

DIPLOMARBEIT

**Takens Bogdanov Verzweigung  
mit einem langsam variierenden  
Parameter**

ausgeführt am Institut für  
Angewandte und Numerische Mathematik  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ.Doz. Dr.techn. Peter Szmolyan

durch

**Astrid Huber**  
Gentzgasse 92/14  
A-1180 Wien

Wien, am 25.10.1999

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Takens Bogdanov Verzweigung</b>	<b>5</b>
2.1	Blow-up . . . . .	6
2.2	Lokales und globales Verhalten . . . . .	7
2.3	Saddle node Verzweigung . . . . .	8
2.4	Hopfverzweigung . . . . .	10
2.5	Homokliner Orbit . . . . .	12
2.6	Periodische Orbits . . . . .	15
2.7	Allgemeines . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Die TB Verzw. mit <math>\mu' = \epsilon(1 + O(1))</math> für <math>\nu &lt; 0</math></b>	<b>16</b>
3.1	Reguläre Punkte . . . . .	17
3.2	Der saddle node Punkt . . . . .	19
3.2.1	Einschränkung auf die Zentrums-Mannigfaltigkeit . . . . .	20
3.2.2	Auf der Zentrumsmanigfaltigkeit . . . . .	21
3.2.3	Verhalten in Karte $K_1$ . . . . .	23
3.2.4	Verhalten in Karte $K_2$ . . . . .	25
3.2.5	Verhalten in Karte $K_3$ . . . . .	28
3.2.6	Zusammenfassung . . . . .	29
3.2.7	Der Fall $\epsilon < 0$ . . . . .	30
3.2.8	Dynamik im saddle node Punkt . . . . .	30
3.3	Homokliner Orbit . . . . .	33
3.4	Hopfverzweigung . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Die TB Verzw. mit <math>\mu' = \epsilon(1 + O(1))</math> für <math>\nu = 0</math></b>	<b>35</b>
4.1	Verhalten in Karte $K_1$ . . . . .	37
4.2	Verhalten in Karte $K_2$ . . . . .	39
4.3	Verhalten in Karte $K_3$ . . . . .	43
4.4	Globale Dynamik im Takens Bogdanov Punkt . . . . .	45
4.4.1	Die Dynamik auf $S^3$ . . . . .	47
4.4.2	Das Verhalten von $\bar{S}_h$ . . . . .	49
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>50</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben die Änderung eines Zustandes  $x$  in Abhängigkeit von der Zeit und von einem oder mehreren Parametern  $\mu$ :

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^k. \quad (1.1)$$

Für gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es eine gut entwickelte geometrische Theorie, die versucht, in der Nähe von Ruhelagen und periodischen Orbits, das qualitative Verhalten der Lösungen zu bestimmen. Für eine umfassende Beschreibung der geometrischen Theorie verweisen wir auf die Lehrbücher ([15], [7]).

Besitzt die an einer Ruhelage linearisierte Differentialgleichung nur Eigenwerte, die nicht auf der imaginären Achse liegen, erhält man das Phasenportrait der nichtlinearen Gleichung in einer Umgebung der Ruhelage durch eine zumindest stetige Abbildung aus dem Phasenportrait der entsprechenden linearen Gleichung. Das qualitative Verhalten von Gleichungen dieser Art ändert sich durch kleine Störungen der rechten Seite nicht.

Besitzt die Linearisierung einer Differentialgleichung Eigenwerte auf der imaginären Achse, können schon kleinste Störungen zu einer Veränderung des qualitativen Verhaltens führen. Parameterwerte, für die solche Veränderungen auftreten, werden Verzweigungspunkte genannt. Verzweigungen werden durch Familien von Differentialgleichungen der Art (1.1) beschrieben, die bezüglich kleiner Störungen stabil sind. Die minimale Anzahl von Parametern, die benötigt wird, um eine solche Familie zu beschreiben, wird als die Kodimension bezeichnet. Verzweigungen mit Kodimension 1 sind die saddle node- und die Hopfverzweigung. Die bekannteste Kodimension 2 Verzweigung ist die Takens Bogdanov Verzweigung, die durch das System

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \mu + \nu y + x^2 - xy \end{aligned} \quad (1.2)$$

vollständig beschrieben wird. Diese Verzweigung tritt in Differentialgleichungen mit doppeltem Nulleigenwert mit geometrischer Vielfachheit eins auf.

Verzweigungen mit niedriger Kodimension sind oft in Verzweigungen mit einer höheren Kodimension enthalten. Die Takens Bogdanov Verzweigung enthält saddle node, Hopf- und homokline Verzweigungen. Für Verzweigungen mit Kodimension 1 oder 2 gibt es eine gut entwickelte mathematische Theorie.

Die Verzweigungstheorie untersucht die Änderung des Verhaltens von Systemen (1.1) bei quasistatischer Änderung des Parameters  $\mu$ . In vielen Anwendungen sind die Parameter aber nicht konstant, sondern variieren langsam. Solche Systeme werden durch singular gestörte Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, \epsilon) \\y' &= \epsilon g(x, y, \epsilon),\end{aligned}\tag{1.3}$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$  und  $(\ )' = \frac{d}{dt}$  gilt, beschrieben. Allgemein beschreiben solche Gleichungen Systeme, deren Dynamik auf stark unterschiedlichen Zeitskalen stattfindet. In diesem System variiert  $y$  für  $0 < \epsilon \ll 1$  langsam. Für  $\epsilon = 0$  erhält man das Grenzschichtproblem

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, 0) \\y' &= 0,\end{aligned}\tag{1.4}$$

in dem  $y$  die Rolle eines Parameters spielt. Die Menge der Ruhelagen dieser Gleichung ist  $S := \{(x, y) : f(x, y, 0) = 0\}$ . Mit der Transformation  $t = \tau\epsilon$  erhält man das äquivalente System:

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{x} &= f(x, y, \epsilon) \\\dot{y} &= g(x, y, \epsilon).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Setzt man in diesem System  $\epsilon = 0$ , erhält man das reduzierte Problem, das die langsame Dynamik auf  $S$  beschreibt. Für die Menge der Ruhelagen  $S_H \subseteq S$ , für die  $\frac{\partial f}{\partial x}$  nur Eigenwerte mit Realteil ungleich Null besitzt, läßt sich durch Kombination der Dynamik des reduzierten und des Grenzschichtproblems auf das Verhalten der Lösungen der ursprünglichen Gleichung (1.3) schließen. Die Menge  $S_H$  wird zu einer langsamen  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $S_\epsilon$ , die  $C^k$ -nahe zu  $S_H$  liegt und die langsame Dynamik enthält. Die invarianten stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten von  $S_H$  des Grenzschichtproblems werden zu invarianten stabilen und instabilen  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten von  $S_\epsilon$ . Für Ruhelagen mit Eigenwerten auf der imaginären Achse kann man diese Theorie nicht anwenden. Diese Ruhelagen sind Verzweigungspunkte des Grenzschicht Problems und müssen getrennt untersucht werden.

An diesem Punkt setzt diese Diplomarbeit an: Es wird eine Differentialgleichung betrachtet, in deren Grenzschicht Problem die Takens Bogdanov Verzweigung auftritt. Oder anders formuliert, es wird die Takens Bogdanov

Verzweigung mit einem langsam variierenden Parameter untersucht:

$$\begin{aligned}x' &= f^1(x, y, \mu, \epsilon) = y + O(3) \\y' &= f^2(x, y, \mu, \epsilon) = \mu + \nu y + x^2 - xy + O(3) \\ \mu' &= \epsilon g(x, y, \mu, \epsilon) = \epsilon(1 + O(1)).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Wir gehen dabei folgendermaßen vor. In Kapitel 2 führen wir die blow-up Methode ein und beschreiben die Takens Bogdanov Verzweigung unter Verwendung dieser Methode. In Kapitel 3 untersuchen wir die Gleichung (1.6) für  $\nu < 0$ . Wir beschreiben das Verhalten der langsamen ( $S_\epsilon$ ), stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten in einer Umgebung der Mannigfaltigkeit  $S_H$ , des saddle node Punktes und des homoklinen Orbits des Grenzschichtproblems. Der Hauptteil dieses Kapitels besteht aus der Beschreibung des Verhaltens in einer Umgebung des saddle-node Punktes. In Kapitel 4 untersuchen wir die Gleichung (1.6) für  $\nu = 0$ . Für  $\mu < 0$  besitzt das Grenzschichtproblem eine Kurve mit abstoßenden Ruhelagen  $S_r$ , eine Kurve mit hyperbolischen Ruhelagen  $S_h$  und für  $\mu = 0$  eine Ruhelage mit doppeltem Nulleigenwert. Wir untersuchen das Verhalten der zugehörigen langsamen Mannigfaltigkeiten in einer Umgebung dieser Ruhelage mit Hilfe der blow-up Methode. Es wird gezeigt, daß die Painleve Gleichung I eine Art Normalform für das Verhalten dieses Systems ist.

Ich möchte Ao. Univ. Prof. Szmolyan für die Betreuung dieser Diplomarbeit danken. Außerdem möchte ich mich bei meinen Kollegen am Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, Martin Krupa, Klemens Fellner, Alexandra Milik, Martin Wechselberger und Magali Grassin und bei meinem Studienkollegen Christopher Ede für die Aufmunterung und Unterstützung beim Fertigstellen dieser Diplomarbeit bedanken.

## Kapitel 2

# Takens Bogdanov Verzweigung

Die Takens Bogdanov Verzweigung tritt bei Differentialgleichungen auf, die eine Ruhelage mit einem linearen Teil mit doppeltem Nulleigenwert der geometrischen Vielfachheit eins besitzen. Die Gleichung

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= \mu + \nu y + x^2 + bxy\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit  $x, y, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ ,  $b = \pm 1$ , besitzt im Nullpunkt eine Ruhelage dieser Art. Sie beschreibt lokal um den Punkt  $(x, y, \mu, \nu) = (0, 0, 0, 0)$  das qualitative Verhalten einer Differentialgleichung mit einer Takens Bogdanov Verzweigung und einer rechten Seite der Klasse  $C^\infty$  vollständig.

**Definition 1** *Eine Gleichung  $x' = f(x, \lambda)$  mit  $f$  aus  $C^\infty$  wird eine  $C^0$ -äquivalente versale Deformation von  $x' = f(x, \lambda_0)$  in  $x_0$  genannt, wenn jede andere parametrisierte Familie von  $C^\infty$  Differentialgleichungen, die für eine spezielle Wahl von Parametern zu  $x' = f(x, \lambda_0)$  wird, lokal um den Punkt  $x_0$   $C^0$ -äquivalent zu einer Familie von Differentialgleichungen der Form  $x' = f(x, \Phi(\lambda))$  ist, wobei  $\Phi$  in einer Umgebung von  $\lambda_0$  stetig ist.*

**Satz 1** *Gleichung (2.1) ist eine versale Deformation der Takens Bogdanov Verzweigung.*

Beweis: [15] S. 321 oder [7] S.364  $\square$

In diesem Kapitel werden wir das qualitative Verhalten einer Gleichung mit einer Takens Bogdanov Verzweigung mit Hilfe der blow-up Methode beschreiben. Dazu betrachten wir die etwas allgemeinere Differentialgleichung

$$\begin{aligned}x' &= y + O(3) \\ y' &= \mu + \nu y + x^2 - xy + O(3)\end{aligned}\tag{2.2}$$

mit  $x, y, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ , wobei mit  $O(3)$  Terme der Ordnung 3 in  $x, y, \mu, \nu$  bezeichnet werden.

Diese Gleichung beschreibt den Fall  $b = -1$ . Den Fall  $b = +1$  erhält man daraus über die Transformation  $(x, y, \mu, \nu, t) \rightarrow (x, -y, \mu, -\nu, -t)$ .

## 2.1 Blow-up

Die Koordinatentransformation (blow-up im Parameter-Raum)

$$\begin{aligned} \Psi : \{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+ \times S_2\} &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\bar{x}, \bar{y}, r, \bar{\mu}, \bar{\nu}) &\longrightarrow (x, y, \mu, \nu) = (r^2 \bar{x}, r^3 \bar{y}, r^4 \bar{\mu}, r^2 \bar{\nu}) \end{aligned}$$

mit  $\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2 = 1$  ist eine surjektive  $C^\infty$  Abbildung. Wenden wir diese Transformation auf (2.2) an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= r\bar{y} + O(r^4) \\ \bar{y}' &= r\bar{\mu} + r\bar{x}^2 + r^2(\bar{\nu}\bar{y} - \bar{x}\bar{y}) + O(r^3). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Menge  $\{r = 0\}$  entspricht dem Punkt  $x = y = \mu = \nu = 0$ . Für  $r > 0$  ist die letzte Gleichung für  $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$  zu (2.2) äquivalent, da  $\Psi$  auf diesem Gebiet ein  $C^\infty$  Diffeomorphismus ist.

Die Zeittransformation  $\bar{t} = rt$  läßt für  $r > 0$  die Orbits gleich, sie ändert nur ihre Zeit-Parametrisierung. Die neue Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{y} + O(r^3) \\ \bar{y}' &= \bar{\mu} + \bar{x}^2 + r(\bar{\nu}\bar{y} - \bar{x}\bar{y}) + O(r^2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

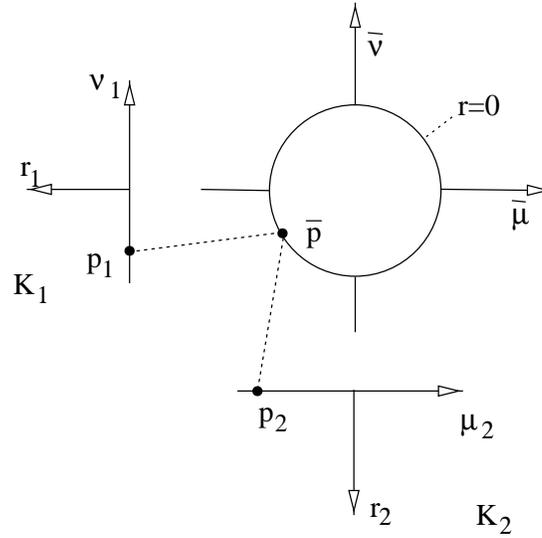
Diese Differentialgleichung ist auch für  $r = 0$  sinnvoll. Für  $r > 0$  ist sie zu (2.3) äquivalent. Auf der Menge  $\{r = 0\}$  ist die Gleichung (2.4) ausreichend regulär, um sie mit relativ einfachen Methoden in einer Umgebung von  $\{r = 0\}$  zu untersuchen und auf ihr allgemeines Verhalten zu schließen. Wir werden sie mit der Hilfe zweier Karten untersuchen (Abb 2.1). Diese Karten kann man sich als stereographische Projektionen der Kugel-Oberfläche  $\{\mu^2 + \nu^2 = 1\}$  mit unterschiedlichen Gewichten vorstellen.

- Karte  $K_1$ : für  $\mu < 0$  setzen wir  $\bar{\mu} = -1$  und erhalten

$$x = r_1^2 x_1, \quad y = r_1^3 y_1, \quad \mu = -r_1^4, \quad \nu = r_1^2 \nu_1, \quad t = \frac{t_1}{r_1}$$

und

$$x_1 = (-\bar{\mu})^{-1/2} \bar{x}, \quad y_1 = (-\bar{\mu})^{-1/3} \bar{y}, \quad r_1 = r(-\bar{\mu})^{1/4}, \quad \nu_1 = (-\bar{\mu})^{-1/2} \bar{\nu}.$$


 Abbildung 2.1: Blow-up Koordinaten und Karten  $K_1$ ,  $K_2$ 

- Karte  $K_2$ : für  $\nu < 0$  setzen wir  $\bar{\nu} = -1$  und erhalten

$$x = r_2^2 x_2, \quad y = r_2^3 y_2, \quad \mu = r_2^4 \mu_2, \quad \nu = -r_2^2, \quad t = \frac{t_2}{r_2}$$

und

$$x_2 = (-\bar{\nu})^{-1} \bar{x}, \quad y_2 = (-\bar{\nu})^{-3/2} \bar{y}, \quad r_2 = r(-\bar{\nu})^{1/2}, \quad \mu_2 = (-\bar{\nu})^{-2} \bar{\mu}.$$

Man erhält die Differentialgleichung in der Karte  $K_1$ , indem man in der Gleichung (2.4)  $(\bar{x}, \bar{y}, r, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = (x_1, y_1, r_1, -1, \nu_1)$  setzt, und in der Karte  $K_2$  mit  $(\bar{x}, \bar{y}, r, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = (x_2, y_2, r_2, \mu_2, -1)$ .

