^p)^*$. Следовательно, мы можем применить теорему 2.3 гл. 2, согласно которой

$$\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}\} \equiv d_1^p\{\mathcal{V}_1^p,\ \mathcal{W}_1^p\}\ \Big(\operatorname{mod} H_a^{l,\,N}(K^p,\ \gamma^p)^*\Big). \tag{3.40}$$

Здесь $d_1^p = \{d_{1,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ — вектор констант, $\{\mathcal{V}_1^p,\ \mathcal{W}_1^p\} = \{\mathcal{V}_{1,n}^{p,(k,\zeta)},\ \mathcal{W}_{1,n}^{p,(k,\zeta)}\}$,

$$\begin{gathered}\{\mathcal{V}_{1,n}^{p,(k,\zeta)},\ \mathcal{W}_{1,n}^{p,(k,\zeta)}\} = \Big\{r^{i\bar{\lambda}^p_{1,n}+2m-2}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_{1,n}^{p,(\nu-q,\zeta)},\\ \overrightarrow{r^{i\bar{\lambda}^p_{1,n}+m^p-1}}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^\nu\chi_{1,n}^{p,(\nu-q,\zeta)}\Big\}\end{gathered} \tag{3.41}$$

— степенные решения однородной задачи (3.39), причем $\psi_{1,n}^{p,(q,\zeta)} = \{\psi_{1,n,j}^{p,(q,\zeta)}\}$, $\overrightarrow{r^{i\bar\lambda_{1,n}^p+m^p-1}} = \{r^{i\bar\lambda_{1,n}^p+m_{j\sigma\mu}^p-1}\}$, $\chi_{1,n}^{p,(q,\zeta)} = \{\chi_{1,n,j\sigma\mu}^{p,(q,\zeta)}\}$, где

$$\Big\{\{\psi_{1,n}^{p,(0,\zeta)},\ \chi_{1,n}^{p,(0,\zeta)}\},\ \dots,\ \{\psi_{1,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,1,n}^p-1,\zeta)},\ \chi_{1,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,1,n}^p-1,\zeta)}\}:\ \zeta=1,\ \dots,\ J_{1,n}^p\Big\}$$

— жордановы цепочки оператора $(\tilde{\mathcal{L}}_1^p)^*(\lambda)$, сопряженного с $\tilde{\mathcal{L}}_1^p(\bar\lambda)$, отвечающие числу $\bar\lambda_{1,n}^p$ и составляющие каноническую систему (см. § 2.1 гл. 2).

Используя сравнение (3.40), получим следующий результат об асимптотике решений уравнения (3.34) в окрестности Orb_p.

Теорема 3.5. *Пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = h_1$, $\operatorname{Im}\lambda = h$ *свободны от спектра оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}_1^p(\lambda)$, *а в полосе* $h_1 < \operatorname{Im}\lambda < h$ *лежат собственные числа* $\lambda_{1,n}^p$ *этой оператор-функции. Тогда для решения* $\{v,\ w_{i\mu}\} \in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)^*$ *уравнения (3.34) с правой частью* $\Psi \in H_a^{l+2m}(G)^*$ *справедливо сравнение*

$$\eta_1^p\{v,\ w_{i\mu}\} \equiv d_1^p\eta_1^p\{v_1^p,\ w_{1,i\mu}^p\}\ \Big(\operatorname{mod} H_a^l(G,\ \Upsilon)^*\Big), \tag{3.42}$$

где $d_1^p = \{d_{1,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ *— вектор констант,* $\{v_1^p,\ w_{1,i\mu}^p\}$ *в окрестности* $\mathcal{V}(g_j^p)$ *представляет собой вектор, в который переходит* $\{\mathcal{V}_1^p,\ \mathcal{W}_1^p\}$ *при обратной замене переменных* $y' \mapsto y(g_j^p)$.

2. Теперь зафиксируем точку $h_2^p \in \mathcal{K}_2$ $(p = 1,\ \dots,\ N_2)$. Пусть $h_2^p \in \Upsilon_i$. Используя срезающую функцию η_2^p с носителем, сосредоточенным вблизи точки h_2^p, сведем изучение задачи вблизи h_2^p к изучению соответствующей модельной задачи в плоском угле раствора π. При этом, за счет наличия нелокальных преобразований, в правой части соответствующего уравнения возникнут "негладкие" распределения, содержащие $w_{i_1\mu s}^\Omega$. Однако, согласно (3.33), асимптотика распределения $w_{i_1\mu s}^\Omega$ вблизи точки h_2^p определяется уже изученной в предыдущем пункте асимптотикой распределения $w_{i_1\mu}$ вблизи точки $g_1^{p_1} = \Omega_{i_1 s}^{-1}(h_2^p)$.

Далее, используя асимптотику решения модельной задачи в угле со специальной правой частью (см. лемму 3.3 настоящего параграфа и теорему 5.7 [24, гл. 3]), получим асимптотику решений задачи в ограниченной области вблизи точки h_2^p.

Итак, имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_\Omega^*\eta_2^p\{v,\ w_{i\mu s}^\Omega\} = \mathbf{P}^*(y,\ D_y)\eta_2^p v + \\ +\sum_\mu B_{i\mu 0}^*(y,\ D_y)(\eta_2^p w_{i\mu 0}^\Omega \otimes \delta_{\Upsilon_i}) + \sum_{i_1,\mu,s} B_{i_1\mu s}^*(y,\ D_y)(\eta_2^p w_{i_1\mu s}^\Omega \otimes \delta_{\Upsilon_{i_1 s}}),\end{gathered}$$

где суммирование проводится по тем $i_1,\ s\neq 0$, для которых $h_2^p\in\bar{\Upsilon}_{i_1s}$. С другой стороны, из формулы Лейбница, равенства (3.35) и условия $0<a-a_1<1$ вытекает, что $\mathbf{L}^*_\Omega\eta_2^p\{v,\ w^\Omega_{i\mu s}\}=\eta_2^p\Psi+\hat{\Psi}_0$, где $\hat{\Psi}_0\in H_a^{l+2m}(G)^*$ и $\operatorname{supp}\hat{\Psi}_0\subset\mathcal{V}(h_2^p)$. Таким образом, $\eta_2^p\{v,\ w^\Omega_{i\mu s}\}$ удовлетворяет задаче

$$\begin{gathered}\mathbf{P}^*(y,\ D_y)\eta_2^p v+\sum_\mu B^*_{i\mu 0}(y,\ D_y)(\eta_2^p w^\Omega_{i\mu 0}\otimes\delta_{\Upsilon_i})=\\ =-\sum_{i_1,\mu,s}B^*_{i_1\mu s}(y,\ D_y)(\eta_2^p w^\Omega_{i_1\mu s}\otimes\delta_{\Upsilon_{i_1s}})+\hat{\Psi},\end{gathered}\tag{3.43}$$

где $\hat{\Psi}=\eta_2^p\Psi+\hat{\Psi}_0\in H_a^{l+2m}(G)^*$ и $\operatorname{supp}\hat{\Psi}\subset\mathcal{V}(h_2^p)$.

Рассмотрим слагаемые, стоящие под знаком суммы в правой части равенства. Пусть $\Omega^{-1}_{i_1s}(h_2^p)\in\mathrm{Orb}_{p_1}$. Тогда, в силу (3.33) и теоремы 3.5, распределение $w^\Omega_{i_1\mu s}$ удовлетворяет сравнению

$$\eta_2^p w^\Omega_{i_1\mu s}\equiv d_1^{p_1}\eta_2^p(w^\Omega)^{p_1}_{1,i_1\mu s}\ \left(\operatorname{mod}H_a^{l+2m-m_{i_1\mu}-1/2}(\Upsilon_{i_1s})^*\right),$$

где $(w^\Omega)^{p_1}_{1,i_1\mu s}=\{(w^\Omega)^{p_1,(k,\zeta)}_{1,n,i_1\mu s}\}$, $(w^\Omega)^{p_1,(k,\zeta)}_{1,n,i_1\mu s}$ — линейная комбинация функций вида $r^{i\bar{\lambda}^{p_1}_{1,n}+m_{i_1\mu}-1}(i\ln r)^q$, r — полярный радиус системы координат с полюсом в точке h_2^p. Поэтому, обозначая через $B^*_{i_1\mu s}(D_y)$ главную однородную часть оператора $B^*_{i_1\mu s}(h_2^p,\ D_y)$ и используя формулу Лейбница и условие $0<a-a_1<1$, получим

$$\begin{aligned}&B^*_{i_1\mu s}(y,\ D_y)(\eta_2^p w^\Omega_{i_1\mu s}\otimes\delta_{\Upsilon_{i_1s}})\equiv\\ &\qquad\equiv\eta_2^p d_1^{p_1}B^*_{i_1\mu s}(D_y)((w^\Omega)^{p_1}_{1,i_1\mu s}\otimes\delta_{\Upsilon_{i_1s}})\left(\operatorname{mod}H_a^{l+2m}(G)^*\right)\equiv\\ &\qquad\qquad\equiv\eta_2^p d_1^{p_1}\Psi^{p_1}_{1,i_1\mu s}\ \left(\operatorname{mod}H_a^{l+2m}(G)^*\right),\end{aligned}$$