## 2.2 Lokales und globales Verhalten

Die Ruhelagen der Differentialgleichung (2.1) liegen lokal um  $(x, y, \mu, \nu) = 0$  auf der Parabel  $\{x^2 + \mu = 0, y = 0\}$ . Die Ruhelagen haben folgendes lokales Verhalten: Ruhelagen mit  $x > 0$  sind für alle  $\nu, \mu < 0$  Sattelpunkte. Für Ruhelagen mit  $x < 0$  treten anziehende und abstoßende Knoten oder Foci und entlang einer Kurve  $\mu = \mu(\nu)$  eine Hopfverzweigung auf. Für  $x = \mu = 0$  tritt eine saddle node und für  $x = \mu = \nu = 0$  die Takens Bogdanov Verzweigung (Abb. 2.2a) auf. Des weiteren entsteht bei der Hopfverzweigung ein periodischer Orbit, der sich bis zu einem homoklinen Orbit vergrößert und dann verschwindet ([15] Wiggins S.321 für den Fall  $b = 1$ , [3] Dumortier S. 227 für den Fall  $b = -1$ ). Die Phasenportraits zum Verzweigungsdiagramm von Gleichung (2.1) für den Fall  $b = -1$  sind in Abbildung 2.3 ([3]

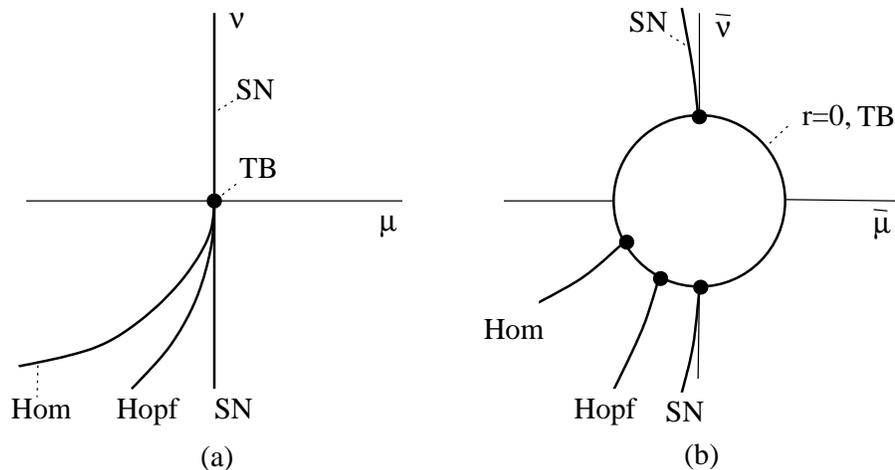


Abbildung 2.2: Verzweigungs-Diagramm des Takens Bogdanov Punktes

S.229) dargestellt. Die Gleichung (2.2) besitzt das gleiche qualitative Verhalten und daher auch die gleichen Phasenportraits. Dieses Verhalten werden wir für die Differentialgleichung (2.2) mit Hilfe des blow-up beschreiben (Abb. 2.2b).

## 2.3 Saddle node Verzweigung

**Satz 2** *Es existiert eine eindeutige Kurve SN:  $\mu = \mu_{SN}(\nu)$  mit*

$$\mu_{SN} = O(|\nu|^3), \quad \nu < 0, \quad (2.5)$$

*entlang der die Gleichung (2.2) für  $(x, y) = (O(|\nu|^2), O(|\nu|^3))$  eine saddle node Verzweigung besitzt.*

Beweis: Um diese zu berechnen verwenden wir die Karte  $K_2$ . Die Differentialgleichung (2.4) lautet in  $K_2$

$$\begin{aligned} x_2' &= y_2 + O(r_2^3) \\ y_2' &= \mu_2 + x_2^2 - r_2(y_2 + x_2 y_2) + O(r_2^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

(Im folgenden lassen wir den Index 2 weg.) Sei  $f$  die rechte Seite von (2.6). Die Ruhelagen nahe  $\mu = 0$  der Gleichung (2.6) sind wegen

$$\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(\mu, y)} = \begin{pmatrix} O(r^3) & 1 + O(r^3) \\ 1 + O(r^2) & O(r^2) \end{pmatrix} \text{ regulär in } r = x = y = \mu = 0$$

durch die Kurve

$$(\mu, y) = \varphi(x, r) = (-x^2 + O(r^2), O(r^3))$$

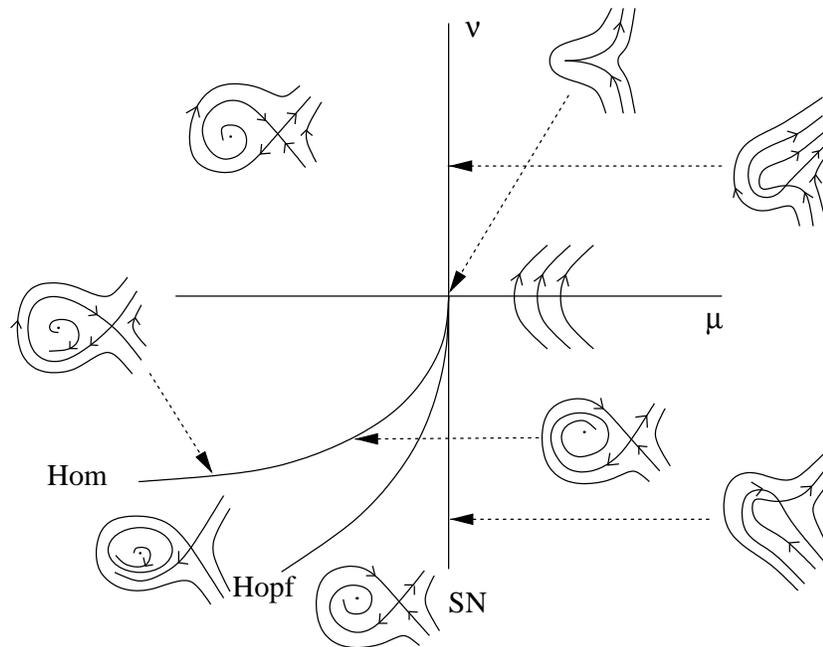


Abbildung 2.3: Takens Bogdanov Verzweigung

gegeben (Folgerung aus dem Hauptsatz über Implizite Funktionen). Wir betrachten

$$A = Df|_{(\mu,y)=(-x^2+O(r^2),O(r^3))} = \begin{pmatrix} O(3) & 1 + O(3) \\ 2x - ry + O(2) & -r(1+x) + O(2) \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung  $\det(A) = 2x + O(r^2) = 0$  ist wegen  $\frac{\partial \det(A)}{\partial x} \neq 0$  für  $x_{SN}$  mit  $x_{SN} = \varphi(r) = O(r^2)$  erfüllt (daraus folgt  $\lambda_1 = 0$ ). Hiermit gilt

$$\text{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 + \lambda_2 = -r + O(r^2)$$

und wir haben einen Kandidaten für eine saddle node Verzweigung gefunden. In  $(x, y)_{SN}$  besitzt (2.6) eine stabile Zentrumsmannigfaltigkeit. Die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r(1+x) + O(r^2)}{2} \pm \sqrt{2x + O(r^2)}$$

und obige Rechnungen zeigen, daß für  $x > x_{SN}$  ein Sattel und für  $x < x_{SN}$  ein anziehender Fokus auftritt. Der Vorzeichen-Wechsel der Determinante tritt genau bei  $x = x_{SN}$  auf, sonst ist diese ungleich Null. Damit sieht das Verhalten auf der Zentrumsmannigfaltigkeit nahe  $x = 0$  wie in Abbildung 2.4 dargestellt aus. Der saddle node Punkt tritt daher in der Karte  $K_2$  für

$$\mu_2 = O(r_2^2)$$

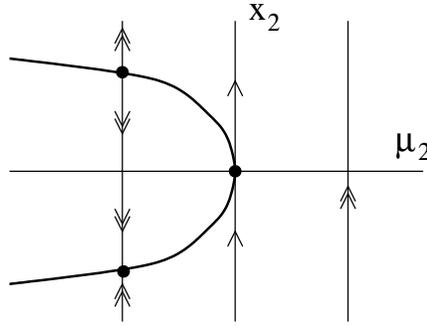


Abbildung 2.4: Saddle node Verzweigung

für  $(x_2, y_2) = (O(r^2), O(r^3))$  auf und in den ursprünglichen Koordinaten für

$$\mu = O(|\nu|^3), (x, y) = (O(|\nu|^2), O(|\nu|^3)), \nu < 0.$$

□

## 2.4 Hopfverzweigung

**Satz 3** In der Differentialgleichung (2.2) tritt eine superkritische Hopfverzweigung entlang einer eindeutigen Kurve Hopf:  $\mu = \mu_{\text{Hopf}}(\nu)$  mit

$$\mu_{\text{Hopf}} = -\nu^2 + O(|\nu|^{\frac{5}{2}}), \nu < 0 \quad (2.7)$$

in  $(x, y) = (-\nu + O(|\nu|^{3/2}), O(|\nu|^3))$  auf.

Beweis: Zur Berechnung dieser Kurve verwenden wir wieder die Karte  $K_2$ . (Im folgenden lassen wir den Index 2 weg.)

Für  $r = 0$  treten Nullstellen in  $(x, y) = (\pm\sqrt{-\mu}, 0)$  auf. Sei  $f$  die rechte Seite von (2.6), so gilt

$$Df = \frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} O(3) & 1 + O(3) \\ 2x - ry + O(2) & -r(1+x) + O(2) \end{pmatrix}.$$

Für  $\mu < 0$  ist  $\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(x, y)}|_{(x, y) = (\pm\sqrt{-\mu}, 0)}$  regulär und es gilt:

Lokal existiert ein  $\varphi$  mit  $(x, y) = \varphi(r, \mu)$ , sodaß  $f \circ \varphi(r, \mu) = 0$  erfüllt ist, wobei  $\varphi(r, \mu) = (\pm\sqrt{-\mu} + O(r^2), O(r^3))$  gilt (folgt aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen). Der lineare Teil von (2.6) an den Nullstellen  $(x_N, y_N) = (\pm\sqrt{-\mu} + O(r^2), O(r^3))$  lautet

$$A = Df|_{(x_N, y_N)} = \begin{pmatrix} O(3) & 1 + O(3) \\ \pm 2\sqrt{-\mu} + O(2) & -r(1 \pm \sqrt{-\mu}) + O(2) \end{pmatrix}.$$

Eine Hopfverzweigung bedeutet ein Paar rein imaginärer Eigenwerte, deren Realteil das Vorzeichen wechselt. Dabei entsteht eine Familie von stabilen ( $a < 0$ ) oder instabilen periodischen Orbits ( $a > 0$ ) auf einer Seite des Hopfpunktes.

Für den Ast  $x_N = -\sqrt{-\mu} + O(r^2)$  tritt bei  $r > 0$  konstant, für  $\mu = \mu^*$  in der Differentialgleichung (2.6) eine Hopfverzweigung auf, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind ([15] Wiggins S. 270):

Für die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}(\mu) = \frac{Sp(A)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Sp(A)}{2}\right)^2 - \det A}$  gilt an den Nullstellen

$$\begin{aligned} Re(\lambda_{1,2}(\mu^*)) &= 0, \\ d = \frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \mu} &\neq 0, \\ Im(\lambda_{1,2}(\mu^*)) &\neq 0, \\ a &\neq 0 \end{aligned}$$

wobei für die Berechnung von

$$\begin{aligned} a = & \frac{1}{16} [f_{xxx}^1 + f_{xyy}^1 + f_{xxy}^2 + f_{yyy}^2] + \\ & + \frac{1}{16\omega} [f_{xy}^1 (f_{xx}^1 + f_{yy}^1) - f_{xy}^2 (f_{xx}^2 + f_{yy}^2) - f_{xx}^1 f_{xx}^2 + f_{yy}^1 f_{yy}^2] \end{aligned}$$

die Differentialgleichung für  $\mu = \mu^*$  in folgende Form gebracht werden muß

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^1(x, y) \\ f^2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

In unserem Fall gilt für die Eigenwerte  $Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{r}{2}(1 - \sqrt{-\mu} + O(r^1))$ .

Da

$$1 - \sqrt{-\mu} + O(r^1) = 0, \quad \frac{\partial(1 - \sqrt{-\mu} + O(r^1))}{\partial \mu} = \frac{1}{2}$$

für  $\mu = -1$ ,  $r = 0$  erfüllt ist, existiert lokal um  $(\mu, r) = (-1, 0)$  ein  $\varphi$ , sodaß  $\mu^* = \varphi(r) = -1 + O(r)$  und  $1 - \sqrt{-\mu} + O(r) = 0$  erfüllt sind. Weiter gilt für  $r > 0$

$$\begin{aligned} Re(\lambda_{1,2}(\mu^*)) &= 0, \\ d = -\frac{r}{4}(1 + O(r)) &< 0, \\ Im(\lambda_{1,2}(\mu^*)) &= \pm\sqrt{2 + O(r)} \neq 0 \end{aligned}$$

für  $r$  hinreichend klein.

Zur Berechnung von  $a$  verschieben wir zuerst die Nullstellen nach  $(x, y) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - x_N = x + \sqrt{-\mu} + O(r^2) \\ \bar{y} &= y - y_N = y + O(r^3) \end{aligned}$$

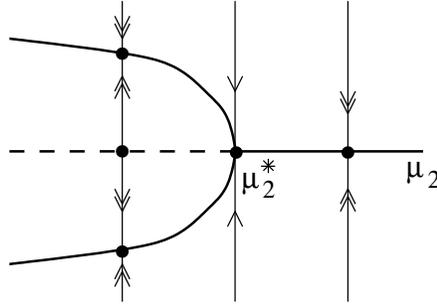


Abbildung 2.5: Hopfverzweigung

und wenden die folgende Koordinatentransformation an

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2\sqrt{-\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir eine Differentialgleichung in der Form (2.8) mit

$$\begin{aligned} u' &= \sqrt{2\sqrt{-\mu}}v + O(r^2) \\ v' &= -\sqrt{2\sqrt{-\mu}}u - \frac{1}{\sqrt{-\mu}}u^2 - rv(1 + u - \sqrt{-\mu}) + O(r^2) \end{aligned}$$

und

$$a = \frac{-1}{\sqrt{-\mu}} \left( r \left( \frac{1}{\sqrt{-\mu}} - O(r) \right) \right) < 0$$

für ein ausreichend kleines  $r$ .

Das bedeutet, wir haben eine superkritische Hopfverzweigung, mit stabilem periodischen Orbit, mit einer abstoßenden Ruhelage links und einer anziehenden Ruhelage rechts vom Hopfpunkt (Abb. 2.5). In den ursprünglichen Koordinaten wird die Kurve der Hopfpunkte durch

$$\mu = -\nu^2 + O(|\nu|^{5/2}), \quad (x, y) = (-\nu + O(|\nu|^{3/2}), O(|\nu|^3)), \quad \text{mit } \nu \leq 0$$

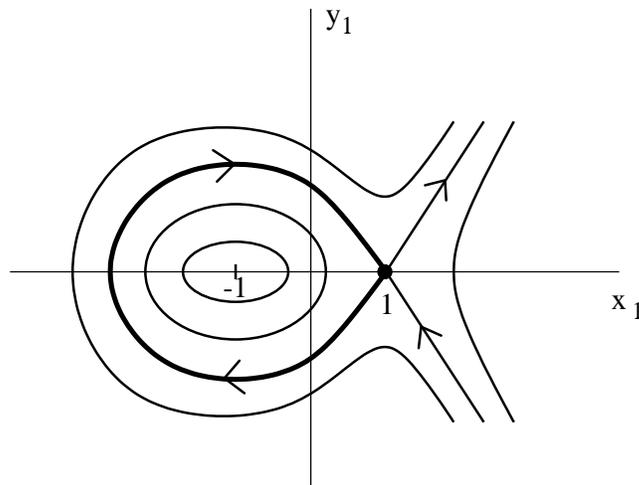
beschrieben.  $\square$

## 2.5 Homokliner Orbit

**Satz 4** *Es existiert eine eindeutige Kurve  $Hom: \mu = \mu_{Hom}(\nu)$  mit*

$$\mu_{Hom} = -\frac{49}{25}\nu^2 + O(|\nu|^{5/2}), \quad \nu < 0, \quad (2.9)$$

*entlang der die Gleichung (2.2) einen homoklinen Orbit besitzt.*


 Abbildung 2.6: Niveaulinien von  $H$ 

Beweis: Diesen Orbit werden wir in Karte  $K_1$  unter Verwendung der Melnikov Methode [15] berechnen.

Die Differentialgleichung (2.4) lautet in  $K_1$

$$\begin{aligned} x_1' &= y_1 + O(r_1^3) \\ y_1' &= -1 + x_1^2 + r_1(\nu_1 y_1 - x_1 y_1) + O(r_1^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Für  $r_1 = 0$  erhält man das Hamiltonsche System

$$\begin{aligned} x_1' &= y_1 \\ y_1' &= -1 + x_1^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

mit den Ruhelagen  $(x_1, y_1) = (\pm 1, 0)$  und der Hamiltonfunktion

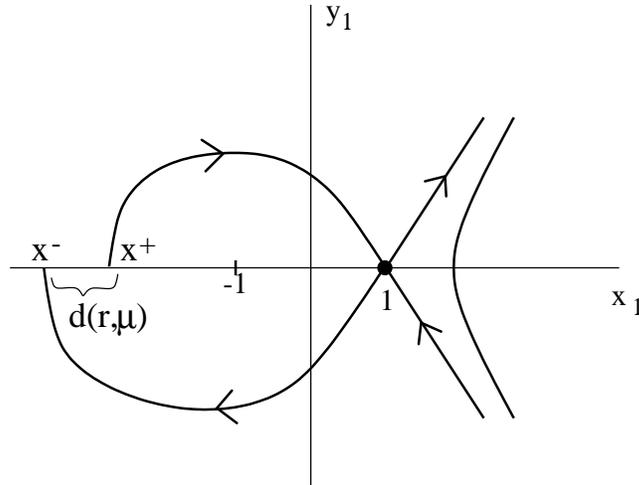
$$H(x_1, y_1) = y_1^2 + x_1 - \frac{x_1^3}{3}.$$

(Im folgenden lassen wir den Index 1 weg.) Die Lösungskurven der Differentialgleichung, die den Niveaulinien  $H = \text{konstant}$  (Abb. 2.6) entsprechen, enthalten auch einen homoklinen Orbit. Dieser homokline Orbit bleibt für gewisse Parameter-Werte  $\nu = \nu(r)$  für  $r > 0$  erhalten.

Die Existenz der hyperbolischen Ruhelage  $p = (1, 0)$  bei  $(r, \nu) = (0, 0)$  impliziert die Existenz einer hyperbolischen Ruhelage  $p_{r,\nu}$  für  $(r, \nu) \approx (0, 0)$ . Ein homokliner Orbit entspricht dem Schnitt der stabilen Mannigfaltigkeit  $W^s(p_{r,\nu})$  und der instabilen Mannigfaltigkeit  $W^u(p_{r,\nu})$ . Wir definieren die glatte Distanzfunktion

$$d(r, \nu) := x^+ - x^-,$$

wobei  $x^+$  bzw.  $x^-$  die Schnittpunkte von  $W^s(p_{r,\nu})$  bzw.  $W^u(p_{r,\nu})$  mit der  $x$ -Achse sind (Abb. 2.7). Die Funktion  $d(r, \nu)$  mißt die Distanz von  $W^s(p_{r,\nu})$


 Abbildung 2.7: Die Distanz von  $W^s(p_{r,\nu})$  und  $W^u(p_{r,\nu})$ 

und  $W^u(p_{r,\nu})$ .

Bei unserer Gleichung (2.10) existiert für  $r = 0$  ein homokliner Orbit für alle  $\nu$ . Das bedeutet  $d(0, \nu) = 0$ . Daher folgt

$$d(r, \nu) = r\bar{d}(r, \nu) = r\left(\frac{\partial \bar{d}}{\partial r}(0, \nu) + O(r)\right)$$

mit  $M(\nu) = \frac{\partial \bar{d}}{\partial r}(0, \nu)$ . Uns interessiert  $d(r, \nu) = 0$  für  $r \neq 0$ . Wegen den Gleichungen  $\bar{d}(0, \nu^*) = M(\nu^*) = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{d}}{\partial \nu}(0, \nu^*) = \frac{\partial M}{\partial \nu}(\nu^*) \neq 0$  existiert nach dem Hauptsatz über Implizite Funktionen ein  $\varphi$ , sodaß lokal um den Punkt  $(r, \nu) = (0, \nu^*)$  genau für  $\nu = \varphi(r)$ , die Gleichung  $\bar{d}(r, \varphi(r)) = 0$  gilt. Die Funktion  $M(\nu)$  ist durch das Melnikov Integral

$$M(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} -\dot{y}_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r}(x_0(t), y_0(t), 0) dt$$

bestimmt, wobei  $(x_0(t), y_0(t))$  der homokline Orbit des Hamiltonschen Systems ist und  $f$  die rechte Seite der Gleichung (2.10) ist. Für  $f$  gilt  $\frac{\partial f}{\partial r}|_{r=0} = (0, \nu y_0 - x_0 y_0)^T$  und damit

$$M(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} (\nu y_0 \dot{x}_0 - x_0 y_0 \dot{x}_0) dt = \nu \int_{-\infty}^{\infty} y_0^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} x_0 y_0^2 dt.$$

Wegen  $\int_{-\infty}^{\infty} y_0^2 dt \neq 0$  ist für  $\nu^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_0 y_0^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} y_0^2 dt}$  die Gleichung

$$M(\nu^*) = 0$$

erfüllt. Wegen  $\frac{\partial M}{\partial \nu}(\nu^*) = \int_{-\infty}^{\infty} y_0^2 dt > 0$  gilt die Ungleichung

$$\frac{\partial \bar{d}}{\partial \nu}(0, \nu^*) = \frac{\partial M}{\partial \nu}(\nu^*) > 0$$

für ein ausreichend kleines  $r$ .

Die Integrale in der Definition von  $\nu^*$  können explizit berechnet werden ([15] S.592,593). Man erhält  $\nu^* = -\frac{5}{7}$  und damit

$$\bar{d}(r, \nu) = 0 \text{ für } \nu = \varphi(r) = -\frac{5}{7} + O(r).$$

Mit  $\mu = -r_1^4$ ,  $\nu = r_1^2(-\frac{5}{7} + O(r_1))$  erhält man im ursprünglichen Koordinatensystem

$$\mu = -\frac{49}{25}\nu^2 + O(|\nu|^{5/2}).$$

□

## 2.6 Periodische Orbits

**Satz 5** *Für  $\mu_{Hom}(\nu) < \mu < \mu_{Hopf}(\nu)$  besitzt das System (2.2) genau einen periodischen Orbit, der in  $\mu = \mu_{Hopf}$  entsteht und kontinuierlich wächst, bis er bei  $\mu = \mu_{Hom}$  endet.*

Beweis: [3] Dumortier S.236 □

## 2.7 Allgemeines

Analoge Berechnungen sind auch für den blow-up in Richtung  $\nu > 0$  und  $\mu > 0$  möglich, um das Verhalten der Lösungen in diesen Bereichen des Phasenraumes zu beschreiben. So erhält man das in Abbildung 2.3 dargestellte Phasenportrait in einer Umgebung von  $(x, y, \mu, \nu) = 0$ .

## Kapitel 3

# Die Takens Bogdanov Verzweigung mit einem langsam variierenden Parameter für $\nu < 0$

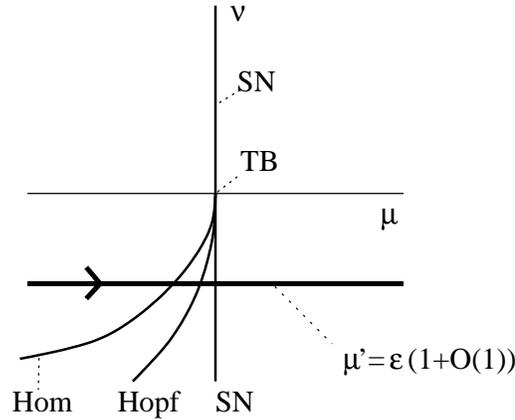
Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}x' &= f^1(x, y, \mu, \epsilon) = y + O(3) \\y' &= f^2(x, y, \mu, \epsilon) = \mu + \nu y + x^2 - xy + O(3) \\ \mu' &= \epsilon g(x, y, \mu, \epsilon) = \epsilon(1 + O(1))\end{aligned}\tag{3.1}$$

mit  $x, y, \mu, \nu, \epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\nu < 0$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$ , wobei die  $O(i)$  Terme  $i$ -ter Ordnung in  $x, y, \epsilon$  sind.

Die Gleichung (3.1) entspricht der Gleichung (2.2) mit einem langsam variierenden Parameter  $\mu$ . Für  $\epsilon = 0$  tritt die in Kapitel 2 untersuchte Differentialgleichung (2.2) auf.

Wir werden das Verhalten der Differentialgleichung (3.1) für  $\nu < 0$  und konstant, möglichst genau beschreiben. Für reguläre Punkte der Gleichung (2.2) können wir die Fenicheltheorie [4] anwenden. Für den homoklinen Orbit und den saddle node Punkt werden wir Resultate aus den Artikeln von Szmolyan [13], [14] verwenden. Der singular gestörte Hopfpunkt wird in Neistadt [12] und Lobry [11] behandelt. Die Ergebnisse von Neistadt [12] können direkt auf diesen Fall angewendet werden.


 Abbildung 3.1: TB mit langsam variierendem  $\mu$ 

### 3.1 Reguläre Punkte

Die Differentialgleichung (3.1) bezeichnet man als das schnelle System und  $\tau$  als die schnelle Zeit. Die Wahl  $\epsilon = 0$  ergibt das Grenzschicht-Problem

$$\begin{aligned} x' &= f^1(x, y, \mu, 0) = y + O(3) \\ y' &= f^2(x, y, \mu, 0) = \mu + \nu y + x^2 - xy + O(3) \\ \mu' &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

das die schnelle Dynamik von (3.1) beschreibt. Das System (3.2) entspricht der im vorigen Kapitel untersuchten Gleichung (2.2).

Führen wir in Gleichung (3.1) für  $\epsilon \neq 0$  die Zeit-Transformation  $t = \epsilon\tau$  auf die langsame Zeit  $t$  durch, so erhalten wir das langsame (äquivalente) System

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x} &= f^1(x, y, \mu, \epsilon) = y + O(3) \\ \epsilon \dot{y} &= f^2(x, y, \mu, \epsilon) = \mu + \nu y + x^2 - xy + O(3) \\ \dot{\mu} &= g(x, y, \mu, \epsilon) = (1 + O(1)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Wahl  $\epsilon = 0$  führt auf das reduzierte Problem

$$\begin{aligned} 0 &= f^1(x, y, \mu, 0) = y + O(3) \\ 0 &= f^2(x, y, \mu, 0) = \mu + \nu y + x^2 - xy + O(3) \\ \dot{\mu} &= g(x, y, \mu, 0) = (1 + O(1)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die kritische Mannigfaltigkeit  $S_0 := \{f^1(x, y, \mu, 0) = 0, f^2(x, y, \mu, 0) = 0\}$  (Abb.3.3) enthält genau die Ruhelagen des Grenzschicht-Problems (3.2). Für die Punkte auf  $S_0$ , für die  $\det(\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(x, y)}) \neq 0$  gilt, existiert lokal ein  $\varphi$ , sodaß für  $(x, y) = \varphi(\mu)$  für  $i = 1, 2$ ,  $f^i(\varphi(\mu), \mu) = 0$  erfüllt ist (Folgerung

aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen). Für diese Punkte kann die Dynamik auf  $S_0$  mit der dritten Gleichung des reduzierten Problems (3.4) beschrieben werden:

$$\dot{\mu} = g(\varphi(\mu), \mu, 0).$$

$S_0$  ist in einer Umgebung  $U$  des Koordinatenursprungs durch

$$(y, \mu) = (O(x^3), -x^2 + O(x^3))$$

gegeben. Damit läßt sich die Linearisierung auf  $S_0 \cap U$  folgendermaßen beschreiben

$$A = \frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(x, y)} \Big|_{s_0} = \begin{pmatrix} O(x^2) & 1 + O(x^2) \\ 2x + O(x^2) & \nu - x + O(x^2) \end{pmatrix}.$$

Es gilt:  $\det(A) = 2x + O(x^2) = 0$  ist genau dann erfüllt, wenn  $x = 0$  gilt. Daher tritt die saddle node Verzweigung für (3.2) im Punkt  $x = y = \mu = 0$  auf.

Für  $\mu < 0$  und  $\mu \neq \mu_{Hopf}$  sind die Ruhelagen hyperbolisch und  $\varphi$  ist durch

$$x = \pm\sqrt{-\mu} + O(\mu), \quad y = O(|\mu|^{\frac{3}{2}})$$

bestimmt. Damit ist die Dynamik auf  $S_0$  durch

$$\dot{\mu} = 1 + O(\sqrt{-\mu})$$

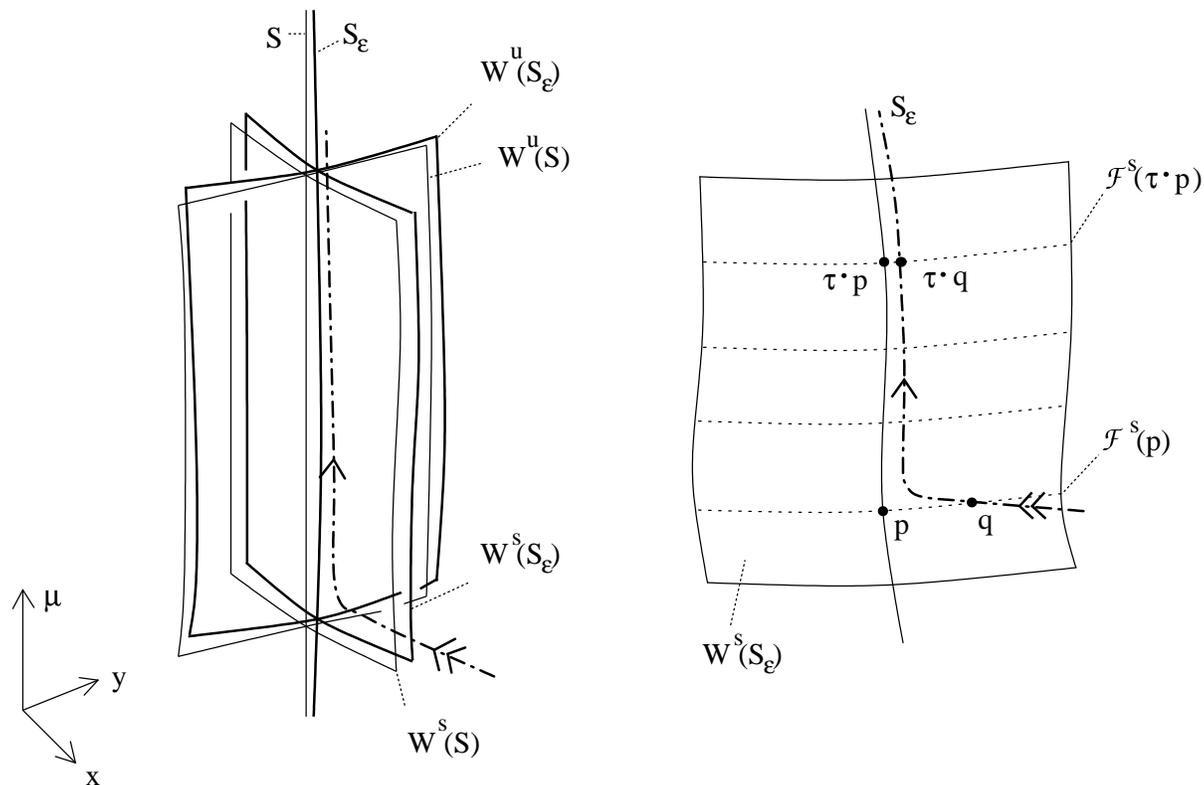
gegeben.

Die Punkte auf  $S_0$ , für die  $A$  Eigenwerte mit einem Realteil ungleich Null besitzt, nennt man die hyperbolischen Punkte  $S_H$ . Aus Kapitel 2.4 über die Hopfverzweigung wissen wir, daß für den Zweig  $S_0|_{x < 0}$  im Punkt  $\mu_{Hopf} = -\nu^2 + O((- \nu)^{\frac{5}{2}})$  eine Hopfverzweigung auftritt. Die Menge der hyperbolischen Nullstellen  $S_H$  von (3.2) zerfällt in 3 Teilmengen (Abb 3.3):

- $S_{H_1}$ :  $x > 0, \mu \leq \alpha_1 < 0$ , bestehend aus Sätteln,
- $S_{H_2}$ :  $x < 0, \mu_{Hopf} \leq \alpha_2 < \mu \leq \alpha_1 < 0$ , bestehend aus anziehenden Foci, und
- $S_{H_3}$ :  $x < 0, \mu \leq \alpha_3 < \mu_H$ , bestehend aus abstoßenden Foci.

In einer Umgebung von  $S_{H_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  beschreiben das Grenzschnitt- und das reduzierte Problem die wesentliche Dynamik. Genau gilt:

**Satz 6** Für  $f^1, f^2, g \in C^k$  besitzt die Takens Bogdanov Gleichung mit langsam variierendem  $\mu$  zu jedem  $S_{H_i}$  eine lokal invariante langsame  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $S_\epsilon$  und lokal invariante  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten  $W^s(S_\epsilon)$  und  $W^u(S_\epsilon)$  (Abb. 3.2(a)). Die Dynamik in  $W^s(S_\epsilon)$  ( $W^u(S_\epsilon)$ ) verhält sich gemäß einer  $C^{k-1}$  Blätterung von  $W^s(S_\epsilon)$  ( $W^u(S_\epsilon)$ ). Die Distanz von Orbits, die im gleichen


 Abbildung 3.2: Die langsame Mannigfaltigkeit  $S_\epsilon$ , Blätterung von  $W^s(S_\epsilon)$ 

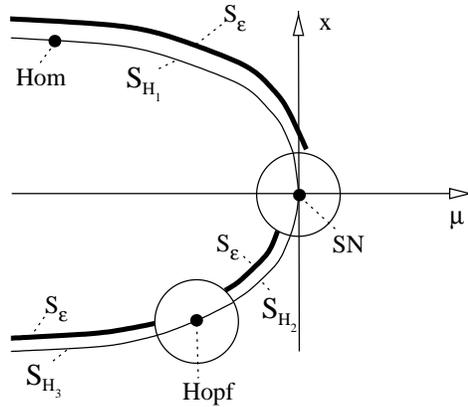
Blatt von  $F^s$  ( $F^u$ ) starten, nimmt schneller (langsamer) als  $e^{-a\tau}$  ( $e^{b\tau}$ ) ab (zu). Die positiven Konstanten  $a$  und  $b$  werden so gewählt, daß der Realteil des größten (kleinsten) negativen (positiven) Eigenwertes von  $\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(x, y)}$  kleiner als  $-a$  (größer als  $b$ ) ist. (Abb. 3.2)

Beweis: Siehe Fenichel [4].  $\square$

### 3.2 Der saddle node Punkt

Als nächstes werden wir die Differentialgleichung (3.1) in einer Umgebung des Punktes  $x = y = \mu = 0$  untersuchen. Dazu betrachten wir das erweiterte System

$$\begin{aligned}
 x' &= y + O(3) \\
 \mu' &= \epsilon(1 + O(1)) \\
 \epsilon' &= 0 \\
 y' &= \mu + \nu y + x^2 - xy + O(3).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$


 Abbildung 3.3:  $S_{H_i}, S_\epsilon$ 

Diese Differentialgleichung besitzt eine Ruhelage SN im Ursprung. Die Linearisierung im Ursprung ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet  $(-\lambda)^3(\nu - \lambda)$ .

**Lemma 1** Die Gleichung (3.5) besitzt im Ursprung eine 3-dimensionale stabile Zentrumsmannigfaltigkeit  $M^c$ , die tangential zu den Vektoren  $\{(1, 0, 0, 0), (0, -\nu, 0, 0), (0, 1, -\nu, 0)\}$  liegt.  $M^c$  enthält die Ruhelagen  $S_0$ . Weiters besitzt (3.5) eine 1-dimensionale stabile Mannigfaltigkeit  $M^s$  tangential zu  $(-1, 0, 0, -\nu)$  zum Eigenwert  $\nu$ . Es existiert eine stabile invariante Blätterung mit Basis  $M^c$  und 1-dimensionalen Fasern  $F^s$ . Für  $0 < c < -\nu$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $(0, 0, 0, 0)$ , sodaß die Kontraktion entlang  $F^s$  stärker als  $e^{-c\tau}$  ist.