где $\Psi^{p_1}_{1,i_1\mu s}=\{\Psi^{p_1,(k,\zeta)}_{1,n,i_1\mu s}\}$, $\Psi^{p_1\dots}_{1,n\dots}$ есть, в силу условия 3.3, линейная комбинация функций вида $r^{i\bar{\lambda}^{p_1}_{1,n}-2}(i\ln r)^q\Psi^{p_1\dots}_{1,n\dots q}$, $\Psi^{p_1\dots}_{1,n\dots q}\in W^{l+2m}(-\pi/2,\ \pi/2)^*$, r — полярный радиус системы координат с полюсом в точке h_2^p и полярной осью, направленной перпендикулярно границе ∂G внутрь области. [5)]

[5)]Распределение вида $r^{i\bar{\lambda}^{p_1}_{1,n}-2}(i\ln r)^q\Psi^{p_1\dots}_{1,n\dots q}$ действует на $u\in H_{a_1}^{l+2m}(K_{\pi/2})$ по формуле

$$<u,\ r^{i\bar{\lambda}^{p_1}_{1,n}-2}(i\ln r)^q\Psi^{p_1\dots}_{1,n\dots q}>=\int_0^\infty<u(\cdot,\ r),\ \Psi^{p_1\dots}_{1,n\dots q}>_{(-\pi/2,\ \pi/2)}\overline{r^{i\bar{\lambda}^{p_1}_{1,n}-2}(i\ln r)^q}\,r\,dr.$$

Обозначим через $\mathcal{P}^*(D_y)$, $\mathcal{B}^*_{i\mu 0}(D_y)$ главные однородные части операторов $\mathbf{P}^*(h_2^p,\ D_y)$, $B^*_{i\mu 0}(h_2^p,\ D_y)$. Тогда с учетом сказанного уравнение (3.43) примет вид

$$\mathcal{P}^*(D_y)\eta_2^p v + \sum_{\mu} B^*_{i\mu 0}(D_y)(\eta_2^p w^{\Omega}_{i\mu 0} \otimes \delta_{\Upsilon_i}) = -\eta_2^p \sum_{p_1=1}^{N_1} \sum_{i_1,\mu,s} d_1^{p_1} \Psi^{p_1}_{1,i_1\mu s} + \hat{\Phi},$$

где $\hat{\Phi} \in H_a^{l+2m}(G)^*$ (в силу условия $0 < a - a_1 < 1$) и $\operatorname{supp}\hat{\Phi} \subset \mathcal{V}(h_2^p)$; суммирование проводится по тем $i_1,\ s$, для которых $\Omega^{-1}_{i_1 s}(h_2^p) \in \mathrm{Orb}_{p_1} \cap \bar{\Upsilon}_{i_1}$. Обозначим $w = (w^{\Omega}_{i10},\ \ldots,\ w^{\Omega}_{im0}) = (w_{i1},\ \ldots,\ w_{im})$ (i фиксировано). Тогда $\eta_2^p\{v,\ w\} \in H^l_{a_1}(K_{\pi/2},\ \gamma)^*$ и является решением задачи

$$(\mathcal{L}_2^p)^* \eta_2^p \{v,\ w\} = -\eta_2^p \sum_{p_1=1}^{N_1} \sum_{i_1,\mu,s} d_1^{p_1} \Psi^{p_1}_{1,i_1\mu s} + \hat{\Phi}, \tag{3.44}$$

где $(\mathcal{L}_2^p)^* : H^l_{a_1}(K_{\pi/2},\ \gamma)^* \to H^{l+2m}_{a_1}(K_{\pi/2})^*$ — оператор, сопряженный с $\mathcal{L}_2^p : H^{l+2m}_{a_1}(K_{\pi/2}) \to H^l_{a_1}(K_{\pi/2},\ \gamma)$. (Напомним, что $K_{\pi/2} = \{y : r > 0,\ |\omega| < \pi/2\}$ — развернутый угол со сторонами $\gamma_j = \{y : \omega = (-1)^j \pi/2\}$, $j = 1,\ 2$; $(\omega,\ r)$ — полярные координаты с полюсом в точке h_2^p и полярной осью, направленной перпендикулярно границе ∂G внутрь области.)

Для вывода асимптотики решения задачи (3.44) нам понадобится лемма о решениях задачи (3.44) со специальной правой частью. Введем оператор $(\tilde{\mathcal{L}}_2^p)^*(\lambda)$, сопряженный с оператором $\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\bar{\lambda})$.

Пусть Λ — некоторое комплексное число. Если $\bar{\Lambda}$ — собственное число оператор–функции $(\tilde{\mathcal{L}}_2^p)^*(\lambda)$, то обозначим

$$\begin{aligned}\{v^{(k,\zeta)},\ w^{(k,\zeta)}\} = \{r^{i\bar{\Lambda}+2m-2} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}(i \ln r)^q \psi^{(k-q,\zeta)},\\ r^{i\bar{\Lambda}+m_{i\mu}-1} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}(i \ln r)^q \chi^{(k-q,\zeta)}\},\end{aligned} \tag{3.45}$$

где

$$\Big\{\{\psi^{(0,\zeta)},\ \chi^{(0,\zeta)}\},\ \ldots,\ \{\psi^{(\varkappa_\zeta-1,\zeta)},\ \chi^{(\varkappa_\zeta-1,\zeta)}\} :\ \zeta = 1,\ \ldots,\ J\Big\}$$

— каноническая система жордановых цепочек оператор–функции $(\tilde{\mathcal{L}}_2^p)^*(\lambda)$, отвечающая числу $\bar{\Lambda}$. Векторы (3.45) являются решениями уравнения $(\mathcal{L}_2^p)^*\{v,\ w\} = 0$ (подробнее см. [24, гл. 3]). Пусть $\varkappa(\bar{\Lambda}) = \max\{\varkappa_\zeta\}$ — наибольшая из частных кратностей этого числа. Если $\bar{\Lambda}$ не является собственным числом оператор–функции $(\tilde{\mathcal{L}}_2^p)^*(\lambda)$, то положим $\varkappa(\bar{\Lambda}) = 0$.

Лемма 3.3. *Уравнение (3.44) с правой частью*

$$r^{i\bar{\Lambda}-2}\sum_{q=0}^{M}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\Psi_q,$$

$\Psi_q \in W^{l+2m}(-\pi/2,\ \pi/2)^*$, *имеет решение вида*

$$\{r^{i\bar{\Lambda}+2m-2}\sum_{q=0}^{M+\varkappa(\bar{\Lambda})}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q v_q,\ r^{i\bar{\Lambda}+m_{i\mu}-1}\sum_{q=0}^{M+\varkappa(\bar{\Lambda})}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q w_q\},\qquad (3.46)$$

где $\{v_q,\ w_q\} \in W^l[-\pi/2,\ \pi/2]^*$. *Решение такого вида единственно, если* $\varkappa(\bar{\Lambda}) = 0$ *(то есть, если* $\bar{\Lambda}$ *— не является собственным числом* $(\tilde{\mathcal{L}}_2^p)^*(\lambda)$*), а при* $\varkappa(\bar{\Lambda}) > 0$ *решение (3.46) определено с точностью до произвольной линейной комбинации степенных решений (3.45), отвечающих числу* $\bar{\Lambda}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 [24, гл. 3]. Необходимо подставить формулу (3.46) для искомого решения в уравнение

$$(\mathcal{L}_2^p)^*\{v,\ w\} = r^{i\bar{\Lambda}-2}\sum_{q=0}^{M}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\Psi_q,$$

сократить слева и справа множитель $r^{i\bar{\Lambda}-2}$ и собрать коэффициенты при одинаковых степенях $i\ln r$. В результате получится система $M + \varkappa(\bar{\Lambda})$ уравнений, из которой и определяются неизвестные $\{v_q,\ w_q\}$. Утверждение о том, что решение вида (3.46) единственно, если $\varkappa(\bar{\Lambda}) = 0$, или определено с точностью до произвольной линейной комбинации функций (3.45), если $\varkappa(\bar{\Lambda}) > 0$, следует из леммы 1.3 [24, гл. 3], ограничивающей произвол в выборе степенных решений уравнения $(\mathcal{L}_2^p)^*\{v,\ w\} = 0$. □

Теорема 3.6. *Пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = h_1$, $\operatorname{Im}\lambda = h$ *свободны от спектра оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}_2^p(\lambda)$, *а в полосе* $h_1 < \operatorname{Im}\lambda < h$ *лежат собственные числа* $\lambda_{2,n}^p$ *этой оператор-функции. Тогда для решения* $\{v,\ w_{i\mu}\} \in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)^*$ *уравнения (3.34) с правой частью* $\Psi \in H_a^{l+2m}(G)^*$ *справедливо сравнение*

$$\eta_2^p\{v,\ w_{i\mu}\} \equiv \left(d_2^p\eta_2^p\{v_2^p,\ w_{2,i\mu}^p\} + \sum_{p_1} d_1^{p_1}\eta_2^p\{v_{21}^{pp_1},\ w_{21,i\mu}^{pp_1}\}\right)\ \left(\operatorname{mod} H_a^l(G,\ \Upsilon)^*\right),\qquad (3.47)$$

суммирование проводится по тем p_1, *для которых найдутся преобразования* $\Omega_{i_1 s}$, *такие, что* $\Omega_{i_1 s}^{-1}(h_2^p) \in \mathrm{Orb}_{p_1} \cap \bar{\Upsilon}_{i_1}$.

Здесь $d_2^p = \{d_{2,n}^{p,(k,\zeta)}\}$ — *вектор констант,* $\{v_2^p,\ w_{2,i\mu}^p\} = \{v_{2,n}^{p,(k,\zeta)},\ w_{2,n,i\mu}^{p,(k,\zeta)}\}$, $\{v_{21}^{pp_1},\ w_{21,i\mu}^{pp_1}\} = \{v_{21,n}^{pp_1,(k,\zeta)},\ w_{21,n,i\mu}^{pp_1,(k,\zeta)}\}$, *причем* $\{v_{2,n}^{p,(k,\zeta)},\ w_{2,n,i\mu}^{p,(k,\zeta)}\}$ — *степенные решения уравнения* $(\mathcal{L}_2^p)^*\{v,\ w\} = 0$ *вида (3.45), отвечающие собственному числу* $\bar{\lambda}_{2,n}^p$ *оператор–функции* $(\tilde{\mathcal{L}}_2^p)^*(\lambda)$; $\{v_{21,n}^{pp_1\dots},\ w_{21,n,i\mu}^{pp_1\dots}\}$ — *линейная комбинация функций вида* $\{r^{i\bar{\lambda}_{1,n}^{p_1}+2m-2}(i\ln r)^q\psi_{21,n,q}^{pp_1\dots},\ r^{i\bar{\lambda}_{1,n}^{p_1}+m_{i\mu}-1}(i\ln r)^q\chi_{21,n,q}^{pp_1\dots}\}$, *где* $\{\psi_{21,n,q}^{pp_1\dots},\ \chi_{21,n,q}^{pp_1\dots}\} \in W^l[-\pi/2,\ \pi/2]^*$.

Доказательство. Пусть $\{v_{21,i_1\mu s}^{pp_1},\ w_{21,i_1\mu s,}^{pp_1}\} = \{v_{21,n,i_1\mu s}^{pp_1,(k,\zeta)},\ w_{21,n,i_1\mu s,}^{pp_1,(k,\zeta)}\}$, где $\{v_{21,n,i_1\mu s}^{pp_1,(k,\zeta)},\ w_{21,n,i_1\mu s,}^{pp_1,(k,\zeta)}\}$ (при фиксированных $n,\ k,\ \zeta$) — частное решение уравнения (3.44) с правой частью $-\Psi_{1,n,i_1\mu s}^{p_1,(k,\zeta)}$, определяемое леммой 3.3. Положим

$$\{V,\ W\} = \eta_2^p\Big(\{v,\ w\} - \sum_{p_1,i_1,\mu,s} d_1^{p_1}\{v_{21,i_1\mu s}^{pp_1},\ w_{21,i_1\mu s,}^{pp_1}\}\Big),$$

где индексы изменяются так же, как в формуле (3.44). Используя условие $0 < a - a_1 < 1$, формулу Лейбница, лемму 3.9 [16] и соображения двойственности, нетрудно проверить, что $(\mathcal{L}_2^p)^*\{V,\ W\} \in H_a^l(K_{\pi/2},\ \gamma)^*$. Теперь требуемый результат следует из теоремы 5.7 [24, гл. 3]. □

Отметим, что $\{v_{21,n}^{pp_1\dots},\ w_{21,n,i\mu}^{pp_1\dots}\}$ состоят из сумм частных решений $\{v_{21,n\dots}^{pp_1\dots},\ w_{21,n\dots}^{pp_1\dots}\}$ уравнения (3.44) с правыми частями $-\Psi_{1,n\dots}^{p_1\dots}$. Каждое частное решение, в силу леммы 3.3, не единственно, если $\bar{\lambda}_{1,n}^{p_1}$ является собственным числом оператор–функции $(\tilde{\mathcal{L}}_2^p)^*(\lambda)$; поэтому далее зафиксируем некоторые частные решения $\{v_{21,n}^{pp_1\dots},\ w_{21,n,i\mu}^{pp_1\dots}\}$, а следовательно, и распределения $\{v_{21,n}^{pp_1\dots},\ w_{21,n,i\mu}^{pp_1\dots}\}$.

Таким образом, асимптотика решения сопряженной задачи в окрестности $\mathcal{K}_2$ зависит как от данных задачи в окрестности $\mathcal{K}_2$, так и от данных в окрестности $\mathcal{K}_1$.

3. Наконец, зафиксируем точку $h_3^p \in \mathcal{K}_3$ $(p = 1,\ \dots,\ N_3)$. Используя срезающую функцию η_3^p с носителем, сосредоточенным вблизи точки h_3^p, сведем изучение задачи вблизи h_3^p к изучению соответствующей модельной задачи в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. При этом, за счет наличия нелокальных преобразований, в правой части соответствующего уравнения возникнут “негладкие” распределения, содержащие $w_{i_1\mu s_1}^{\Omega}$ и $w_{i_2\mu s_2}^{\Omega}$. Однако, согласно (3.33), асимптотика распределений $w_{i_1\mu s_1}^{\Omega}$ и $w_{i_2\mu s_2}^{\Omega}$ вблизи точки h_3^p определяется уже изученной в предыдущих двух пунктах асимптотикой распределений $w_{i_1\mu}$ и $w_{i_2\mu}$ вблизи точек $g_1^{p_1} = \Omega_{i_1 s}^{-1}(h_3^p)$ и $g_2^{p_2} = \Omega_{i_2 s}^{-1}(h_3^p)$ соответственно.

Далее, используя асимптотику решения модельной задачи в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ со специальной правой частью (см. § 2.5 гл. 2), получим асимптотику решений задачи в ограниченной области вблизи точки h_3^p.

Итак, имеем

$$\mathbf{L}_\Omega^* \eta_3^p \{v,\ w_{i\mu s}^\Omega\} = \mathbf{P}^*(y,\ D_y)\eta_3^p v + \sum_{i_2,\mu,s_2} B_{i_2\mu s_2}^*(y,\ D_y)(\eta_3^p w_{i_2\mu s_2}^\Omega \otimes \delta_{\Upsilon_{i_2 s_2}}) + \\ + \sum_{i_1,\mu,s_1} B_{i_1\mu s_1}^*(y,\ D_y)(\eta_3^p w_{i_1\mu s_1}^\Omega \otimes \delta_{\Upsilon_{i_1 s_1}}),$$

где суммирование проводится по тем $i_1,\ s_1$, для которых $\Omega_{i_1 s_1}^{-1}(h_3^p) \in \mathcal{K}_1$, и тем $i_2,\ s_2$, для которых $\Omega_{i_2 s_2}^{-1}(h_3^p) \in \mathcal{K}_2$. С другой стороны, из формулы Лейбница, равенства (3.35) и условия $0 < a - a_1 < 1$ вытекает, что $\mathbf{L}_\Omega^* \eta_3^p \{v,\ w_{i\mu s}^\Omega\} = \eta_3^p \Psi + \hat{\Psi}_0$, где $\hat{\Psi}_0 \in H_a^{l+2m}(G)^*$ и $\operatorname{supp} \hat{\Psi}_0 \subset \mathcal{V}(h_3^p)$. Таким образом, $\eta_3^p v$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{P}^*(y,\ D_y)\eta_3^p v = -\sum_{i_2,\mu,s_2} B_{i_2\mu s_2}^*(y,\ D_y)(\eta_3^p w_{i_2\mu s_2}^\Omega \otimes \delta_{\Upsilon_{i_2 s_2}}) - \\ - \sum_{i_1,\mu,s_1} B_{i_1\mu s_1}^*(y,\ D_y)(\eta_3^p w_{i_1\mu s_1}^\Omega \otimes \delta_{\Upsilon_{i_1 s_1}}) + \hat{\Psi}, \tag{3.48}$$

где $\hat{\Psi} = \eta_3^p \Psi + \hat{\Psi}_0 \in H_a^{l+2m}(G)^*$ и $\operatorname{supp} \hat{\Psi} \subset \mathcal{V}(h_3^p)$.