Beweis: Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren und die Anwendung der Theorie der Zentrumsmannigfaltigkeiten [2] ergeben obigen Satz.  $\square$

### 3.2.1 Einschränkung auf die Zentrumsmannigfaltigkeit

Mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ \mu \\ \epsilon \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \tilde{\mu} \\ \tilde{\epsilon} \\ v \end{pmatrix}$$

lautet die Differentialgleichung (3.5) im Eigensystem

$$\begin{pmatrix} u' \\ \tilde{\mu}' \\ \tilde{\epsilon}' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \tilde{\mu} \\ \tilde{\epsilon} \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{\nu}u^2 + O^*(2) \\ \tilde{\epsilon}O(1) \\ 0 \\ O(2) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Wobei die  $O(i)$  Terme der Ordnung  $i$  in  $u, \tilde{\mu}, \tilde{\epsilon}, v$  und die  $O^*(2)$  Terme der Ordnung  $O(2)$  ohne den  $u^2$  Term sind. Diese Gleichung besitzt einen linearen Teil in Jordanscher Normalform.

Die dreidimensionale stabile Zentrumsmannigfaltigkeit im Punkt  $(0, 0, 0, 0)$  ist lokal durch eine Funktion  $h$  mit  $v = h(u, \tilde{\mu}, \tilde{\epsilon})$ , die  $h(0) = 0$ ,  $Dh(0) = 0$  erfüllt, gegeben (folgt aus der Theorie über Zentrumsmannigfaltigkeiten [15] Wiggins S. 194). Daraus folgt  $h = O(2)$ . Die Differentialgleichung (3.6) eingeschränkt auf die Zentrumsmannigfaltigkeit lautet dann

$$\begin{pmatrix} u' \\ \tilde{\mu}' \\ \tilde{\epsilon}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \tilde{\mu} \\ \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{\nu}u^2 + O(u\tilde{\mu}') + \tilde{\epsilon}O(1) + O(3) \\ \tilde{\epsilon}O(1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Wir werden zuerst den Fall  $\epsilon > 0$  untersuchen, der genau  $\tilde{\epsilon} > 0$  entspricht.

### 3.2.2 Auf der Zentrumsmannigfaltigkeit

Mit der Transformation

$$u = \sqrt{-\nu}\hat{u}, \tilde{\mu} = -\hat{\mu}, \tilde{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{-\nu}}\hat{\epsilon}, t = \sqrt{-\nu}\hat{t}$$

folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} \hat{u}' &= -\hat{\mu} + \hat{u}^2 + O(\hat{u}\hat{\mu}) + \hat{\epsilon}O(1) + O(3) \\ \hat{\mu}' &= \hat{\epsilon}(-1 + O(1)) \\ \hat{\epsilon}' &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Diese Gleichung entspricht bis auf die Terme höherer Ordnung  $\hat{\mu}\hat{u}, \hat{u}^4, \hat{\epsilon}^2$  der Gleichung (2.5) in [13] S.7. (Die zusätzlichen Terme  $\hat{\mu}\hat{u}^2, \hat{u}^4, \hat{\epsilon}^2$  in der ersten Gleichung von (3.8) sind Terme höherer Ordnung in  $r$  bezüglich des blow-up in [13] S.9 und treten daher nicht explizit, sondern nur als Terme höherer Ordnung in den  $O(r^i)$  Termen in den Rechnungen in den einzelnen Karten in [13] auf. Daher können wir die Ergebnisse aus [13] verwenden.)

Wir werden im folgenden die Bezeichnung der Variablen aus [13] verwenden

$$x = \hat{u}, y = \hat{\mu}, \epsilon = \hat{\epsilon}.$$

Für  $\epsilon = 0$  besitzt die Differentialgleichung (3.8) Ruhelagen für  $y \approx x^2$  (diese Menge entspricht  $S_0$ ). Der linke Ast  $S_a$  ist anziehend, der rechte Ast

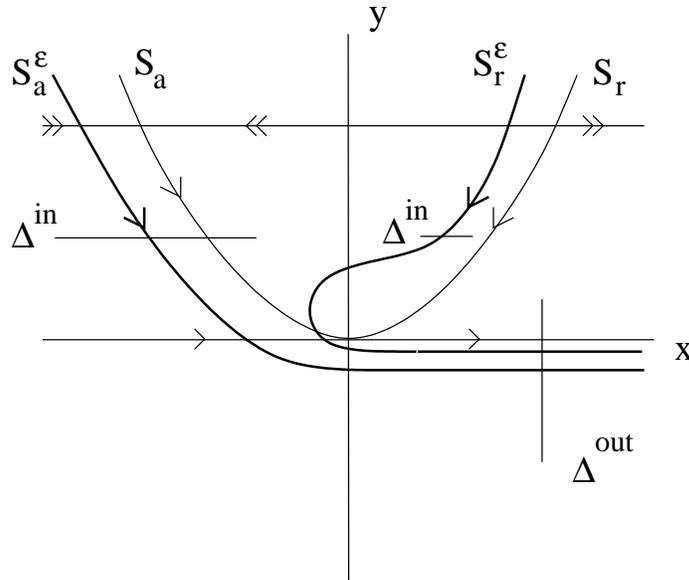


Abbildung 3.4: Kritische und langsame Mannigfaltigkeiten

$S_r$  abstoßend. Im Punkt  $x = y = 0$  tritt eine saddle node Verzweigung auf (Abb. 3.4).

Für  $\epsilon > 0$  existiert für  $x \geq \alpha > 0$  eine stabile langsame  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $S_a^\epsilon$ , die  $C^k$ -nahe zu  $S_a$  liegt. Analog existiert die langsame instabile Mannigfaltigkeit  $S_r^\epsilon$ , die  $C^k$ -nahe zu  $S_r$  liegt.

Sei  $1 \gg \rho > 0$ ,

$$\Delta_{in} := \{(x, \rho^2), x \in J \in \mathbb{R}\}, \quad \Delta_{out} := \{(\rho, y), y \in \mathbb{R}\}$$

wobei  $J$  und  $\rho$  geeignet gewählt werden. Wir setzen  $S_a^\epsilon$  und  $S_r^\epsilon$  durch den Fluß fort, um die Abbildung von  $\Delta_{in}$  nach  $\Delta_{out}$  zu berechnen.

Es existiert ein  $\epsilon_0$ , sodaß für alle  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$  gilt ([13] S.8):

**Satz 7** Die Mannigfaltigkeit  $S_a^\epsilon$  schneidet  $\Delta_{out}$  in  $(\rho, h(\epsilon))$  mit  $h(\epsilon) = O(\epsilon^{\frac{2}{3}})$ .  $\Delta_{in}$  wird auf ein Intervall um  $S_a^\epsilon \cap \Delta_{out}$  der Größe  $O(e^{-\frac{C}{\epsilon}})$  mit einer positiven Konstante  $C$  abgebildet.

Der Umstand, daß  $S_a^\epsilon$  nicht eindeutig ist, beeinträchtigt dieses Ergebnis nicht, da verschiedene  $S_a^\epsilon$ , die schon in  $\Delta_{in}$  exponentiell nahe liegen, in  $\Delta_{out}$  einander noch näher sind.

Wir verwenden nun Sätze aus [13] und führen analoge Berechnungen durch, um zu einem ähnlichen Ergebnis für  $S_r^\epsilon$  zu kommen.  $\Delta_{in}, \Delta_{out}$  seien wie oben definiert. Wir werden zeigen, daß das Intervall  $J$  um  $S_r^\epsilon$  exponentiell

klein gewählt werden muß. Wir verwenden den blow-up

$$\begin{aligned} \Psi : \{\mathbb{R}_0^+ \times S_3\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}) &\longrightarrow (x, y, \epsilon) = (r\bar{x}, r^2\bar{y}, r^3\bar{\epsilon}) \end{aligned}$$

mit  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\epsilon}^2 = 1$  und die Karten

$$\begin{aligned} K_1 : \quad (x_1, r_1, \epsilon_1) &\in \mathbb{R}^3, \quad x = r_1 x_1, \quad y = r_1^2, \quad \epsilon = r_1^3 \epsilon_1, \quad \text{d.h. } \bar{y} = 1, \\ K_2 : \quad (x_2, y_2, r_2) &\in \mathbb{R}^3, \quad x = r_2 x_2, \quad y = y_2 r_2^2, \quad \epsilon = r_2^3, \quad \text{d.h. } \bar{\epsilon} = 1, \\ K_3 : \quad (r_3, y_3, \epsilon_3) &\in \mathbb{R}^3, \quad x = r_3, \quad y = y_3 r_3^2, \quad \epsilon = r_3^3 \epsilon_3, \quad \text{d.h. } \bar{x} = 1, \end{aligned}$$

([13] S.9). Bei diesem blow-up ist  $r$  im Unterschied zu Kapitel 2 nicht konstant. In unserer Notation bezeichnen wir Objekte  $M$ , die in verschiedenen Koordinatensystemen vorkommen, in blow-up Koordinaten mit  $\bar{M}$  und in den Karten  $K_i$  mit  $M_i$ .

### 3.2.3 Verhalten in Karte $K_1$

Die Karte  $K_1$  wird als erstes von  $S_r^\epsilon$  durchlaufen. In dieser Karte lautet die Differentialgleichung (3.8)

$$\begin{aligned} x_1' &= r_1(-1 + x_1^2 + \frac{1}{2}\epsilon_1 x_1 + O(r_1)) \\ r_1' &= r_1(\frac{1}{2}r_1\epsilon_1(-1 + O(r_1))) \\ \epsilon_1' &= r_1(\frac{3}{2}\epsilon_1^2(1 + O(r_1))). \end{aligned} \tag{3.9}$$

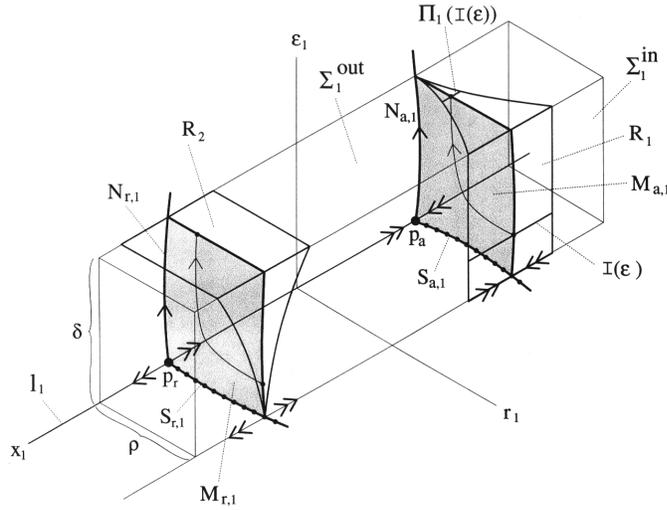
Dividieren der rechten Seite durch  $r_1$  (für  $r_1 \neq 0$ ) ergibt

$$\begin{aligned} x_1' &= -1 + x_1^2 + \frac{1}{2}\epsilon_1 x_1 + O(r_1) \\ r_1' &= \frac{1}{2}r_1\epsilon_1(-1 + O(r_1)) \\ \epsilon_1' &= \frac{3}{2}\epsilon_1^2(1 + O(r_1)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Diese Transformation entspricht einer ortsabhängigen Zeittransformation  $dt = \frac{1}{r_1} dt_1$ , die Orbits gleichläßt und nur ihre Zeitparametrisierung ändert. Das bedeutet, (3.9) und (3.10) sind für  $r_1 > 0$  äquivalent und besitzen die gleichen Orbits.

In  $r_1 = 0$  ist die Gleichung (3.8) jetzt ausreichend regulär, um sie in einer Umgebung von  $r_1 = 0$  mit Standardmethoden zu untersuchen. Sie besitzt in  $p_r = (1, 0, 0)$  eine Ruhelage, die lokal, das heißt  $r_1 \leq \rho$ ,  $\epsilon_1 \leq \delta$  und  $|x_1 + 1| \leq \beta$ , folgende Eigenschaften besitzt:

**Satz 8** *Es gilt:*


 Abbildung 3.5:  $S_r$  in Karte  $K_1$ 

1. Es existiert eine nicht eindeutige abstoßende  $C^k$ -Zentrumsmannigfaltigkeit  $M_{r,1}$  in  $p_r$ , die die Linie von Ruhelagen  $S_{r,1} \subseteq \{\epsilon_1 = 0\}$  enthält.  $N_{r,1} = M_{r,1} \cap \{\epsilon_1 = 0\}$ , eine Zentrumsmannigfaltigkeit der Gleichung (3.10) eingeschränkt auf die invariante Ebene  $\{r_1 = 0\}$ , liegt tangential zum Vektor  $(-1, 0, 4)$ .  $N_{r,1}$  ist nicht eindeutig.
2. Es existiert eine instabile invariante Blätterung  $F^u$  mit Basis  $M_{r,1}$  und eindimensionalen Fasern  $F^u(p)$ ,  $p \in M_{r,1}$ , sodaß für jedes  $c < 2$  Konstanten  $\rho, \delta$  existieren, sodaß die Expansion entlang  $F^u(p)$  stärker als  $e^{ct_1}$  ist.

([13] S.16,18)

Sei

$$\Sigma_1^{in} := \{(x_1, r_1, \epsilon_1) : r_1 = \rho\} \text{ und } \Sigma_1^{out} := \{(x_1, r_1, \epsilon_1) : \epsilon_1 = \delta\},$$

wobei  $\Delta_{in,1} \subseteq \Sigma_1^{in}$  gilt.

$R_2 := \{(x_1, r_1, \epsilon_1) \in \Sigma_1^{out} : |1 + x_1| \leq \beta\}$  enthalte  $M_{r,1} \cap \Sigma_1^{out}$ , außerdem definieren wir die Gerade  $J(r_0) := R_2|_{r_1=r_0}$ .

**Satz 9** Für die durch den Fluß bestimmte Abbildung  $\Pi_1 : \Sigma_1^{in} \rightarrow \Sigma_1^{out}$  gilt:

1.  $\Pi_1^{-1}(R_2)$  ist eine keilförmige Teilmenge in  $\Sigma_1^{in}$ , die  $M_{r,1} \cap \Sigma_1^{in}$  enthält.

2. Für  $\epsilon_1 \in (0, \delta]$  und jede Konstante  $0 < c < 2$  existiert ein  $K$  sodaß  $\Pi_1^{-1}(J(r_1))$  ein Intervall um  $M_{r,1} \cap \Sigma_1^{in}$  mit einer Breite kleiner oder gleich  $Ke^{-\frac{2c}{3}(\frac{\rho^3}{r_1^3\delta} - \frac{1}{\delta})}$  ist.

([13] S.18)

Da die Gleichung  $\epsilon' = 0 = 3r_1^2 r_1' \epsilon_1 + r_1^3 \epsilon_1'$  gilt, gilt für einen Orbit mit  $\Pi_1((x_{1i}, r_{1i}, \epsilon_{1i})) = (x_{1o}, r_{1o}, \epsilon_{1o})$  der Zusammenhang  $\frac{\epsilon_{1o}}{\epsilon_{1i}} = (\frac{r_{1o}}{r_{1i}})^{-3}$ . Mit  $r_{1i} = \rho, \epsilon_{1o} = \delta$  gilt  $\epsilon_{1i} = \delta \frac{r_{1o}}{\rho}$  und damit

$$Ke^{-\frac{2c}{3}(\frac{\rho^3}{r_{1o}^3\delta} - \frac{1}{\delta})} = Ke^{-\frac{2c}{3}(\frac{1}{\epsilon_{1i}} - \frac{1}{\delta})}.$$

**Korollar 1**  $\Pi_1^{-1}(J(r_1))$  ist ein Intervall der Größe  $O(e^{-\frac{c}{\epsilon_1}})$ .

Der Kartenwechsel  $\kappa_{12}$  zwischen  $K_1$  und  $K_2$  lautet

$$x_2 = x_1 \epsilon_1^{-1/3}, \quad y_2 = \epsilon_1^{-2/3}, \quad r_2 = r_1 \epsilon_1^{1/3}, \quad \text{für } \epsilon_1 > 0$$

$$x_1 = x_2 y_2^{-1/2}, \quad \epsilon_1 = y_2^{-3/2}, \quad r_1 = r_2 y_2^{1/2}, \quad \text{für } y_2 > 0$$

Die invariante Mannigfaltigkeit  $\{r_1 = 0, \epsilon_1 > 0\}$  in  $K_1$  entspricht der Mannigfaltigkeit  $\{r_2 = 0, y_2 > 0\}$  in  $K_2$ . Als nächstes untersuchen wir den Verlauf von  $N_{r,1}$  in der Karte  $K_2$ .

### 3.2.4 Verhalten in Karte $K_2$

Die Differentialgleichung (3.8) lautet in Karte  $K_2$  nach einer Zeittransformation  $dt = \frac{1}{r_2} dt_2$

$$\begin{aligned} x_2' &= x_2^2 - y_2 + O(r_2) \\ y_2' &= -1 + O(r_2) \\ r_2' &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Für  $r_2 = 0$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} x_2' &= x_2^2 - y_2 + O(r_2) \\ y_2' &= -1 + O(r_2). \end{aligned} \tag{3.12}$$

**Satz 10** *Es gilt:*

1. Die Riccatische Gleichung (3.12) hat eine Lösung  $\gamma$ , die für  $x \rightarrow -\infty$  gegen den linken Ast der Parabel  $y - x^2 = 0$ , und für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $y = -\Omega$  konvergiert.
2. Jeder Orbit hat eine horizontale Asymptote  $y = y_r$ , gegen die er für  $x \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ) von oben konvergiert.