Обозначим через $\mathcal{P}^*(D_y)$ главную однородную часть $\mathbf{P}^*(h_3^p,\ D_y)$. Рассмотрим оператор $(\mathcal{L}_3^p)^* : H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)^* \to H_{a_1}^{l+2m}(\mathbb{R}^2)^*$, сопряженный с оператором $\mathcal{L}_3^p = \mathcal{P}^*(D_y) : H_{a_1}^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)$. Тогда аналогично п. 2 настоящего параграфа из теорем 3.5, 3.6 и формулы (3.33) получим

$$(\mathcal{L}_3^p)^* \eta_3^p v = -\eta_3^p \Big(\sum_{p_2=1}^{N_2} \sum_{i_2,\mu,s_2} d_2^{p_2} \Psi_{2,i_2\mu s_2}^{p_2} + \sum_{p_2=1}^{N_2} \sum_{i_2,\mu,s_2} \sum_{p_1} d_1^{p_1} \Psi_{21,i_2\mu s_2}^{p_2 p_1} + \\ + \sum_{p_1=1}^{N_1} \sum_{i_1,\mu,s_1} d_1^{p_1} \Psi_{1,i_1\mu s_1}^{p_1} \Big) + \hat{\Phi}, \tag{3.49}$$

где $i_2,\ s_2$ принимает те значения, для которых $\Omega_{i_2 s_2}^{-1}(h_3^p) = h_2^{p_2} \cap \Upsilon_{i_2}$; $i_1,\ s_1$ — те, для которых $\Omega_{i_1 s_1}^{-1}(h_3^p) \in \operatorname{Orb}_{p_1} \cap \bar{\Upsilon}_{i_1}$; p_1 во второй сумме — те, для которых найдется преобразование Ω_{is}, такое, что $\Omega_{is}^{-1}(h_2^{p_2}) \in \operatorname{Orb}_{p_1} \cap \bar{\Upsilon}_i$. Далее, $\hat{\Phi} \in H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)^*$; функции $\Psi_{2\ldots}^{p_2\ldots}$, $\Psi_{21\ldots}^{p_2 p_1\ldots}$, $\Psi_{1\ldots}^{p_1\ldots}$ (компоненты соответствующих векторов) представляют собой, в силу условий 3.3 и 3.4, линейные комбинации функций вида

$r^{i\bar{\lambda}^{p_2}_{2,n}-2}(i\ln r)^q\Psi^{p_2\dots}_{2,n\dots q}$, $r^{i\bar{\lambda}^{p_1}_{1,n}-2}(i\ln r)^q\Psi^{p_2p_1\dots}_{21,n\dots q}$, $r^{i\bar{\lambda}^{p_1}_{1,n}-2}(i\ln r)^q\Psi^{p_1\dots}_{1,n\dots q}$, причем $\Psi^{p_2\dots}_{2,n\dots q}$, $\Psi^{p_2p_1\dots}_{21,n\dots q}$, $\Psi^{p_1\dots}_{1,n\dots q} \in W^{l+2m}_{2\pi}(0,\ 2\pi)^*$, r — полярный радиус системы координат с полюсом в точке h^p_3.

Введем оператор $(\tilde{\mathcal{L}}^p_3)^*(\lambda)$, сопряженный с оператором $\tilde{\mathcal{L}}^p_3(\bar{\lambda})$. Для каждого собственного значения $\bar{\lambda}^p_{3,n}$ оператора $(\tilde{\mathcal{L}}^p_3)^*(\lambda)$ рассмотрим степенные решения однородного уравнения $(\mathcal{L}^p_3)^*v = 0$ (см. § 2.5 гл. 2):

$$v^{p,(k,\zeta)}_{3,n} = r^{i\bar{\lambda}^p_{3,n}+2m-2}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi^{p,(\nu-q,\zeta)}_{3,n}, \tag{3.50}$$

где

$$\{\psi^{p,(0,\zeta)}_{3,n},\ \dots,\ \psi^{p,(\varkappa^p_{\zeta,3,n}-1,\zeta)}_{3,n}:\ \zeta = 1,\ \dots,\ J^p_{3,n}\}$$

— жордановы цепочки оператора $(\tilde{\mathcal{L}}^p_3)^*(\lambda)$, отвечающие числу $\bar{\lambda}^p_{3,n}$ и составляющие каноническую систему.

Аналогично доказательству теоремы 3.6, из леммы 2.11 гл. 2 и теоремы 2.7 гл. 2 получим следующий результат.

Теорема 3.7. *Пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = h_1$, $\operatorname{Im}\lambda = h$ *свободны от спектра оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}^p_3(\lambda)$, *а в полосе* $h_1 < \operatorname{Im}\lambda < h$ *лежат собственные числа* $\lambda^p_{3,n}$ *этой оператор-функции. Тогда для решения* $\{v,\ w_{i\mu}\} \in H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)^*$ *уравнения (3.34) с правой частью* $\Psi \in H^{l+2m}_a(G)^*$ *справедливо сравнение*

$$\eta^p_3 v \equiv \Big(d^p_3\eta^p_3 v^p_3 + \sum_{p_2} d^{p_2}_2\eta^p_3 v^{pp_2}_{32} + \sum_{p_2}\sum_{p_1} d^{p_1}_1\eta^p_3 v^{pp_2p_1}_{321} + \\ + \sum_{p_1} d^{p_1}_1\eta^p_3 v^{pp_1}_{31}\Big)\ \Big(\operatorname{mod} H^l_a(G)^*\Big), \tag{3.51}$$

где p_2 *в первой и второй суммах принимает те значения, для которых найдутся преобразования* $\Omega_{i_2s_2}$, *такие, что* $\Omega^{-1}_{i_2s_2}(h^p_3) = h^{p_2}_2 \in \Upsilon_{i_2}$; p_1 *в третьей сумме — те значения, для которых найдутся преобразования* $\Omega_{i_1s_1}$, *такие, что* $\Omega^{-1}_{i_1s_1}(h^p_3) \in \operatorname{Orb}_{p_1}\cap\bar{\Upsilon}_{i_1}$; p_1 *во второй сумме — те значения, для которых найдутся преобразования* $\Omega_{i_1s_1}$, *такие, что* $\Omega^{-1}_{i_1s_1}(h^{p_2}_2) \in \operatorname{Orb}_{p_1}\cap\bar{\Upsilon}_{i_1}$.

Далее, $d^p_3 = \{d^{p,(k,\zeta)}_{3,n}\}$ *— вектор констант;* $v^p_3 = \{v^{p,(k,\zeta)}_{3,n}\}$, *причем* $v^{p,(k,\zeta)}_{3,n}$ *определяются формулой (3.50);* $v^{pp_2}_{32} = \{v^{pp_2,(k,\zeta)}_{32,n}\}$, $v^{pp_2p_1}_{321} = \{v^{pp_2p_1,(k,\zeta)}_{321,n}\}$, $v^{pp_1}_{31} = \{v^{pp_1,(k,\zeta)}_{31,n}\}$, $v^{pp_2\dots}_{32,n}$, $v^{pp_2p_1\dots}_{321,n}$, $v^{pp_1\dots}_{31,n}$ *— линейные комбинация функций вида* $r^{i\bar{\lambda}^{p_2}_{2,n}+2m-2}(i\ln r)^q\psi^{pp_2\dots}_{32,n,q}$, $r^{i\bar{\lambda}^{p_1}_{1,n}+2m-2}(i\ln r)^q\psi^{pp_2p_1\dots}_{321,n,q}$,

$r^{i\bar{\lambda}_{1,n}^{p_1}+2m-2}(i\ln r)^q\psi_{31,n,q}^{pp_1\dots}$ *соответственно, где* $\psi_{32,n,q}^{pp_2\dots}$, $\psi_{321,n,q}^{pp_2p_1\dots}$, $\psi_{31,n,q}^{pp_1\dots} \in W_{2\pi}^l(0,\ 2\pi)^*$.

Отметим, что $v_{32,n}^{pp_2\dots}$, $v_{321,n}^{pp_2p_1\dots}$, $v_{31,n}^{pp_1\dots}$ состоят из сумм частных решений $v_{32,n\dots}^{pp_2\dots}$, $v_{321,n\dots}^{pp_2p_1\dots}$, $v_{31,n\dots}^{pp_1\dots}$ уравнения (3.49) с правыми частями $\Psi_{2,n\dots}^{p_2\dots}$, $\Psi_{21,n\dots}^{p_2p_1\dots}$, $\Psi_{1,n\dots}^{p_1\dots}$ соответственно. Каждое частное решение, в силу леммы 2.11 гл. 2, не единственно, если $\bar{\lambda}_{2,n}^{p_2}$ (для решений $v_{32,n\dots}^{p_2\dots}$) или $\bar{\lambda}_{1,n}^{p_1}$ (для решений $v_{321,n\dots}^{p_2p_1\dots}$, $v_{31,n\dots}^{p_1\dots}$) является собственным числом оператор–функции $(\tilde{\mathcal{L}}_3^p)^*(\lambda)$; поэтому далее зафиксируем некоторые частные решения, а следовательно, и распределения $v_{32,n}^{pp_2\dots}$, $v_{321,n}^{pp_2p_1\dots}$, $v_{31,n}^{pp_1\dots}$.

Итак, асимптотика решения сопряженной задачи в окрестности $\mathcal{K}_3$ зависит от данных задачи в окрестности всего множества $\mathcal{K}$. При этом зависимость от данных в окрестности $\mathcal{K}_1$ возникает как за счет преобразований Ω_{is}, отображающих $\mathcal{K}_1$ непосредственно в $\mathcal{K}_3$, так и за счет преобразований, отображающих $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_2$ (а затем $\mathcal{K}_2$ в $\mathcal{K}_3$).

4. Запишем асимптотическую формулу для решения $\{v,\ w_{i\mu}\} \in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)^*$ сопряженной нелокальной задачи (3.34) во всей области G. Положим (ср. с функциями (3.21)–(3.23))

$$\{V_3^{p_3},\ W_{3,i\mu}^{p_3}\} = \eta_3^{p_3}\{v_3^{p_3},\ 0\}; \tag{3.52}$$

$$\{V_2^{p_2},\ W_{2,i\mu}^{p_2}\} = \eta_2^{p_2}\{v_2^{p_2},\ w_{2,i\mu}^{p_2}\} + \sum_{p_3}\eta_3^{p_3}\{v_{32}^{p_3p_2},\ 0\}, \tag{3.53}$$

где суммирование проводится по тем p_3, для которых найдется преобразование Ω_{is}, такое, что $\Omega_{is}(h_2^{p_2}) = h_3^{p_3}$;

$$\begin{aligned}\{V_1^{p_1},\ W_{1,i\mu}^{p_1}\} = \eta_1^{p_1}\{v_1^{p_1},\ w_{1,i\mu}^{p_1}\} + \sum_{p_3}\eta_3^{p_3}\{v_{31}^{p_3p_1},\ 0\}+\\ +\sum_{p_2}\eta_2^{p_2}\{v_{21}^{p_2p_1},\ w_{21,i\mu}^{p_2p_1}\} + \sum_{p_2}\sum_{p_3}\eta_3^{p_3}\{v_{321}^{p_3p_2p_1},\ 0\},\end{aligned} \tag{3.54}$$

где p_3 в первой сумме принимает те значения, для которых найдется преобразование Ω_{is}, такое, что $\Omega_{is}(g_j^{p_1}) = h_3^{p_3}$ для некоторого $g_j^{p_1} \in \mathrm{Orb}_{p_1}$; p_2 во второй и третьей суммах — те значения, для которых найдется преобразование Ω_{is}, такое, что $\Omega_{is}(g_j^{p_1}) = h_2^{p_2}$ для некоторого $g_j^{p_1} \in \mathrm{Orb}_{p_1}$; наконец, p_3 в третьей сумме (при каждом фиксированном p_2) — те значения, для которых найдется преобразование Ω_{is}, такое, что $\Omega_{is}(h_2^{p_2}) = h_3^{p_3}$.

Теперь из теорем 3.5–3.7 получим следующее асимптотическое представление для $\{v,\ w_{i\mu}\} \in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)^*$ (ср. с формулой (3.24)):

$$\{v,\ w_{i\mu}\} \equiv \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{p=1}^{N_\nu} d_\nu^p\{V_\nu^p,\ W_{\nu,i\mu}^p\}\ \Big(\mathrm{mod}\, H_a^{l+2m}(G,\ \Upsilon)^*\Big). \tag{3.55}$$

3.5 Вычисление коэффициентов в асимптотике решений нелокальной задачи

1. В данном параграфе мы получим формулы для коэффициентов $c_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)}$ из асимптотического представления (3.24).

Прежде всего, отметим, что указанные коэффициенты можно вычислять последовательно по формулам

$$c_{3,n}^{p,(k,\zeta)} =< \mathcal{L}_3^p \eta_3^p u,\ i v_{3,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,3,n}^p - k - 1,\zeta)} >$$

(см. теорему 2.6 гл. 2, а также п. 1 § 3.2 и п. 3 § 3.4 данной главы),

$$c_{2,n}^{p,(k,\zeta)} =< \mathcal{L}_2^p \eta_2^p (u - \sum_{p_3} c_3^{p_3} u_{23}^{pp_3}),\ i\{v_{2,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,2,n}^p - k - 1,\zeta)},\ w_{2,n,i'\mu}^{p,(\varkappa_{\zeta,2,n}^p - k - 1,\zeta)}\} > \text{ [6)]}$$

(см. теорему 5.8 [24, гл. 3], а также п. 2 § 3.2 и п. 2 § 3.4 данной главы) и

$$c_{1,n}^{p,(k,\zeta)} =< \hat{\mathcal{L}}_1^p \eta_1^p (u - \sum_{p_2} c_2^{p_2} u_{12}^{pp_2} - \sum_{p_2,p_3} c_3^{p_3} u_{123}^{pp_2p_3} - \sum_{p_3} c_3^{p_3} u_{13}^{pp_3}),$$
$$i\{v_{1,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,1,n}^p - k - 1,\zeta)},\ w_{1,n,i'\mu}^{p,(\varkappa_{\zeta,1,n}^p - k - 1,\zeta)}\} >,$$

где $\hat{\mathcal{L}}_1^p u(y)$ равно $[\mathcal{L}_1^p \mathcal{U}]_j(y'(y))$ при $y \in \mathcal{V}(g_j^p)$ и нулю при $y \notin \bigcup_{j=1}^{N_{p1}} \mathcal{V}(g_j^p)$; здесь $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \ \dots, \ \mathcal{U}_{N_{p1}})$, $\mathcal{U}_j(y') = u(y(y'))$ при $y' \in \mathcal{V}_j^p(0)$ (см. теорему 2.2 гл. 2, а также п. 3 § 3.2 и п. 1 § 3.4 данной работы). Таким образом, видно, что значения коэффициентов, так же, как и общий вид асимптотики, зависят не только от данных задачи вблизи рассматриваемой точки, но и от данных вблизи некоторых других точек, лежащих как на границе, так и внутри области, и связанных с данной точкой посредством преобразований переменных в нелокальных членах.

Аналогичным образом, но с применением теорем 2.8 гл. 2, 5.10 [24, гл. 3] и 2.4 гл. 2, можно написать формулы для коэффициентов $c_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)}$ в терминах формул Грина для соответствующих модельных задач в $\mathbb{R}^2$, в развернутом угле $K_{\pi/2}$ и в прямом произведении углов $\prod_{j=1}^{N_{p1}} K_j^p$. Однако во всех этих формулах, как легко видеть, коэффициенты зависят от решения u. Далее выводятся формулы, согласно которым $c_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)}$ суть функционалы на векторах $\{f, \ f_{i'\mu}\}$ — правых частях нелокальной задачи (3.1),

---

[6)] Мы вводим индекс i', вместо i, чтобы не путать его с мнимой единицей, которая также здесь используется.

(3.2). Эти функционалы зависят от данных задачи уже во всей области G, а не только в окрестности точек множества $\mathcal{K}$.

2. Прежде, чем формулировать основную теорему, проведем ряд вспомогательных рассуждений, а именно, вычислим значение выражения $< \mathbf{L}u,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\} >$, где $\{v,\ w_{i'\mu}\}$ принадлежит ядру оператора $\mathbf{L}^* : H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)^* \to H^{l+2m}_{a_1}(G)^*$.

Будем считать, что если на t-м месте вектора c^p_ν стоит $c^{p,(k,\zeta)}_{\nu,n}$, то на t-м месте векторов d^p_ν, $\{v^p_\nu,\ w^p_{\nu,i'\mu}\}$ и т. д. (берутся векторы из § 3.4) стоят соответственно элементы $d^{p,(\varkappa^p_{\zeta,\nu,n}-k-1,\zeta)}_{\nu,n}$, $\{v^{p,(\varkappa^p_{\zeta,\nu,n}-k-1,\zeta)}_{\nu,n},\ w^{p,(\varkappa^p_{\zeta,\nu,n}-k-1,\zeta)}_{\nu,n,i'\mu}\}$ и т. д.

Кроме того, полагаем, что жордановы цепочки операторов $\tilde{\mathcal{L}}^p_\nu(\lambda)$ и $(\tilde{\mathcal{L}}^p_\nu)^*(\lambda)$, использованные для определения функций $u^{p,(k,\zeta)}_{\nu,n}$ и $\{v^{p,(k,\zeta)}_{\nu,n},\ w^{p,(k,\zeta)}_{\nu,n,i\mu}\}$, подчинены соотношениям биортогональности и нормировки (см. гл. 2).

Без ограничения общности предположим, что в формулах (3.22), (3.23), (3.47), (3.51), а также далее, индекс p_ν принимает значения $1,\ \ldots,\ N_\nu$ (если в одной из указанных формул p_ν не принимал какого-либо значения, то добавим соответствующее слагаемое, полагая его равным нулю).

Согласно (3.24), $\mathbf{L}u = \sum\limits_{\nu=1}^{3}\sum\limits_{p_\nu}\mathbf{L}c^{p_\nu}_\nu U^{p_\nu}_\nu + \mathbf{L}u_1$, где $u_1 \in H^{l+2m}_{a_1}(G)$. Так как $\{v,\ w_{i'\mu}\}$ принадлежит ядру оператора $\mathbf{L}^* : H^l_{a_1}(G,\ \Upsilon)^* \to H^{l+2m}_{a_1}(G)^*$, $< \mathbf{L}u_1,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\} >= 0$. Следовательно, в силу (3.25), можем написать

$$< \mathbf{L}u,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\} >= \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{p_\nu} < \mathbf{L}c^{p_\nu}_\nu U^{p_\nu}_\nu,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\} > . \tag{3.56}$$

Пусть $\eta^{pj}(\omega,\ r)$, $\eta^p_\nu(\omega,\ r)$ $(\nu = 2,\ 3)$ — функции η^{pj}, η^p_ν, записанные в полярных координатах с полюсом в точках g^p_j, g^p_ν соответственно. Введем функции $\eta^{pj}_\varepsilon(\omega,\ r) = \eta^{pj}(\omega,\ r/\varepsilon)$, $\eta^p_{\nu,\varepsilon}(\omega,\ r) = \eta^p_\nu(\omega,\ r/\varepsilon)$; положим также $\eta^p_{1,\varepsilon} = \sum\limits_{j=1}^{N_{p1}}\eta^{pj}_\varepsilon$.