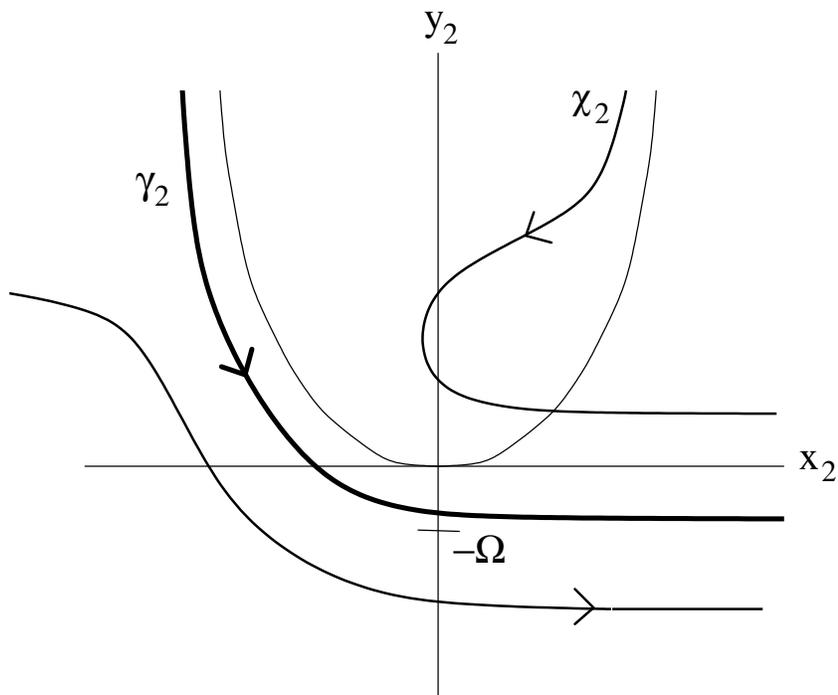


Abbildung 3.6: Riccati-Gleichung

3. Die Orbits  $\chi$  rechts von  $\gamma$  sind für  $x \rightarrow -\infty$  asymptotisch zum rechten Zweig von  $y - x^2 = 0$ .

([13] S. 12, Abb.3.6)

Die Orbits  $\chi$  rechts von  $\gamma$  füllen diesen Teil der Ebene vollständig aus.

**Lemma 2** Die asymptotische Entwicklung der Lösungen  $\chi$  ist für

1.  $t \rightarrow -\infty$ :

$$y = x^2 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

2. für  $t \rightarrow +\infty$

$$y = y_r + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Beweis: Die Existenz einer Reihenentwicklung folgt aus der  $C^k$ -Differenzierbarkeit der invarianten Mannigfaltigkeiten in  $K_1$  und  $K_3$  in einer Umgebung der Ruhelagen und der Konvergenz von  $\chi$  gegen diese. Einsetzen des Ansatzes  $y = x^2 + \alpha_1 \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^i}\right)$  für die Asymptotik für  $t \rightarrow -\infty$  in die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2 - y}$$

und Koeffizienten-Vergleich ergibt

$$y = x^2 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Analoges Vorgehen mit dem Ansatz  $y = \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_i x^{-i}) + O(x^{-k})$  für die Asymptotik  $t \rightarrow \infty$  liefert

$$y = y_r + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

□

**Satz 11**  $\chi$  geht für  $t \rightarrow -\infty$  in Karte  $K_1$  tangential zum Vektor  $(-1, 0, 4)$  gegen  $p_r = (x_1, r_1, \epsilon_1) = (1, 0, 0)$ .

Beweis: Der Kartenwechsel  $\kappa_{12}^{-1}(\chi)$  und die Reihenentwicklung

$$(x_1, r_1, \epsilon_1) = \kappa_{12}^{-1}(\chi) = \left(1 - \frac{1}{4x_2^3} + O(x_2^{-6}), 0, \frac{1}{x_2^3} + O(x_2^{-6})\right)$$

zeigen, daß diese Orbits tangential zum Vektor  $(-1, 0, 4)$  gegen  $p_r = (1, 0, 0)$  gehen. □

Wir definieren wieder nach [13]

$$\Sigma_2^{in} := \{(x_2, y_2, r_2) : y_2 = \delta^{-2/3}\}, \quad \Sigma_2^{out} := \{(x_2, y_2, r_2) : x_2 = \delta^{-1/3}\},$$

wobei  $\kappa_{12}(\Sigma_1^{out}) \subseteq \Sigma_2^{in}$  gilt. Sei  $\Pi_2 : \Sigma_2^{in} \rightarrow \Sigma_2^{out}$  die durch den Fluß bestimmte Abbildung und  $q_0$  durch  $q_0 = \chi \cap \Sigma_2^{in}$  gegeben. Die Orbits  $\chi$  entsprechen damit in Karte  $K_1$  je einer Zentrumsmannigfaltigkeit  $N_{r,1}$ .

**Satz 12** *Es gilt*

$$\Pi_2(q_0) = (\delta^{-1/3}, y_r + \delta^{1/3} + O(\delta), 0).$$

*Eine Umgebung von  $q_0$  wird diffeomorph auf eine Umgebung von  $\Pi_2(q_0)$  abgebildet.*

(Dieser Satz folgt aus der asymptotischen Entwicklung von Lemma 2 und regulärer Störungstheorie.)

Der Kartenwechsel  $\kappa_{23}$  zwischen  $K_2$  und  $K_3$  lautet

$$\begin{aligned} r_3 &= r_2 x_2, \quad y_3 = y_2 x_2^{-2}, \quad \epsilon_3 = x_2^{-3}, \quad \text{für } x_2 > 0, \\ x_2 &= \epsilon_3^{-1/3}, \quad y_2 = y_3 \epsilon_3^{-2/3}, \quad r_2 = r_3 \epsilon_3^{1/3}, \quad \text{für } \epsilon_3 > 0. \end{aligned}$$

Die invariante Mannigfaltigkeit  $\{r_2 = 0, x_2 > 0\}$  in  $K_2$  entspricht der invarianten Mannigfaltigkeit  $\{r_3 = 0, \epsilon_3 > 0\}$  in  $K_3$ . Es fehlt noch der Verlauf der Orbits  $\chi$  in Karte  $K_3$ .

### 3.2.5 Verhalten in Karte $K_3$

In Karte  $K_3$  lautet die Differentialgleichung (3.8) nach einer Zeittransformation  $dt = \frac{1}{r_3} dt_3$

$$\begin{aligned} r_3' &= r_3(1 - y_3 + O(r_3)) \\ y_3' &= -\epsilon_3 - 2y_3 + 2y_3^2 + O(r_3) \\ \epsilon_3' &= -3\epsilon_3(1 - y_3 + O(r_3)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sie besitzt eine hyperbolische Ruhelage in  $q = (0, 0, 0)$  mit den Eigenwerten und Eigenvektoren

- $\lambda_1 = +1, (1, 0, 0),$
- $\lambda_2 = -2, (0, 1, 0),$
- $\lambda_3 = -3, (0, 1, 1).$

Für den Orbit  $\chi$  gilt in Karte  $K_3$ :

**Lemma 3** Für  $x_2 \rightarrow \infty$  konvergiert  $\kappa_{23}(\chi)$  gegen  $q$ . Diese Konvergenz erfolgt für  $y_r \neq 0$  tangential zu  $(0, 1, 0)$  und für  $y_r = 0$  tangential zu  $(0, 1, 1)$ .

Beweis: Analog zu Satz 11 gilt

$$(r_3, y_3, \epsilon_3) = \kappa_{23}(\chi) = (0, y_r x_2^{-2} + x_2^{-3} + O(x_2^{-5}), x_2^{-3}).$$

□

Wir definieren wiederum

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{in} &:= \{(r_3, y_3, \epsilon_3) : r_3 \in [0, \rho], y_3 \in [-\alpha, \beta], \epsilon_3 = \delta\} \\ \Sigma_3^{out} &:= \{(r_3, y_3, \epsilon_3) : r_3 = \rho, y_3 \in [-\alpha, \beta], \epsilon_3 \in [0, \delta]\} \end{aligned}$$

mit  $\beta$  klein genug.  $\Sigma_2^{out}$  wird in einer Umgebung von  $\chi$  auf  $\Sigma_3^{in}$  abgebildet. Weiters sei  $\Pi_3 : \Sigma_3^{in} \rightarrow \Sigma_3^{out}$  die durch den Fluß bestimmte Abbildung und  $\Psi$  die durch die Transformation auf die Normalform bestimmte  $C^k$ -Abbildung mit  $\Psi(r_3, y_3, \delta) = y_3 + O(2)$ .

**Satz 13** Es gilt

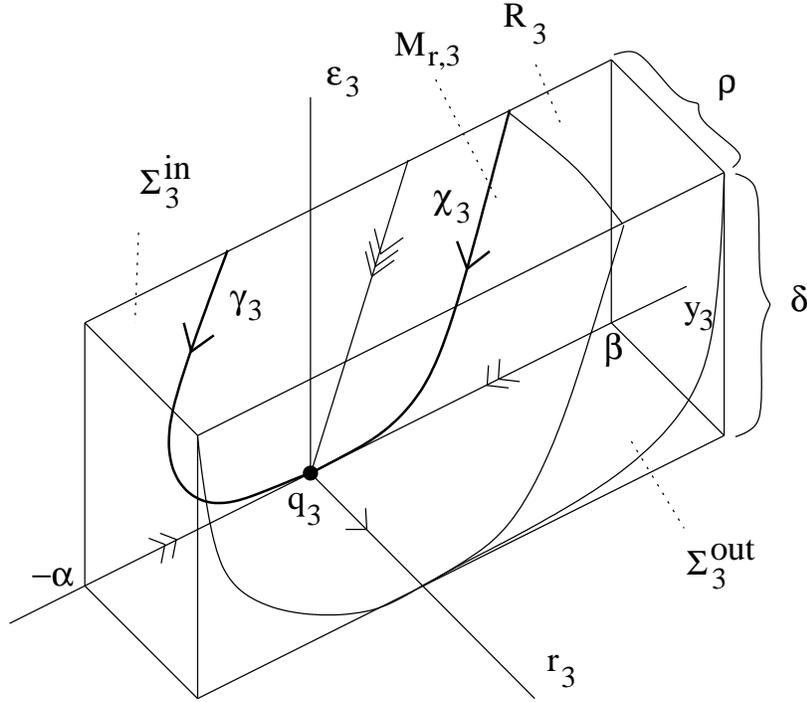
$$\Pi_3(r_3, y_3, \delta) = (\rho, \Pi_{32}(r_3, y_3, \delta), \left(\frac{r_3}{\rho}\right)^3 \delta)$$

mit

$$\begin{aligned} \Pi_{32}(r_3, y_3, \delta) &= \left( \Psi(r_3, y_3, \delta) - \delta + O(\rho) + O(\delta\rho) \left(\frac{r_3}{\rho}\right) \ln\left(\frac{r_3}{\rho}\right) \right) \left(\frac{r_3}{\rho}\right)^2 \\ &\quad + (\delta + O(\rho)) \left(\frac{r_3}{\rho}\right)^3 + O\left( \left(\frac{r_3}{\rho}\right)^2 \ln\left(\frac{r_3}{\rho}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Beweis: Siehe [13] S.20.

**Korollar 2** Damit wird  $\Sigma_3^{in}$  auf ein Gebiet mit Grenzen der Ordnung  $(\rho, O((\frac{\epsilon_3}{\delta})^{2/3}), \epsilon_3)$  abgebildet.


 Abbildung 3.7: Verhalten in der Karte  $K_3$ 

### 3.2.6 Zusammenfassung

$\Sigma_1^{in}$  und  $\Sigma_3^{out}$  entsprechen  $\Delta_{in,1}$  und  $\Delta_{out,3}$ . Sei  $\Pi = \Pi_3 \circ \kappa_{23} \circ \Pi_2 \circ \kappa_{12} \circ \Pi_1$  die Abbildung von  $\Sigma_1^{in}$  nach  $\Sigma_3^{out}$ . Um das Verhalten von  $S_r^\epsilon$  zu untersuchen, verfolgen wir die Entwicklung der Zentrumsmannigfaltigkeit  $\bar{M}_{r,1}$ , die  $S_r^\epsilon$  enthält, entlang der Kugel  $\bar{r} = 0$  in den einzelnen Karten. Es gilt:

**Satz 14** Die Mannigfaltigkeit  $S_r^\epsilon$  schneidet  $\Delta_{out}$  im Punkt  $(\rho, h(\epsilon))$  mit  $h(\epsilon) = O(\epsilon^{2/3})$ .

Beweis:  $M_{r,1} \cap \Sigma_1^{in}$  wird durch  $\Pi_1$  auf eine stetige Kurve transversal zu  $\{r_1 = 0\}$  abgebildet, wobei  $M_{r,1} \cap \{r_1 = 0\} = N_{r,1}$  gilt. Mit dem Diffeomorphismus  $\kappa_{12}$  ist  $\kappa_{12}(\Pi_1(M_{r,1} \cap \Sigma_1^{in}))$  wieder transversal zu  $r_2 = 0$ . Die Abbildung  $\Pi_2$  ist ein Diffeomorphismus und erfolgt längs der Kurve  $\chi$ . Die Kurve  $\Pi_2(\kappa_{12}(\Pi_1(M_{r,1} \cap \Sigma_1^{in})))$  liegt daher wieder transversal zu  $\{r_2 = 0\}$ . Außerdem füllen die Kurven  $\bar{\chi}$  den durch  $\bar{\gamma}$  und  $\{\bar{\epsilon} = 0\}$  begrenzten Teil der Kugeloberfläche aus. Wenden wir den Diffeomorphismus  $\kappa_{23}$  an, so erhalten wir eine Kurve  $\{(r_3, h_3^{in}(r_3), \delta) : r_3 \in [0, \rho]\}$  transversal zu  $\{r_3 = 0\}$ , mit  $(0, h_3^{in}(0), \delta) = \kappa_{23}(\chi \cap \Sigma_2^{out})$ , die für  $\delta, \rho$  klein genug, in  $\Sigma_3^{in}$  liegt. Mit  $\Pi_3$  erhalten wir

$$\Pi(M_{r,1} \cap \Sigma_1^{in}) = \{(\rho, O(\epsilon_3^{2/3}), \epsilon_3) : \epsilon_3 \in [0, \delta]\}.$$

Die blow-down Transformation ergibt wieder  $h = O(\epsilon^{\frac{2}{3}})$ .  $\square$

Als nächstes betrachten wir die Fortsetzung entlang  $S_r^\epsilon$ .

**Satz 15** *Die Abbildung  $\Pi : \Delta_{in} \rightarrow \Delta_{out}$  ist nur für eine exponentiell kleine Umgebung um  $\Delta_{in} \cap S_r^\epsilon$  definiert. Bei der Abbildung von  $\Delta_{in}$  nach  $\Delta_{out}$  entlang  $S_r^\epsilon$  tritt eine Expansion größer gleich  $O(e^{\frac{C}{\epsilon}})$  mit einer positiven Konstanten  $C$  auf.*

Beweis: In Karte  $K_1$  ist  $R_2$  ein Rechteck,  $\Pi_1^{-1}(R_2)$  eine keilförmige Menge der Größe  $O(e^{-\frac{C}{\epsilon_1}})$  um  $\Pi_1^{-1}(R_1) \cap M_{r,1}$ . Da  $\kappa_{12}$ ,  $\Pi_2$ ,  $\kappa_{23}$  Diffeomorphismen auf ihrem Definitionsbereich sind, ist  $(\kappa_{23} \circ \Pi_2 \circ \kappa_{12})(R_2)$  durch zwei Kurven, die transversal zu  $\{r_3 = 0\}$  liegen, begrenzt, die sich nicht schneiden.

$\Pi_1^{-1}(J(r_1))$ , eine Gerade die parallel zu  $\{\epsilon_1 = 0\}$  liegt, wird durch  $(\kappa_{23} \circ \Pi_2 \circ \kappa_{12} \circ \Pi_1)$  auf eine Strecke  $g(r_3)$  parallel zu  $\{r_3 = 0\}$  abgebildet. Diese Strecke wird durch  $\Pi_3$  auf eine Strecke  $h(\epsilon_3)$  parallel zu  $\{\epsilon_3 = 0\}$  abgebildet. (Aus  $\epsilon' = (r_3^3 \epsilon_3)' = 0$  folgt  $\epsilon_3 = cr_3^{-3}$  mit einer Konstanten  $c$ . Analoges Vorgehen für  $\Pi_1$  und die Definition des Kartenwechsels liefert obiges Ergebnis.)

Für  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  klein genug existieren Konstanten  $C_1$ ,  $C_2$ , sodaß die Breite  $\Delta y(\Pi_3(g(r_3)))$  die Ungleichungen  $C_1(\frac{r_3}{\rho})^2 \leq \Delta y(\Pi_3(g(r_3))) \leq C_2(\frac{r_3}{\rho})^2$  erfüllt (Satz 13). Daraus folgt  $C_1(\frac{\epsilon_3}{\delta})^2 \leq \Delta y(h(\epsilon_3)) \leq C_2(\frac{\epsilon_3}{\delta})^2$ .

Transformation auf die ursprünglichen Koordinaten ergibt, daß eine Strecke der Größenordnung  $\Delta x = O(e^{-C/\epsilon})$  in  $\Delta_{in}$  durch  $\Pi$  auf eine Strecke  $\Delta y$  in  $\Delta_{out}$  mit

$$C_3 \epsilon^{2/3} \leq \Delta y \leq C_4 \epsilon^{2/3}$$

abgebildet wird. Daraus ergibt sich eine Expansion größer gleich  $O(e^{C/\epsilon})$ . Weiters folgt daraus, daß  $\Pi^{-1}$  ein Intervall um  $S_r^\epsilon$  der Größe  $O(1)$  auf ein Intervall der Größe  $O(e^{-C/\epsilon})$  abbildet.  $\square$

### 3.2.7 Der Fall $\epsilon < 0$

Als nächstes werden wir die Gleichung (3.1) für  $\epsilon < 0$  untersuchen. Die Einschränkung auf die Zentrumsmanifold und die Berechnung der Gleichung (3.7) sind genau gleich, nur in diesem Fall ist  $\tilde{\epsilon} < 0$ .