Рассмотрим последовательно слагаемые в (3.56) при $\nu = 1,\ 2$ и 3.

Зафиксируем $\nu = 1$. Поскольку $(\eta^{p_1}_1 - \eta^{p_1}_{1,\varepsilon})c^{p_1}_1 u^{p_1}_1 \in H^{l+2m}_{a_1}(G)$, из (3.21) получаем

$$< \mathbf{L}c^{p_1}_1 U^{p_1}_1,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\} >=< \mathbf{L}c^{p_1}_1\eta^{p_1}_{1,\varepsilon}u^{p_1}_1,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\} > .$$

Обозначим через $\mathcal{U}^{p_1}_{1,\varepsilon}(y')$ вектор длины $N_{p_1 1}$, j-я компонента которого равна $(c^{p_1}_1\eta^{p_1}_{1,\varepsilon}u^{p_1}_1)(y(y'))$ при $y'\in\mathcal{V}^{p_1 j}(0)$ и нулю при $y'\notin\mathcal{V}^{p_1 j}(0)$. Тогда, используя теорему 3.5, запишем правую часть последнего равенства в виде

$$< \mathcal{L}^{p_1}_1\mathcal{U}^{p_1}_{1,\varepsilon},\ id^{p_1}_1\{\mathcal{V}^{p_1}_1,\ \mathcal{W}^{p_1}_1\} > + < \mathcal{L}^{p_1}_1\mathcal{U}^{p_1}_{1,\varepsilon},\ i\{F,\ G\} > +$$
$$+ < \{\mathcal{P}^{p_1 j}(y,\ D_y)-\mathcal{P}^{p_1 j}(D_y),\ \mathcal{B}^{p_1 j}_{\sigma\mu}(y,\ D_y)-\mathcal{B}^{p_1 j}_{\sigma\mu}(D_y)\}\mathcal{U}^{p_1}_{1,\varepsilon},$$
$$i(d^{p_1}_1\{\mathcal{V}^{p_1}_1,\ \mathcal{W}^{p_1}_1\}+\{F,\ G\}) >,$$

где $\{\mathcal{V}^{p_1}_1,\ \mathcal{W}^{p_1}_1\}$ заданы формулой (3.41), $\{F,\ G\}\in H^{l,\,N}_a(K^{p_1},\ \gamma^{p_1})^*$.

По теореме 2.30 гл. 2, первое слагаемое равно $(c^{p_1}_1,\ d^{p_1}_1)$. [7] Второе слагаемое не превосходит величины

$$c\|\mathcal{U}^{p_1}_{1,\varepsilon}\|_{H^{l+2m,\,N}_a(K^{p_1})}\|\{F,\ G\}\|_{H^{l,\,N}_{a}(K^{p_1},\ \gamma^{p_1})^*}=O(1),$$

где $O(1)$ есть O-большое от единицы при $\varepsilon\to 0$. В силу непрерывности вложения $H^{l+2m,\,N}_{a_1+1}(K^{p_1})$ в $H^{l+2m-1,\,N}_{a_1}(K^{p_1})$, леммы 3.3′ [16] и неравенства $a<a_1+1$, последнее слагаемое не превосходит величины

$$c_1\|\mathcal{U}^{p_1}_{1,\varepsilon}\|_{H^{l+2m,\,N}_{a_1+1}(K^{p_1})}\|d^{p_1}_1\{V^{p_1}_1,\ W^{p_1}_1\}+\{F,\ G\}\|_{H^{l,\,N}_{a_1}(K^{p_1},\ \gamma^{p_1})^*}\le$$
$$\le c_2\|\mathcal{U}^{p_1}_{1,\varepsilon}\|_{H^{l+2m,\,N}_a(K^{p_1})}=O(1).\quad (3.57)$$

Таким образом, устремляя ε к нулю, получим

$$<\mathbf{L}c^{p_1}_1U^{p_1}_1,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\}>=(c^{p_1}_1,\ d^{p_1}_1).\quad (3.58)$$

Зафиксируем $\nu=2$. Поскольку $(\eta^{p_2}_2-\eta^{p_2}_{2,\varepsilon})c^{p_2}_2u^{p_2}_2\in H^{l+2m}_{a_1}(G)$ и $(\eta^{p_1}_1-\eta^{p_1}_{1,\varepsilon})c^{p_2}_2u^{p_1p_2}_{12}\in H^{l+2m}_{a_1}(G)$, из (3.22) получаем

$$<\mathbf{L}c^{p_2}_2U^{p_2}_2,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\}>=<\mathbf{L}c^{p_2}_2(\eta^{p_2}_{2,\varepsilon}u^{p_2}_2+\sum_{p_1}\eta^{p_1}_{1,\varepsilon}u^{p_1p_2}_{12}),\ i\{v,\ w_{i'\mu}\}> .$$

Обозначим через $\mathcal{U}^{p_1p_2}_{12,\varepsilon}(y')$, вектор длины $N_{p_1 1}$, j-я компонента которого равна $(c^{p_2}_2\eta^{p_1}_{1,\varepsilon}u^{p_1p_2}_{12})(y(y'))$ при $y'\in\mathcal{V}^{p_1 j}(0)$ и нулю при $y'\notin\mathcal{V}^{p_1 j}(0)$.

---

[7] Здесь и далее $(c^{p_\nu}_\nu,\ d^{p_\nu}_\nu)=\sum\limits_{n,k,\zeta}c^{p_\nu,(k,\zeta)}_{\nu,n}\overline{d^{p_\nu,(\varkappa^{p_\nu}_{\zeta,\nu,n}-k-1,\zeta)}_{\nu,n}}$, $\nu=1,\ 2,\ 3$.

Используя теоремы 3.5 и 3.6, запишем правую часть последнего равенства в виде

$$
\begin{gathered}
< \mathcal{L}_2^{p_2} c_2^{p_2} \eta_{2,\varepsilon}^{p_2} u_2^{p_2},\ i d_2^{p_2}\{v_2^{p_2},\ w_{2,i'\mu}^{p_2}\} > + \\
+ \sum_{p_1} < \mathcal{L}_2^{p_2} c_2^{p_2} \eta_{2,\varepsilon}^{p_2} u_2^{p_2},\ i d_1^{p_1}\{v_{21}^{p_2 p_1},\ w_{21,i'\mu}^{p_2 p_1}\} > + \\
+ \sum_{p_1,j} < \mathcal{P}^{p_1 j}(D_y)[\mathcal{U}_{12,\varepsilon}^{p_1 p_2}]_j,\ i d_1^{p_1}[\mathcal{V}_1^{p_1}]_j >_{K^{p_1 j}} + \sum_{p_1,j} \sum_{\sigma,\mu} < \mathcal{B}_{j\sigma\mu}^{p}(D_y)\mathcal{U}_{12,\varepsilon}^{p_1 p_2} + \\
+ \sum_{p_2,i_1,s} (B_{i_1 \mu s}(D_y) c_2^{p_2} \eta_{2,\varepsilon}^{p_2} u_2^{p_2})(\Omega_{i_1 s}(y(y'))),\ i d_1^{p_1}[\mathcal{W}_1^{p_1}]_{j\sigma\mu} >_{\gamma_\sigma^{p_1 j}} + O(1),
\end{gathered}
\tag{3.59}
$$

суммирование проводится по тем i_1, s, для которых $g_j^{p_1} \in \bar{\Upsilon}_{i_1}$ и $\Omega_{i_1 s}(g_j^{p_1}) = h_2^{p_2}$; $O(1)$ возникает так же, как и ранее.

По теореме 5.8 [24, гл. 3], первое слагаемое в (3.59) равно $(c_2^{p_2},\ d_2^{p_2})$. Так как $\mathcal{L}_2^{p_2} c_2^{p_2} u_2^{p_2} = 0$ (см. п. 2 § 3.2), второе слагаемое равно

$$
\sum_{p_1} < [\mathcal{L}_2^{p_2},\ \eta_{2,\varepsilon}^{p_2}] c_2^{p_2} u_2^{p_2},\ i d_1^{p_1}\{v_{21}^{p_2 p_1},\ w_{21,i'\mu}^{p_2 p_1}\} >, \tag{3.60}
$$

где $[\cdot,\ \cdot]$ есть коммутатор. Используя условие $0 < a - a_1 < 1$, нетрудно проверить, что (3.60) равно

$$
\sum_{p_1} (\hat{A}_{12}^{p_1 p_2}(\varepsilon) c_2^{p_2},\ d_1^{p_1}), \tag{3.61}
$$

где $\hat{A}_{12}^{p_1 p_2}(\varepsilon)$ — матрица соответствующего размера, элементы которой суть линейные комбинации функций вида $\varepsilon^{\delta}(i \ln \varepsilon)^q$ $(\delta \in \mathbb{C},\ |\delta| < 1)$.

Аналогично, при помощи результатов п. 3 § 3.2 (см., в частности, доказательство теоремы 3.3) доказывается, что третье и четвертое слагаемые в (3.59) имеют вид (3.61). Таким образом,

$$
< \mathbf{L} c_2^{p_2} U_2^{p_2},\ i\{v,\ w_{i'\mu}\} >= (c_2^{p_2},\ d_2^{p_2}) + \sum_{p_1} (A_{12}^{p_1 p_2}(\varepsilon) c_2^{p_2},\ d_1^{p_1}) + O(1), \tag{3.62}
$$

где $A_{12}^{p_1 p_2}(\varepsilon)$ — матрица соответствующего размера, элементы которой суть линейные комбинации функций вида $\varepsilon^{\delta}(i \ln \varepsilon)^q$ $(\delta \in \mathbb{C},\ |\delta| < 1)$.

Зафиксируем $\nu = 3$. Аналогично предыдущему, при помощи теорем 3.5–3.7, результатов пп. 1–3 § 3.2 и теоремы 2.48 гл. 2 получим

$$
\begin{gathered}
< \mathbf{L} c_3^{p_3} U_3^{p_3},\ i\{v,\ w_{i'\mu}\} >= (c_3^{p_3},\ d_3^{p_3}) + \sum_{p_2} (A_{23}^{p_2 p_3}(\varepsilon) c_3^{p_3},\ d_2^{p_2}) + \\
+ \sum_{p_1} (A_{13}^{p_1 p_3}(\varepsilon) c_3^{p_3},\ d_1^{p_1}) + O(1),
\end{gathered}
\tag{3.63}
$$

где $A_{23}^{p_2p_3}(\varepsilon)$, $A_{13}^{p_1p_3}(\varepsilon)$ — матрицы соответствующих размеров, элементы которых суть линейные комбинации функций вида $\varepsilon^{\delta}(i\ln\varepsilon)^q$ ($\delta\in\mathbb{C}$, $|\delta|<1$).

Из равенств (3.56), (3.58), (3.62) и (3.63) окончательно имеем

$$
\begin{gathered}
<\mathbf{L}u,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\}>=\sum_{p_3}(c_3^{p_3},\ d_3^{p_3})+\sum_{p_2}(c_2^{p_2}+\sum_{p_3}A_{23}^{p_2p_3}(\varepsilon)c_3^{p_3},\ d_2^{p_2})+\\
+\sum_{p_1}(c_1^{p_1}+\sum_{p_2}A_{12}^{p_1p_2}(\varepsilon)c_2^{p_2}+\sum_{p_3}A_{13}^{p_1p_3}(\varepsilon)c_3^{p_3},\ d_1^{p_1})+O(1).
\end{gathered}
\tag{3.64}
$$

3. Будем использовать обозначения (3.21)–(3.23) и (3.52)–(3.54). Пусть $\{U_1,\ \dots,U_\varkappa\}$, как и ранее, — множество функций $U_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)}$, упорядоченных так, как это описано в § 3.3 (см. доказательство леммы 3.1). Обозначим через $\{V_1,\ \dots,V_\varkappa\}$ множество, элементами которого являются векторы (3.52)–(3.54). Пусть множества $\{U_1,\ \dots,U_\varkappa\}$ и $\{V_1,\ \dots,V_\varkappa\}$ упорядочены согласованно, то есть равенство $U_h=U_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)}$ выполняется одновременно с равенством $V_h=\{V_{\nu,n}^{p,(\varkappa^p_{\zeta,\nu,n}-k-1,\zeta)},\ W_{\nu,n,i\mu}^{p,(\varkappa^p_{\zeta,\nu,n}-k-1,\zeta)}\}$.

Мы изучим случай, когда $d=0$ в лемме 3.2, то есть любое решение однородной задачи (3.1), (3.2) из пространства $H_a^{l+2m}(G)$ принадлежит пространству $H_{a_1}^{l+2m}(G)$. В этом случае будет показано, что при заданной правой части $\{f,\ f_{i'\mu}\}\in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)$ коэффициенты в асимптотической формуле для решения определяются однозначно. Если же $d>0$, то, как и в случае "локальной" задачи (см. теорему 3.6 [24, гл. 4]), существует определенная свобода в выборе коэффициентов асимптотики. При этом процедура их вычисления значительно усложняется технически (хотя идейно остается аналогичной приведенной ниже для случая $d=0$) и не будет рассматриваться в данной диссертации.

Итак, пусть $d=0$. Тогда, в силу леммы 3.2, существуют решения $Y_1,\ \dots,\ Y_\varkappa\in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)^*$ уравнения $\mathbf{L}^*Y=0$, линейно независимые по модулю $H_a^l(G,\ \Upsilon)^*$. Согласно (3.55), $Y_t\equiv\sum\limits_{k=1}^{\varkappa}d_{tk}V_k\ \left(\operatorname{mod} H_a^l(G,\ \Upsilon)^*\right)$, $t=1,\ \dots,\ \varkappa$. Так как $Y_1,\ \dots,\ Y_\varkappa$ линейно независимы по модулю $H_a^l(G,\ \Upsilon)^*$, матрица $\|d_{tk}\|$ невырожденная. Следовательно, существуют решения $\{\varphi_t,\ \psi_t\}\in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)^*$ ($t=1,\ \dots,\ \varkappa$) уравнения $\mathbf{L}^*\{v,\ w\}=0$, удовлетворяющие сравнениям

$$
\{\varphi_t,\ \psi_t\}\equiv V_t\ \left(\operatorname{mod} H_a^l(G,\ \Upsilon)^*\right),\ t=1,\ \dots,\ \varkappa.
\tag{3.65}
$$

Теперь покажем, что элементы матриц в формуле (3.64) имеют пределы при $\varepsilon\to 0$. При этом будем обозначать

$$A_{12}^{p_1p_2}=\lim_{\varepsilon\to 0}A_{12}^{p_1p_2}(\varepsilon),\ A_{13}^{p_1p_3}=\lim_{\varepsilon\to 0}A_{13}^{p_1p_3}(\varepsilon),\ A_{23}^{p_2p_3}=\lim_{\varepsilon\to 0}A_{23}^{p_2p_3}(\varepsilon).$$

Пусть l_ν^p — длина вектора c_ν^p; положим $l_\nu=\sum\limits_{p=1}^{N_\nu}l_\nu^p$. Очевидно, $l_3+l_2+l_1=\varkappa$.

При каждом фиксированном $t_1=1,\ \dots,\ l_3$ (при этом c_{t_1} совпадает с одним из элементов вектора $\{c_3^{p_3}\}_{p_3=1}^{N_3}$) и $t_2=l_3+1,\ \dots,\ l_3+l_2$ (при этом d_{t_2} совпадает с одним из элементов вектора $\{d_2^{p_2}\}_{p_2=1}^{N_2}$) подставим в (3.64) $u=U_{t_1}$, $\{v,\ w_{i'\mu}\}=\{\varphi_{t_2},\ \psi_{t_2}\}$ ($\{\varphi_{t_2},\ \psi_{t_2}\}$ — вектор из базиса (3.65)). В результате получим

$$<\mathbf{L}U_{t_1},\ i\{\varphi_{t_2},\ \psi_{t_2}\}>=a_{t_1t_2}(\varepsilon)+O(1).$$

Здесь $a_{t_1t_2}(\varepsilon)$ — соответствующий элемент матрицы $A_{23}^{p_2p_3}(\varepsilon)$. Устремим ε к нулю — очевидно, предел правой части существует, так как левая часть от ε не зависит.

Аналогично убеждаемся, что при при каждом $t_1=l_3+1,\ \dots,\ l_3+l_2$ и $t_2=l_3+l_2+1,\ \dots,\ l_3+l_2+l_1=\varkappa$ соответствующий элемент $a_{t_1t_2}(\varepsilon)$ матрицы $A_{12}^{p_1p_2}(\varepsilon)$ имеет предел при $\varepsilon\to 0$, а при каждом $t_1=1,\ \dots,\ l_3$ и $t_2=l_3+l_2+1,\ \dots,\ l_3+l_2+l_1=\varkappa$ соответствующий элемент $a_{t_1t_2}(\varepsilon)$ матрицы $A_{13}^{p_1p_3}(\varepsilon)$ имеет предел при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом, устремляя в (3.64) ε к нулю, получим

$$\begin{gathered}<\mathbf{L}u,\ i\{v,\ w_{i'\mu}\}>=\sum_{p_3}(c_3^{p_3},\ d_3^{p_3})+\sum_{p_2}(c_2^{p_2}+\sum_{p_3}A_{23}^{p_2p_3}c_3^{p_3},\ d_2^{p_2})+\\ +\sum_{p_1}(c_1^{p_1}+\sum_{p_2}A_{12}^{p_1p_2}c_2^{p_2}+\sum_{p_3}A_{13}^{p_1p_3}c_3^{p_3},\ d_1^{p_1}).\end{gathered}\tag{3.66}$$

Чтобы сформулировать основную теорему, введем следующие обозначения. Если на t-м месте в векторе коэффициентов

$$(c_1,\ \dots,\ c_\varkappa)=(\{c_3^{p_3}\}_{p_3=1}^{N_3},\ \{c_2^{p_2}\}_{p_2=1}^{N_2},\ \{c_1^{p_1}\}_{p_1=1}^{N_1})$$

стоит $c_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)}$, то обозначим t-й элемент вектора $(\{\varphi_1,\ \psi_1\},\ \dots,\ \{\varphi_\varkappa,\ \psi_\varkappa\})$ через $\{\varphi_{\nu,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,\nu,n}^p-k-1,\zeta)},\ \ \psi_{\nu,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,\nu,n}^p-k-1,\zeta)}\}$; после этого введем вектор $\{\varphi_\nu^p,\ \psi_\nu^p\}=\{\varphi_{\nu,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,\nu,n}^p-k-1,\zeta)},\ \psi_{\nu,n}^{p,(\varkappa_{\zeta,\nu,n}^p-k-1,\zeta)}\}$.