Mit der Transformation

$$u = -\sqrt{-\nu} \hat{u}, \tilde{\mu} = -\hat{\mu}, \tilde{\epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{-\nu}} \hat{\epsilon}, t = -\sqrt{-\nu} \hat{t}$$

folgt wieder Gleichung (3.8) mit  $\hat{\epsilon} > 0$  und es gelten wieder die Sätze 14 und 15 aus dem vorigen Kapitel.

### 3.2.8 Dynamik im saddle node Punkt

Auf der Zentrumsmanifold sieht das Verhalten wie in Abb. 3.9 dargestellt aus.

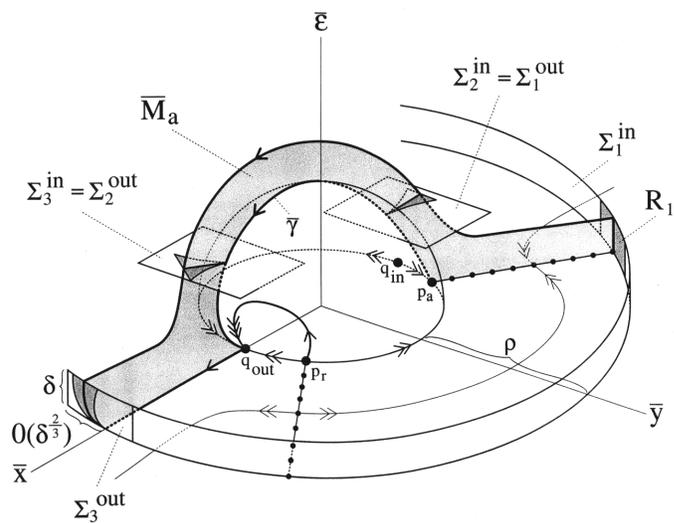


Abbildung 3.8: Geometrie und Dynamik des Vektorfeldes in blow-up Koordinaten

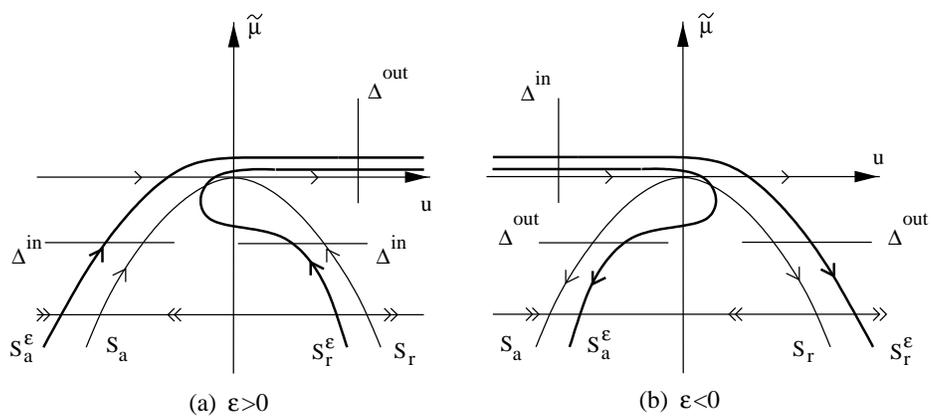


Abbildung 3.9: Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit

Um die gesamte Dynamik im saddle node Punkt der Gleichung (3.5) zu beschreiben, definieren wir für  $\epsilon > 0$  in den ursprünglichen Koordinaten

$$\Delta_{in} := \{(x, \mu, \epsilon, y) \mid x \in J, \mu = -\alpha^2, y \text{ klein}, \epsilon \ll 1\}$$

und

$$\Delta_{out} := \{(x, \mu, \epsilon, y) \mid x = \alpha, \mu, y \text{ klein}, \epsilon \ll 1\}$$

mit einer geeignete Umgebung  $J$  von  $S_r$  bzw  $S_a$ .  $S_r^\epsilon, S_a^\epsilon$  seien wie früher erklärt,  $\Pi$  ist wieder die durch den Fluß bestimmte Abbildung von  $\Delta_{in}$  nach  $\Delta_{out}$ .

**Satz 16** *Die langsamen Mannigfaltigkeiten  $S_a^\epsilon$  und  $S_r^\epsilon$  schneiden  $\Delta_{out}$  je in einem Punkt  $(x, \mu, \epsilon, y)$ , für den  $(x, \mu, \epsilon, y) = (\alpha, h(\epsilon), \epsilon, O(2))$  mit  $h(\epsilon) = O(\epsilon^{2/3})$  gilt.*

Beweis: Die Transformation des Ergebnisses aus Satz 7 und 14 auf die ursprünglichen Koordinaten ergibt obiges Verhalten für  $\Delta_{in} = \{\mu = \nu\rho^2 + \frac{\epsilon}{-\nu}\}$   $\Delta_{out} = \{x = \sqrt{-\nu}\rho + O(2)\}$ . (Die  $O(2)$  Terme sind die Terme höherer Ordnung aus der Reduktion auf die Zentrumsmannigfaltigkeit.) Da man dieses Verhalten für  $\Delta_{in,out}$  für beliebige, kleine  $\rho > 0$  erhält und diese Flächen lokal den Raum ausfüllen, gilt es für alle transversal zu  $\{\epsilon = 0\}$  liegende Hyperflächen  $\Delta_{in,out}$ .  $\square$

Sei  $T$  die für die Abbildung von  $\Delta_{in}$  nach  $\Delta_{out}$  benötigte Zeit.

**Lemma 4** *Es existieren  $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ , sodaß  $T$*

$$\frac{\beta_1}{\epsilon} \leq T \leq \frac{\beta_2}{\epsilon}$$

*erfüllt.*

Beweis: In einer ausreichend kleinen Umgebung  $U$  mit  $1 - c \leq (1 + O(1)) \leq 1 + c$  und mit  $\mu' = \epsilon(1 + O(1))$  folgt durch Integration das obige Ergebnis.  $\square$

**Satz 17** *Für die Abbildung  $\Pi$  tritt*

1. *entlang  $S_a^\epsilon$  eine Kontraktion der Größe  $O(e^{-C/\epsilon})$ ,*
2. *entlang  $S_r^\epsilon$  in der Zentrumsmannigfaltigkeit  $M^c$  eine Expansion der Größe  $O(e^{C_1/\epsilon})$  und eine Kontraktion zu  $M^c$  der Größe  $O(e^{-C_2/\epsilon})$*

*mit den positiven Konstanten  $C, C_1, C_2$  auf.*

Beweis: Dieser Satz folgt aus Satz 4, 1 mit Transformation der Ergebnisse von Satz 15 auf diese Koordinaten.  $\square$

Das Verhalten für  $\epsilon < 0$  erhält man mit genau derselben Vorgangsweise: Die Mengen  $\Delta_{in}$  und  $\Delta_{out}$  werden durch

$$\Delta_{in} := \{(x, \mu, \epsilon, y) \mid x = -\alpha, \mu, y \text{ klein}, \epsilon \ll 1\},$$

$$\Delta_{out} := \{(x, \mu, \epsilon, y) \mid x \in J, \mu = -\alpha^2, y \text{ klein}, \epsilon \ll 1\}$$

mit einer geeigneten Umgebung  $J$  von  $S_r$  bzw.  $S_a$  definiert.  $S_r, S_a$  sind genau gleich wie im Fall  $\epsilon > 0$ ,  $\Pi$  beschreibt wieder die Abbildung von  $\Delta_{in}$  nach  $\Delta_{out}$ .

**Satz 18** Die Mannigfaltigkeiten  $S_a^\epsilon$  und  $S_r^\epsilon$  schneiden  $\Delta_{in}$  je in einem Punkt  $(x, \mu, \epsilon, y) = (-\alpha, h(\epsilon), \epsilon, O(2))$  mit  $h(\epsilon) = O(\epsilon^{2/3})$ .

**Satz 19** Für die Abbildung  $\Pi$  tritt

1. entlang  $S_a^\epsilon$  eine Kontraktion der Größe  $O(e^{-C/\epsilon})$ ,
2. entlang  $S_r^\epsilon$  in der Zentrumsmannigfaltigkeit  $M^c$  eine Expansion der Größe  $O(e^{C_1/\epsilon})$  und eine Kontraktion auf  $M^c$  der Größe  $O(e^{-C_2/\epsilon})$

mit positiven Konstanten  $C, C_1, C_2$  auf.

Mit diesen Sätzen ist das Verhalten von  $S_a^\epsilon$  und  $S_r^\epsilon$  und der Lösungen in einer Umgebung der langsamen Mannigfaltigkeiten am saddle node Punkt beschrieben.

### 3.3 Homokliner Orbit

Das Grenzsicht-Problem (3.2) besitzt für  $\mu = -\frac{49}{25}\nu^2 + O((- \nu)^{5/2})$  (Gleichung 2.9) einen homoklinen Orbit  $h$ . Entlang dieses Orbits schneiden sich die stabile Mannigfaltigkeit  $W^s(S_{H_3})$  und die instabile Mannigfaltigkeit  $W^u(S_{H_3})$  transversal. Sei  $S_\epsilon$  die langsame Lösung zu  $S_{H_3}$ ,  $W_\epsilon^s(S_\epsilon)$  bzw.  $W_\epsilon^u(S_\epsilon)$  die entsprechende stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit zu  $S_\epsilon$  (Satz 6).

**Satz 20** Es existiert ein Orbit  $h_\epsilon$ , der sich homoklin bezüglich der langsamen Mannigfaltigkeit  $S_\epsilon$  verhält, daß heißt,  $h_\epsilon$  liegt in  $W_\epsilon^s(S_\epsilon) \cap W_\epsilon^u(S_\epsilon)$ .

Beweis: Aus Satz 6 folgt, daß  $W_\epsilon^{s,u}(S_\epsilon)$   $C^k$ -nahe zu  $W^{s,u}(S_{H_3})$  liegen. Mit der Transversalität von  $W^s(S_{H_3})$  und  $W^u(S_{H_3})$  folgt die Existenz eines  $\epsilon_0$ , sodaß der Schnitt zwischen diesen Mannigfaltigkeiten für  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  transversal ist. Siehe Abb. 3.10.  $\square$

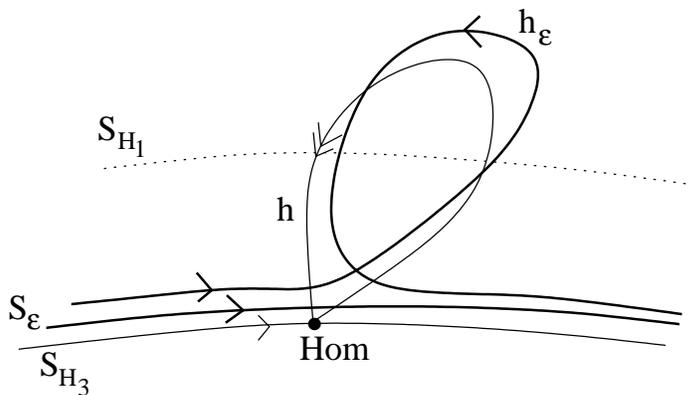


Abbildung 3.10: Homokliner Orbit

### 3.4 Hopfverzweigung

In [12] gibt es eine Beschreibung einer Hopfverzweigung mit langsam variierendem Parameter. Die Gleichung (3.1) mit  $\epsilon < 0$  erfüllt die dort verlangten Voraussetzungen und die Ergebnisse können direkt auf unsere Gleichung angewandt werden. Eine genaue Beschreibung dieses schwierigen Problems übersteigt den Rahmen dieser Arbeit.

## Kapitel 4

# Die Takens Bogdanov Verzweigung mit langsam variierendem Parameter für $\nu = 0$

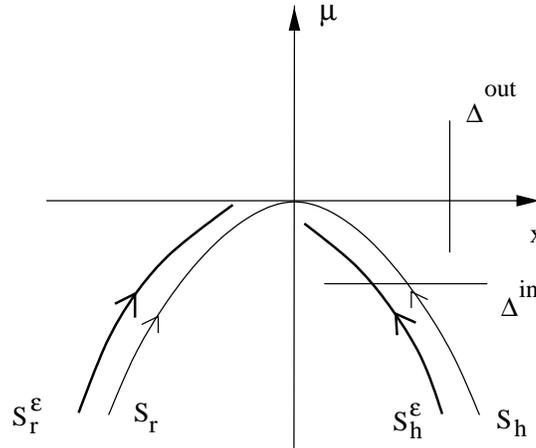
In diesem Kapitel untersuchen wir das System (3.1) für  $\nu = 0, \epsilon > 0$ . Die Differentialgleichung lautet

$$\begin{aligned}x' &= y + O(3) \\y' &= \mu + x^2 - xy + O(3) \\ \mu' &= \epsilon(1 + O(1)) \\ \epsilon' &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Die  $O(i)$  bezeichnen die Terme  $i$ -ter Ordnung in  $x, y$  und  $\epsilon$ . Für  $\epsilon = 0$  tritt wieder die Gleichung (2.2) auf, die für  $\mu \leq \mu_0 < 0$  zwei Äste hyperbolischer Nullstellen (Abb. 4.1),  $S_r$  und  $S_h$ , (vgl Kap.1) besitzt. Zu  $S_h$  existieren eine 2-dimensionale stabile Mannigfaltigkeit  $W^s(S_h)$ , die aus den stabilen Mannigfaltigkeiten der einzelnen Ruhelagen besteht, und eine 2-dimensionale instabile Mannigfaltigkeit  $W^u(S_h)$ . Zu  $S_r$  existiert eine 3-dimensionale instabile Mannigfaltigkeit  $\tilde{W}^u(S_r)$ .

**Satz 21** Für  $\mu \leq \mu_0 < 0$  existieren zwei langsame  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten  $S_h^\epsilon$  und  $S_r^\epsilon$ , für die  $S_h^0 = S_h$  und  $S_r^0 = S_r$  gilt. Zu  $S_h^\epsilon$  existieren eine 2-dimensionale stabile und eine 2-dimensionale instabile  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $W_\epsilon^s(S_h^\epsilon)$  und  $W_\epsilon^u(S_h^\epsilon)$ . Zu  $S_r^\epsilon$  existiert eine 3-dimensionale instabile  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $\tilde{W}_\epsilon^u(S_r^\epsilon)$ . Diese Mannigfaltigkeiten liegen  $C^k$ -nahe zu  $W^s(S_h)$ ,  $W^u(S_h)$ ,  $\tilde{W}^u(S_r)$ ,  $S_r$  bzw.  $S_h$ .

Beweis: Für  $\epsilon = 0$  treten die Nullstellen in  $y = O(x^3)$ ,  $\mu = x^2 + O(x^3)$  auf, die für  $x > 0$  hyperbolisch ( $S_h$ ) und für  $x < 0$  abstoßend ( $S_r$ ) sind (Kap. 1).


 Abbildung 4.1:  $S_h, S_r$  für  $\nu = 0$ 

Die Anwendung der Methoden von Fenichel [4] ergibt sofort obiges Ergebnis.

□

Wir werden in diesem Kapitel vor allem die zeitliche Entwicklung von  $S_h^\epsilon$  in einer Umgebung des nicht hyperbolischen Punktes in  $\mu = 0$  untersuchen. Wir definieren  $\Delta_{in} = \{\mu = -\alpha\}$  und  $\Delta_{out} = \{x = \beta\}$ . Die durch den Fluß bestimmte Abbildung  $\Pi : \Delta_{in} \rightarrow \Delta_{out}$  von  $S_h^\epsilon$  beschreibt dieses Verhalten. Zur Berechnung verwenden wir die blow-up Transformation

$$x = r^2 \bar{x}, y = r^3 \bar{y}, \mu = r^4 \bar{\mu}, \epsilon = r^5 \bar{\epsilon}$$

mit  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\mu}^2 + \bar{\epsilon}^2 = 1$ . Die Rechnungen werden in den Karten

$$\begin{aligned} K_1 : & \quad x = r_1^2 x_1, \quad y = r_1^3 y_1, \quad \mu = -r_1^4, \quad \epsilon = r_1^5 \epsilon_1, \quad \text{d.h. } \bar{\mu} = -1, \\ K_2 : & \quad x = r_2^2 x_2, \quad y = r_2^3 y_2, \quad \mu = r_2^4 \mu_2, \quad \epsilon = r_2^5, \quad \text{d.h. } \bar{\epsilon} = 1, \\ K_3 : & \quad x = r_3^2, \quad y = r_3^3 y_3, \quad \mu = r_3^4 \mu_3, \quad \epsilon = r_3^5 \epsilon_3, \quad \text{d.h. } \bar{x} = 1, \end{aligned}$$

durchgeführt. Die  $C^\infty$  Abbildungen zwischen den einzelnen Karten lauten

$$\kappa_{12} : x_2 = \epsilon_1^{-2/5} x_1, \quad y_2 = \epsilon_1^{-3/5} y_1, \quad \mu_2 = -\epsilon_1^{-4/5}, \quad r_2 = \epsilon_1^{1/5} r_1$$

$$\kappa_{12}^{-1} : x_1 = (-\mu_2)^{-1/2} x_2, \quad y_1 = (-\mu_2)^{-3/4} y_2, \quad r_1 = r_2 (-\mu_2)^{1/4}, \quad \epsilon_1 = (-\mu_2)^{-5/4}$$

für  $\epsilon_1 > 0$ ,  $r_1 > 0$ ,  $\mu_2 < 0$ ,  $r_2 > 0$  und

$$\kappa_{23} : r_3 = r_2 x_2^{1/2}, \quad y_3 = x_2^{-3/2} y_2, \quad \mu_3 = x_2^{-2} \mu_2, \quad \epsilon_3 = x_2^{-5/2}$$

$$\kappa_{23}^{-1} : x_2 = \epsilon_3^{-2/5}, \quad y_2 = \epsilon_3^{-3/5} y_3, \quad \mu_2 = \epsilon_3^{-4/5} \mu_3, \quad r_2 = r_3 \epsilon_3^{1/5}$$

für  $r_2 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $\epsilon_3 > 0$ ,  $r_3 > 0$ .