Теорема 3.8. *Предположим, что в лемме 3.2* $d=0$. *Пусть* $u\in H_a^{l+2m}(G)$ *— решение задачи (3.1), (3.2) с правой частью* $\{f,\ f_{i'\mu}\}\in H_{a_1}^l(G,\ \Upsilon)$. *Тогда функция* $u\in H_a^{l+2m}(G)$ *удовлетворяет сравнению*

$$u\equiv\Big(\sum_{t=1}^{\varkappa}c_tU_t\Big)\ \Big(\operatorname{mod}H_{a_1}^{l+2m}(G)\Big).\tag{3.67}$$

Постоянные c_t $(t = 1, \ \dots, \ \varkappa)$ *определяются по формулам*

$$c_t =< \{f, \ f_{i'\mu}\}, \ i\{\varphi_t, \ \psi_t\} >, \tag{3.68}$$

если $t \le l_3$ *(то есть* c_t *совпадает с одним из элементов вектора* $\{c_3^p\}_{p=1}^{N_3}$*);*

$$c_t =< \{f, \ f_{i'\mu}\}, \ i\{\varphi_t, \ \psi_t\} - i\Big[\sum_{p_3} A_{23}^{p_2 p_3}\{\varphi_3^{p_3}, \ \psi_3^{p_3}\}\Big]_{t-l_3} >, \tag{3.69}$$

если $l_3 < t \le l_3 + l_2$ *(то есть* c_t *совпадает с одним из элементов вектора* $\{c_2^p\}_{p=1}^{N_2}$*);*

$$\begin{aligned} c_t =< \{f, \ f_{i'\mu}\}, \ i\{\varphi_t, \ \psi_t\} - i\Big[\sum_{p_2} A_{12}^{p_1 p_2}\{\varphi_2^{p_2}, \ \psi_2^{p_2}\} + \\ + \sum_{p_3}(A_{13}^{p_1 p_3} - \sum_{p_2} A_{12}^{p_1 p_2} A_{23}^{p_2 p_3})\{\varphi_3^{p_3}, \ \psi_3^{p_3}\}\Big]_{t-l_3-l_2} >, \end{aligned} \tag{3.70}$$

если $t > l_3 + l_2$ *(то есть* c_t *совпадает с одним из элементов вектора* $\{c_1^p\}_{p=1}^{N_1}$*). Здесь* $[\cdot]_j$ *обозначает* j*-ю компоненту вектора.*

Доказательство. Подставляя в (3.66) в качестве $\{v, \ w_{i'\mu}\}$ последовательно $\{\varphi_1, \ \psi_1\}, \ \dots, \ \{\varphi_\varkappa, \ \psi_\varkappa\}$, получим для c_t формулы (3.68)–(3.70). $\square$

Таким образом, теорема 3.8 показывает, что значения коэффициентов $c_{\nu,n}^{p,(k,\zeta)}$ суть функционалы на векторах $\{f, \ f_{i'\mu}\}$ — правых частях нелокальной задачи (3.1), (3.2). Эти функционалы зависят от данных задачи во всей области G, а не только в окрестности точек множества $\mathcal{K}$.

Литература

[1] Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. 1964. Т. 19. Вып. 3. С. 53–161.

[2] Бицадзе А.В. Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. №3. С. 521–524.

[3] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.

[4] Блехер П.М. Об операторах, зависящих мероморфно от параметра // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1969. № 5. С. 30–36.

[5] Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 187–246.

[6] Гохберг И.Ц., Сигал Е.И. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. 1971. Т. 84(126), №4. С. 607–629.

[7] Гуревич П.Л. Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах и формула Грина // Докл. АН. 2001. Т. 379, №6. С. 735–738.

[8] Гуревич П.Л. Разрешимость нелокальных эллиптических задач в двугранных углах // Мат. заметки. 2002. Т. 72, вып. 2. С. 178–197.

[9] Гущин А.К., Михайлов В.П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.

[10] Гущин А.К., Михайлов В.П. Об однозначной разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения // Докл. АН. 1996. Т. 351. № 1. С. 7–8.

[11] Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д. О нелокальных граничных задачах для эллиптических уравнений // Математические исслед. 1971. Т. 6. Вып. 2(20). С. 63–73.

[12] Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2059–2071.

[13] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 795–804.

[14] Кишкис К.Ю. Об индексе задачи Бицадзе–Самарского для гармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 105–110.

[15] Ковалева О.А., Скубачевский А.Л. Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах с весом // Мат. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 6. С. 882–898.

[16] Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о–ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.

[17] Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

[18] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

[19] Лионс Ж.–Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[20] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в конусе // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин–та. АН СССР. 1975. Т. 58. С. 110–128.

[21] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. L_p–оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // Тр. Моск. мат. о–ва. 1978. Т. 37. С. 49–93.

[22] Моисеев Е.И. О спектральных характеристиках одной нелокальной краевой задачи. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 5. С. 864–872.

[23] Моисеев Е.И. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2082–2093.

[24] Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.

[25] Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикладная механика. 1979. Т. 15. № 5. С. 39–47.

[26] Подъяпольский В.В. Полнота и базисность по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 4. С 568–569.

[27] Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13, № 1. Р. 165–181.

[28] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.

[29] Скубачевский А.Л. Нелокальные эллиптические задачи с параметром // Мат. сб. 1983. Т. 121 (163). № 2(6). С. 201–210.

[30] Скубачевский А.Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Мат. сб. 1986. Т. 129 (171). №2. С. 279–302.

[31] Скубачевский А.Л. О собственных значениях и собственных функциях некоторых нелокальных краевых задач // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 127–136.

[32] Скубачевский А.Л. Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №1. С. 120–131.

[33] Скубачевский А.Л. О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. №1. С. 128–139.

[34] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

[35] Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград. 1917.

[36] Шефтель З.Г. Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6. № 3. С. 636–668.

[37] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. мат. и мех. 1982. № 6. С. 12–21.

[38] Beals R. Nonlocal elliptic boundary value problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. № 5. P. 693–696.

[39] Browder F. Non-local elliptic boundary value problems // Amer. J. Math. 1964. V. 86. P. 735–750.

[40] Carleman T. Sur la théorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. Bd. 1. P. 132–151.

[41] Feller W. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations // Ann. of Math. 1952. V. 55. P. 468–519.

[42] Feller W. Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. P. 1–30.

[43] Gurevich P.L. On the Green formula for nonlocal elliptic problems // Abstracts of International Conf. “Differential Equations and Related Topics” dedicated to the Centenary Anniversary of I.G. Petrovskii, Moscow, MSU. 2001. P. 159–160.

[44] Gurevich P.L. On the Fredholm solvability for some nonlocal problems // Proceedings of the 11th Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 2001. V. 11. P. 201–203.

[45] Gurevich P.L. Nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles and the Green formula // Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, Math. Inst. Univ. Giessen, Germany. 2001. Heft 247. P. 1–74.

[46] Gurevich P.L. Nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces // Abstracts of International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, 2002. P. 41–42.

[47] Gurevich P.L. Asymptotics and smoothness of generalized solutions for nonlocal elliptic problems // Abstracts of International Conference "Functional Differential Equations and Applications". Beer Sheva, Israel, Ben Gurion Univ. of the Negev. 2002. P. 25–26.

[48] Gurevich P.L. On the index formula for some nonlocal elliptic boundary value problems // Proceedings of the 12th Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 2002. V. 12. P. 158–160.

[49] Krall A.M. The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mountain J. of Math. 1975. V. 5. P. 493–542.

[50] Picone M. Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Academia nazionale dei Lincei. Atti dei convegni. 1932. V. 15. P. 942–948.

[51] Skubachevskii A.L. On the stability of index of nonlocal elliptic problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1991. V. 160. № 2. P. 323–341.

[52] Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations и Applications. Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 1997.

[53] Skubachevskii A.L. Regularity of solutions for some nonlocal elliptic problem // Russian J. of Mathematical Physics. 2001. V. 8. P. 365–374.

[54] Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodinamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). 1909. V. 3. Reale Accad. Lincei. Roma. P. 116–124.