## 4.1 Verhalten in Karte $K_1$

Die Karte  $K_1$  deckt die einlaufende Richtung der langsamen Lösungen  $S_h^\epsilon$  und  $S_r^\epsilon$  ab. Die Differentialgleichung (4.1) lautet in dieser Karte

$$\begin{aligned} x_1' &= r_1(y_1 + \frac{1}{2}\epsilon_1 x_1) + O(r_1^4) \\ y_1' &= r_1(-1 + x_1^2 + \frac{3}{4}\epsilon_1 y_1 - r_1 x_1 y_1) + O(r_1^3) \\ r_1' &= -\frac{1}{4}\epsilon_1 r_1^2(1 + O(r_1^2)) \\ \epsilon_1' &= \frac{5}{4}r_1 \epsilon_1^2(1 + O(r_1^2)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Division der rechten Seite von (4.2) durch  $r_1$ , die einer ortsabhängigen Zeittransformation entspricht, ergibt

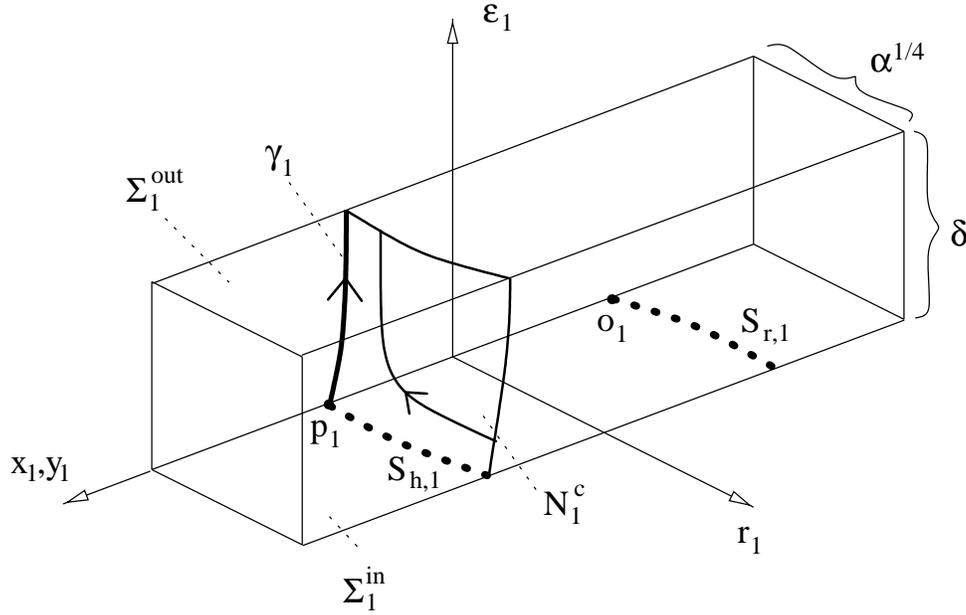
$$\begin{aligned} x_1' &= y_1 + \frac{1}{2}\epsilon_1 x_1 + O(r_1^3) \\ y_1' &= -1 + x_1^2 + \frac{3}{4}\epsilon_1 y_1 - r_1 x_1 y_1 + O(r_1^2) \\ r_1' &= -\frac{1}{4}\epsilon_1 r_1(1 + O(r_1^2)) \\ \epsilon_1' &= \frac{5}{4}\epsilon_1^2(1 + O(r_1^2)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

**Lemma 5** *Die Ruhelagen der Gleichung (4.3) liegen auf den Kurven  $(x_1, y_1, \epsilon_1) = (\pm 1 + O(r_1), O(r_1^3), 0)$ . Die Mannigfaltigkeiten  $\{\epsilon_1 = 0\}$  und  $\{r_1 = 0\}$  sind invariant.*

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus dem Satz über Implizite Funktionen. Die zweite Behauptung gilt wegen der Form der Gleichungen.  $\square$

**Lemma 6** *Die Differentialgleichung (4.3) hat für die Ruhelage  $p = (1, 0, 0, 0)$  eine nicht eindeutige 2-dimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit  $N^c$  tangential zu den Vektoren  $\{(0, -\frac{1}{2}, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ , eine 1-dimensionale stabile Mannigfaltigkeit  $N^s$  zum Eigenwert  $-\sqrt{2}$  tangential zu  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 0, 0)$  und eine 1-dimensionale instabile Mannigfaltigkeit  $N^u$  zum Eigenwert  $\sqrt{2}$  tangential zu  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 0, 0)$ .  $N^s$  und  $N^u$  liegen in der invarianten Mannigfaltigkeit  $\{r_1 = 0\}$ . Die invariante Mannigfaltigkeit  $\gamma_1 = N^c \cap \{r_1 = 0\}$  ist ein von  $p$  weglaufender Orbit tangential zu  $(0, -\frac{1}{2}, 0, 1)$ .*

Beweis: Die Differentialgleichung eingeschränkt auf die invariante Mannigfaltigkeit  $\{r_1 = 0\}$  besitzt je eine 1-dimensionale stabile, instabile und Zentrumsmannigfaltigkeit. Diese invarianten Mannigfaltigkeiten sind auch


 Abbildung 4.2:  $\Pi_1$  in Karte  $K_1$ 

invariante Mannigfaltigkeiten des vollständigen Systems. Mit der Eindeutigkeit von  $N^s$  und  $N^u$  folgt der Satz.  $\square$

Der Orbit  $\gamma_1$  ist genau wie die Zentrumsmannigfaltigkeit  $N^c$  nicht eindeutig. Die Gleichung (4.3) besitzt für die Ruhelage  $o_1 = (-1, 0, 0, 0)$  eine 4-dimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit. Daher funktionieren die hier verwendeten Methoden für  $S_{r,\epsilon}$  nicht.

Die Gleichung (4.3) eingeschränkt auf die invariante Mannigfaltigkeit  $\{r_1 = 0\}$  besitzt die zwei Ruhelagen  $p_1$  und  $o_1$ . In diesem Fall besitzt  $p_1$  eine 1-dimensionale stabile und instabile und die Zentrumsmannigfaltigkeit  $\gamma_1$ . Die Ruhelage  $o_1$  besitzt eine 3-dimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit. In der invarianten Menge  $\{(r_1, \epsilon_1) = (0, 0)\}$  ist die Gleichung (4.3) die in Kapitel 2 untersuchte Gleichung (2.11). In dieser invarianten Ebene sind die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit von  $p_1$  enthalten.

Der Phasenraum der Gleichung (4.3) ist 4-dimensional. Das Verhalten in der invarianten Menge  $\{(r_1, \epsilon_1) = (0, 0)\}$  wird in Abbildung 2.6 beschrieben. In Abbildung 4.2 ist diese Dynamik in der mit  $x_1, y_1$  bezeichneten Achse enthalten. Die 2-dimensionale  $x_1$ - $y_1$ -Ebene ist in Abbildung 4.2 als die Gerade  $x_1, y_1$  dargestellt. Alle parallel zur  $x_1$ - $y_1$ -Ebene liegende Flächen werden ebenfalls als Geraden parallel zur Gerade  $x_1, y_1$  dargestellt.

Wir definieren wieder die Mannigfaltigkeiten

$$\Sigma_1^{in} := \{(x_1, y_1, r_1, \epsilon_1) \mid r_1 = \alpha^{1/4}, \epsilon_1 \in [0, \delta]\}$$

und

$$\Sigma_1^{out} := \{(x_1, y_1, r_1, \epsilon_1) \mid r_1 \in [0, \alpha^{1/4}], \epsilon_1 = \delta\}.$$

$\Delta_1^{in}$  liegt in einer ausreichend kleinen Umgebung von  $S_{h,1}$  in  $\Sigma_1^{in}$ .  $\Pi_1$  sei die durch den Fluß bestimmte Abbildung von  $\Sigma_1^{in}$  nach  $\Sigma_1^{out}$  und wir definieren:  $(x_o, y_o, r_o, \epsilon_o) := \Pi_1(x_i, y_i, r_i, \epsilon_i)$ .

**Lemma 7** Für die Zeit  $T$ , die bei der Abbildung  $\Pi_1$  von  $\Sigma_1^{in}$  nach  $\Sigma_1^{out}$  vergeht, gilt  $T = \frac{4}{5}(\frac{1}{\epsilon_i} - \frac{1}{\delta})(1 + O(\alpha^{1/2}))$ .

Beweis: Aus  $\epsilon'_1 = \frac{5}{4}\epsilon_1^2(1 + O(r_1^2))$  und  $1 - c \leq 1 + O(r_1^2) \leq 1 + c$  mit  $c = O(\alpha^{1/2})$  und Integration folgt  $\frac{4}{5}(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\delta})\frac{1}{1+c} \leq T \leq \frac{4}{5}(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\delta})\frac{1}{1-c}$ . Mit  $\frac{1}{1+c} = 1 + O(c)$  folgt obiges Ergebnis.  $\square$

Für  $\alpha, \delta$  genügend klein schneidet  $N^c$  die Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_1^{in}, \Sigma_1^{out}$  und  $\{r_1 = 0\}$  transversal. Daraus folgt:

**Satz 22**  $\Pi_1$  bildet die Kurve  $\Sigma_1^{in} \cap N^c$  auf die Kurve  $\Sigma_1^{out} \cap N^c$  ab, die transversal zu  $\{r_1 = 0\}$  liegt und  $\{r_1 = 0\}$  in  $\gamma_1 \cap \Sigma_1^{out}$  schneidet.

Für  $0 < c < \sqrt{2}$  existieren  $\alpha, \delta$ , sodaß gilt:

**Satz 23** In  $\Sigma_1^{in}$  existieren transversal zu  $\Sigma_1^{in} \cap N^c$  eine stabile Richtung, in der während der Abbildung  $\Pi_1$  eine Kontraktion der Größe  $e^{-cT}$  und eine instabile Richtung in der eine Expansion der Größe  $e^{cT}$  stattfinden.

Beweis: Laut Zentrumsmannigfaltigkeitstheorie ([2]) existiert zur Mannigfaltigkeit  $N^{cu}$  eine stabile Blätterung  $F^s$ . Zwei Punkte einer stabilen Faser erfahren durch den Fluß eine Kontraktion stärker als  $e^{-ct}$ . Analog existiert  $N^{cs}$  und zwei Punkte einer instabilen Faser expandieren stärker als  $e^{ct}$ .  $\square$

## 4.2 Verhalten in Karte $K_2$

Wir untersuchen als nächstes die Entwicklung des Orbits  $\gamma$  und der Zentrumsmannigfaltigkeit  $N^c$  in Karte  $K_2$ . Die Differentialgleichung (4.1) lautet nach der Division der rechten Seite durch  $r_2$

$$\begin{aligned} x'_2 &= y_2 + O(r_2^3) \\ y'_2 &= \mu_2 + x_2^2 - r_2 x_2 y_2 + O(r_2^2) \\ \mu'_2 &= 1 + O(r_2^2) \\ r'_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Einschränkung auf die invariante Menge  $\{r_2 = 0\}$  ergibt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x'_2 &= y_2 \\ y'_2 &= \mu_2 + x_2^2 \\ \mu'_2 &= 1 \\ r'_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

(Im folgenden lassen wir den Index 2 weg.) Mit einer entsprechender Wahl des Anfangszeitpunktes gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $t = \mu$  und die Gleichung (4.5) läßt sich äquivalent als skalare Gleichung 2. Ordnung schreiben

$$x'' = t + x^2. \quad (4.6)$$

Diese Gleichung ist die erste Painleve Gleichung [1]. Die Painleve Gleichungen I-VI treten in vielen Problemen der mathematischen Physik, insbesondere in der Theorie von integrablen Systemen auf. Ihre Lösungen können als durch nichtlineare Differentialgleichungen definierte spezielle Funktionen analog zu den durch lineare Differentialgleichungen definierten speziellen Funktionen der mathematischen Physik angesehen werden. Wir verweisen dazu auf [9], [5], [6] und [10]. Die folgenden, bekannten Eigenschaften der Lösungen von (4.5) bzw. (4.6) werden benötigt:

**Lemma 8** *Für die Lösungen der ersten Painleve Gleichungen gilt:*

- (a) *Die Lösungen  $x(t)$  besitzen außer beweglichen Polen zweiter Ordnung keine anderen Singularitäten.*
- (b) *Jede Lösung besitzt unendlich viele dieser Pole für  $t \rightarrow \infty$ . Die Laurentreihenentwicklung für einen Pol in  $a$  ist in einer Umgebung von  $a$  durch  $x(t) = \frac{6}{(t-a)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  gegeben.*
- (c) *Für  $t \rightarrow -\infty$  besitzt die Painleve Gleichung (4.6) Lösungen der Form  $x(t) = \pm(-t)^{1/2} + \epsilon(t)$  mit  $\epsilon(t) \ll \sqrt{-t}$ . Für positives Vorzeichen gilt für diese Lösungen  $\epsilon(t) \sim O((-t)^{-2})$ , für negatives Vorzeichen gilt  $\epsilon(t) \sim O((-t)^{-1/8})$ .*

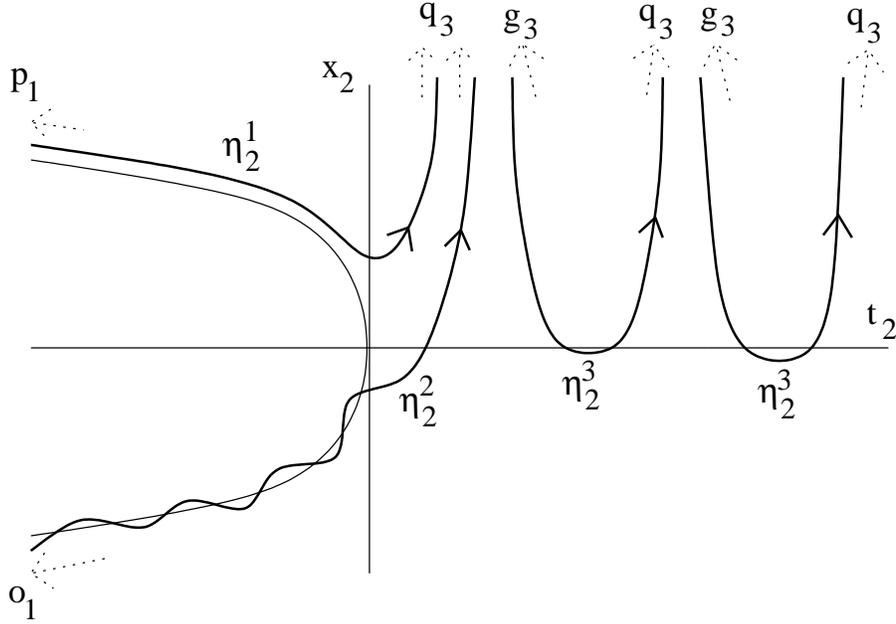
**Beweis:** Wir geben formale Argumente für diese Aussagen: Die zusätzlichen Koeffizienten der Laurentreihenentwicklung ergeben sich durch das Einsetzen des allgemeinen Ansatzes aus [1] in (4.6). Das Einsetzen in Gleichung (4.6) für das positive Vorzeichen ergibt für  $\epsilon(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  ([1]):

$$\epsilon(t) \sim -\frac{1}{8}(-x)^{-2} + c_1(-t)^{-1/8} e^{4\sqrt{2}(-t)^{5/4/5}} + c_2(-t)^{-1/8} e^{-4\sqrt{2}(-t)^{5/4/5}}.$$

Nur Lösungen mit  $c_1 = 0$  erfüllen die Voraussetzungen. Die Abschätzung folgt. Für das negative Vorzeichen führt eine ähnliche Überlegung zu obigen Ergebnis.  $\square$

In obigem Lemma wurden die Lösungen als meromorphe Funktionen betrachtet. Aus dem Lemma folgt die Existenz von gewöhnlichen Lösungen:

- $\eta^1(t)$  mit  $x \sim (-t)^{1/2}$  für  $t \rightarrow -\infty$  und  $x \sim \frac{6}{(t-a)^2}$  für  $t \rightarrow a-$ ,
- $\eta^2(t)$  mit  $x \sim -(-t)^{1/2}$  für  $t \rightarrow -\infty$  und  $x \sim \frac{6}{(t-a)^2}$  für  $t \rightarrow a-$  und


 Abbildung 4.3: Lösungen in Karte  $K_2$ 

- $\eta^3(t)$  mit  $x \sim \frac{6}{(t-a_1)^2}$  für  $t \rightarrow a_1+$  und  $x \sim \frac{6}{(t-a_2)^2}$  für  $t \rightarrow a_2-$  mit  $a_2 > a_1$ .

Der Halbraum  $\{r_1 = 0, \epsilon_1 > 0\}$  in Karte  $K_1$  entspricht dem Halbraum  $\{\mu_2 < 0, r_2 = 0\}$  in Karte  $K_2$ .

**Lemma 9**  $\eta_1^1$  geht für  $t \rightarrow -\infty$  in Karte  $K_1$  tangential zur Eigenrichtung  $(x_1, y_1, r_1, \epsilon_1) = (0, -1/2, 0, 1)$  gegen  $p_1$  und liegt in  $\{r_1 = 0\}$ .

Beweis: Wegen  $y(t) = x'(t)$  gilt für  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\eta_2^1(t) = (x_2, y_2, \mu_2, r_2)(t) = (\sqrt{-t} + O((-t)^{-2}), -\frac{1}{2}(-t)^{-1/2} + O((-t)^{-3}), t, 0).$$

Mit

$$\eta_1^1(t) = \kappa_{12}^{-1}(\eta_2^1(t)) = (1 + O((-t)^{-3/2}), -\frac{1}{2}(-t)^{-5/4} + O((-t)^{-15/4}), 0, (-t)^{-5/4})$$

folgt für  $t \rightarrow -\infty$  die Konvergenz:  $\eta_1^1 \rightarrow (-1, 0, 0, 0)$  und zusätzlich liegt  $(\eta_1^1)'$  tangential zu  $(0, -1/2, 0, 1)$ .  $\square$

Der Orbit  $\gamma$  in Karte  $K_1$  ist nicht eindeutig. Jede Lösung  $\eta^1$  entspricht genau einem Orbit  $\gamma$ .

**Lemma 10** Der Orbit  $\eta_1^2$  geht für  $t \rightarrow -\infty$  tangential zur Eigenrichtung  $(x_1, y_1, r_1, \epsilon_1) = (0, 1/2, 0, 1)$  gegen  $o_1 = (-1, 0, 0, 0)$  in Karte  $K_1$  und liegt in  $\{r_1 = 0\}$ .

Beweis: Analog zu vorigem Satz.  $\square$

Da an den Polen  $x_2 \rightarrow \infty$  gilt, untersuchen wir die auslaufende Richtung in Karte  $K_3$ . Der Halbraum  $\{x_2 > 0, r_2 = 0\}$  entspricht genau dem Halbraum  $\{r_3 = 0, \epsilon_3 > 0\}$ . Sei  $a$  ein Pol einer Lösung  $\eta(t)$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

**Lemma 11**  $\eta_3^j$  geht für  $t \rightarrow a-$  gegen  $q_3 = (r_3, y_3, \mu_3, \epsilon_3) = (0, \sqrt{2/3}, 0, 0)$  in Karte  $K_3$ . Für  $a \neq 0$  liegt  $\eta_3^j$  tangential zu  $(0, \sqrt{3/2}, 1, 0)$  und für  $a = 0$  tangential zu  $(0, -6, -\sqrt{6}, 1)$ .

Beweis: Mit  $y = x'$  und Berechnung der ersten Koeffizienten der Laurentreihe gilt:

$$\eta_2^j(t) = \left( \frac{6}{(t-a)^2} - \frac{a}{10}(t-a)^2 - \frac{1}{6}(t-a)^3 + O(t-a)^4, \frac{-12}{(t-a)^3} - \frac{a}{5}(t-a) - \frac{1}{2}(t-a)^2 + O(t-a)^3, a + (t-a), 0 \right).$$

Für  $\eta_3^j = \kappa_{23}(\eta_2)$  entwickeln wir den zweiten Teil von  $x_2^{-i} = \left( \frac{6}{(t-a)^2} \right)^{-i} (1 + \alpha(t))^{-i}$  für kleine  $\alpha$  in eine Reihe und erhalten

$$\eta_3^j = \left( 0, -\text{sign}(t-a)\sqrt{2/3} \left( 1 + \frac{a}{24}(t-a)^4 + \frac{1}{12}(t-a)^5 + O(t-a)^6 \right), \frac{1}{6^2}(t-a)^4(a + (t-a) + O(t-a)^4), \frac{(t-a)^5}{6^{5/2}} \left( 1 + \frac{a}{24}(t-a)^4 + O(t-a)^5 \right) \right).$$

Einmaliges differenzieren nach  $t$  und  $t \rightarrow a-$  gibt obiges Verhalten.  $\square$

Die Konstante  $a_1$  bezeichnet den linken Pol einer Lösung  $\eta_2^3$ .

**Lemma 12**  $\eta_3^3$  geht für  $t \rightarrow a_1+$  gegen  $g_3 = (r_3, y_3, \mu_3, \epsilon_3) = (0, -\sqrt{2/3}, 0, 0)$  in Karte  $K_3$ . Für  $a_1 \neq 0$  liegt  $\eta_3^3$  tangential zu  $(0, -\sqrt{3/2}, 1, 0)$ , für  $a_1 = 0$  tangential zu  $(0, -6, 2\sqrt{3/2}, 1)$ .

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zu vorigem Lemma.  $\square$

Die  $\eta^j$  sind nicht eindeutig bestimmt.

**Satz 24** Die Lösungen

1.  $\gamma(\eta^1)$  verbinden die Ruhelagen  $p$  und  $q$ ,
2.  $\eta^2$  verbinden die Ruhelagen  $o$  und  $q$ ,
3.  $\eta^3$  verbinden die Ruhelagen  $g$  und  $q$ .

Beweis: Die Berechnung der Ruhelagen in  $K_3$  erfolgt im nächsten Kapitel.  $\square$

Wir definieren  $\Sigma_2^{in} := \{\mu_2 = -\delta^{-4/5}\}$  und  $\Sigma_2^{out} := \{x_2 = -\delta^{-1/5}\}$ .

**Satz 25** Die durch den Fluß bestimmte Abbildung  $\Pi_2 : \Sigma_2^{in} \rightarrow \Sigma_2^{out}$  ist ein Diffeomorphismus und bildet die Kurve  $N_2^c \cap \Sigma_2^{in}$ , die transversal zu  $\{r_2 = 0\}$  liegt, auf eine Kurve in  $\Sigma_2^{out}$ , die transversal zu  $\{r_2 = 0\}$  liegt, ab.

Alle Lösungen, die in  $K_2$  hineinlaufen, das heißt, für die  $\epsilon > 0$  gilt, verlassen  $K_2$  in Richtung  $q$ . Bei der Transformation  $\kappa_{23}$  auf die Koordinaten der Karte  $K_3$  wird  $\{r_2 = 0\}$  auf  $\{r_3 = 0\}$  und  $\Pi_2(N_2^c \cap \Sigma_2^{in})$  auf eine Kurve die transversal zu  $\{r_3 = 0\}$  liegt, abgebildet.

### 4.3 Verhalten in Karte $K_3$

Die Differentialgleichung (4.1) lautet nach der Division der rechten Seite durch  $r_3$

$$\begin{aligned} r_3' &= \frac{1}{2}r_3\varphi \\ y_3' &= \mu_3 + 1 - r_3y_3 + O(r_3^2) - \frac{3}{2}y_3\varphi \\ \mu_3' &= \epsilon_3(1 + O(r_3^2)) - 2\mu_3\varphi \\ \epsilon_3' &= -\frac{5}{2}\epsilon_3\varphi, \end{aligned} \quad (4.7)$$

wobei  $\varphi$  durch  $\varphi = y_3 + O(r_3^3)$  gegeben ist. (Im folgenden lassen wir den Index 3 weg.)

Diese Differentialgleichung besitzt in der Ruhelage  $q = (0, \sqrt{2/3}, 0, 0)$  eine 3-dimensionale stabile Mannigfaltigkeit zu den negativen Eigenwerten  $-3\sqrt{2/3}, -\frac{5}{2}\sqrt{2/3}, -2\sqrt{2/3}$ , die tangential zu den Eigenvektoren  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, -3, -\sqrt{6}, 1)$ ,  $(0, \sqrt{3/2}, 1, 0)$  liegt, und eine 1-dimensionale instabile Mannigfaltigkeit zum Eigenwert  $\frac{1}{2}\sqrt{2/3}$  tangential zu  $(-\frac{7}{2}, 1, 0, 0)$ . Die Ruhelage  $g = (0, -\sqrt{2/3}, 0, 0)$  hat eine 3-dimensionale instabile Mannigfaltigkeit zu den Eigenwerten  $3\sqrt{2/3}, \frac{5}{2}\sqrt{2/3}, 2\sqrt{2/3}$  und Eigenvektoren  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, -3, \sqrt{6}, 1)$ ,  $(0, -\sqrt{3/2}, 1, 0)$  und eine 1-dimensionale stabile Mannigfaltigkeit zum Eigenwert  $\frac{1}{2}\sqrt{2/3}$  und Eigenvektor  $(-\frac{7}{2}, 1, 0, 0)$ . Weiters tritt die in Karte  $K_1$  untersuchte von  $p$  weglaufende Kurve von Ruhelagen auf:

$$(y, \mu, \epsilon) = (r^3, -1 + O(r^2), 0).$$

Die Gleichung (4.7) besitzt die invarianten Mannigfaltigkeiten  $\{r = 0\}$  und  $\{\epsilon = 0\}$ . Daher gilt:

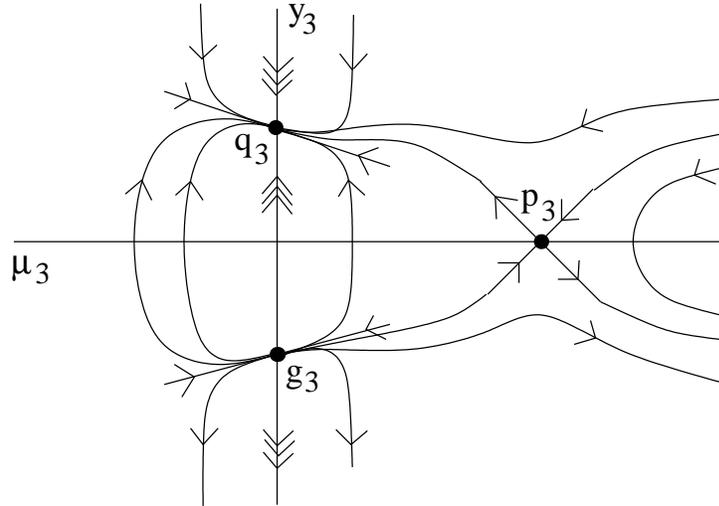
**Satz 26** *Die Ruhelage  $q$  besitzt eine dreidimensionale stabile Mannigfaltigkeit, die in  $\{r = 0\}$  liegt und eine eindimensionale instabile Mannigfaltigkeit transversal dazu.*

Das bedeutet, die Ruhelage  $q$  ist in der invarianten Menge  $\{r = 0\}$  anziehend. Analog ist  $g$  auf  $\{r = 0\}$  abstoßend.

Die Gleichung (4.7) in der invarianten Ebene  $\{(r, \epsilon) = (0, 0)\}$  lautet

$$\begin{aligned} y' &= \mu + 1 \\ \mu' &= -2y\mu. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Diese Gleichung ist gegenüber der Transformation  $(t, y, \mu) \rightarrow (-t, -y, \mu)$  invariant. Bezüglich Gleichung (4.8) besitzt  $q$  zwei stabile und  $g$  zwei instabile Eigenrichtungen.  $p$  ist ein Sattelpunkt. Mit der Berechnung der Nulllinien der rechten Seite von (4.8) erhält man den Einzugsbereich von  $q$ . Das qualitative


 Abbildung 4.4: Lösungen in  $K_3$  für  $\{(r, \epsilon) = (0, 0)\}$ 

Verhalten der Orbits ist in Abbildung 4.4 dargestellt. In Abbildung 4.5 sind die invarianten Mannigfaltigkeiten und einige Orbits der Gleichung (4.7) beschrieben. Da wir wieder einen 4-dimensionalen Phasenraum haben, gehen wir wie in Karte  $K_1$  in Abbildung 4.2 vor. Die  $\mu_3$ - $y_3$ -Ebene wird wieder als die Gerade  $\mu_3, y_3$  dargestellt, Ebenen parallel zur  $\mu_3$ - $y_3$ -Ebene entsprechen Geraden parallel zur Gerade  $\mu_3, y_3$ .

$\Pi_3$  sei wieder die durch den Fluß bestimmte Abbildung von  $\Sigma_3^{in}$  nach  $\Sigma_3^{out}$  (Abb. 4.5), wobei gilt:

$$\Sigma_3^{in} := \{\epsilon_3 = \delta\}, \quad \Sigma_3^{out} := \{r_3 = \beta^{1/2}\}.$$

$\Sigma_2^{out}$  wird durch  $\kappa_{23}$  auf  $\Sigma_3^{in}$ ,  $\Sigma_3^{out}$  durch die blow-down Transformation auf  $\Delta^{out}$  abgebildet.

**Lemma 13** Für die Abbildung  $(x_o, \mu_o, \epsilon_o) = \Pi_3(r_i, \mu_i, y_i)$  gilt

$$\epsilon_o = \frac{\delta}{\beta^{5/2}} r_i^5.$$

Beweis: Aus  $\epsilon' = 5r_3^4 r_3' \epsilon_3 + r_3^5 \epsilon_3' = 0$  folgt  $\epsilon_3 = cr_3^{-5}$  mit einer Konstanten  $c$ . Einsetzen der Anfangs- und Endwerte von  $\Pi_3$  ergibt obiges Ergebnis.  $\square$

Die Abbildung  $\Pi_3$  kann man ähnlich wie in [13] S.20 berechnen:

1. Transformation der Gleichung (4.7) auf eine geeignete Normalform im Punkt  $q$
2. Abschneiden der Terme der Ordnung  $O(3)$

3. Lösen der abgeschnittenen Gleichung ergibt eine Approximation der Lösung
4. Beweis der Gültigkeit der Approximation

Wir führen nur Schritt 1 aus. Die Verschiebung von  $q$  in den Koordinatenursprung  $y = \sqrt{2/3} + \hat{y}$  und die Division der rechten Seite durch  $\sqrt{3/2}\varphi$  ergibt

$$\begin{aligned}
 r' &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}r \\
 \hat{y}' &= -3\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{y} - \sqrt{\frac{2}{3}}r + \mu - \sqrt{\frac{3}{2}}\hat{y}\mu + \sqrt{\frac{3}{2}}r\hat{y}^2 + O(\hat{y}^2) + O(r^2) \\
 \mu' &= -2\sqrt{\frac{2}{3}}\mu + \epsilon(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\hat{y} + O(\hat{y}^2) + O(r^2)) \\
 \epsilon' &= -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Eine Transformation auf Jordansche Normalform, eine darauffolgende Normalformtransformation bis zur Ordnung  $O(3)$  und eine Rücktransformation ergeben folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 r' &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}r \\
 \tilde{y}' &= -3\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{y} - \sqrt{\frac{2}{3}}r + \tilde{\mu} + r\epsilon + O(3) \\
 \tilde{\mu}' &= -2\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\mu} + \epsilon + r\epsilon + O(3) \\
 \epsilon' &= -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

## 4.4 Globale Dynamik im Takens Bogdanov Punkt

Für  $\bar{\epsilon} = 0$  beschreibt die Gleichung (4.1) die in Kapitel 2 untersuchte Takens Bogdanov Verzweigung. In Kombination mit den Ergebnissen aus Karte  $K_1$  und  $K_3$  erhalten wir in blow-up Koordinaten das in Abbildung 4.6 dargestellte Phasenportrait. Auf der Kugeloberfläche  $S^2$  sind die Lösungen für  $\{(\bar{r}, \bar{\epsilon}) = (0, 0)\}$  dargestellt. Für diese Trajektorien gilt:  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\mu}^2 = 1$ .

Für  $\bar{\epsilon} \geq 0$  erfüllen die Lösungen die Gleichung  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\mu}^2 + \bar{\epsilon}^2 = 1$ , diese Punkte liegen auf der Sphäre  $S^3$ . Für  $\{\bar{r} = 0\}$  können wir die Lösungen aus  $S^3$  auf der Vollkugel darstellen: Mit der Gleichung

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\mu}^2 = 1 - \bar{\epsilon}^2, \bar{\epsilon} \in [0, 1]$$

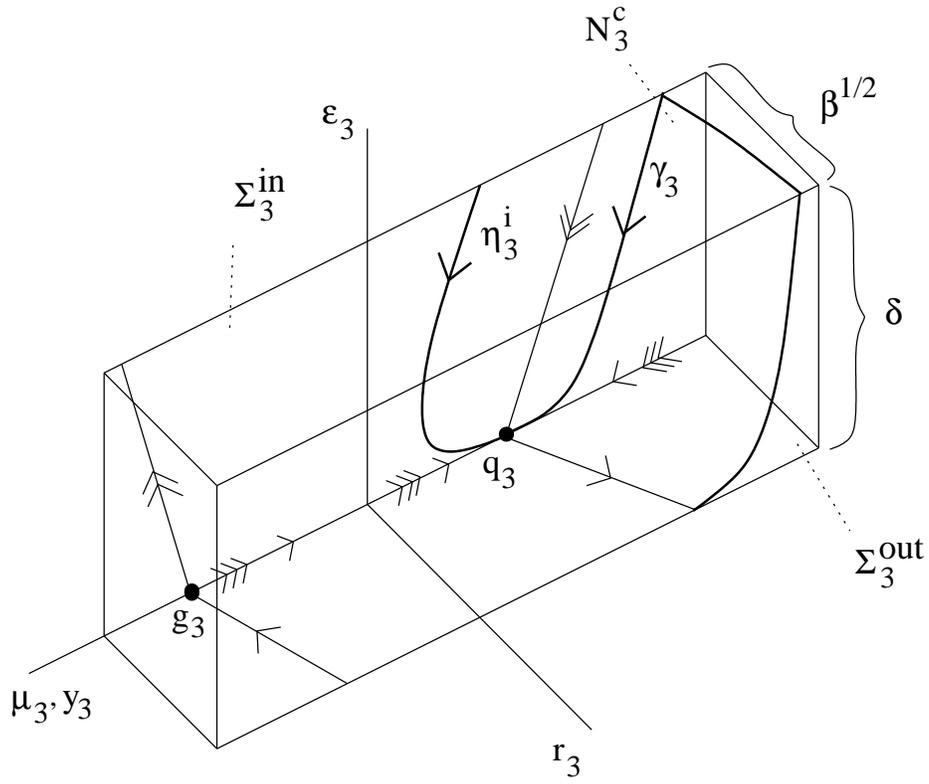
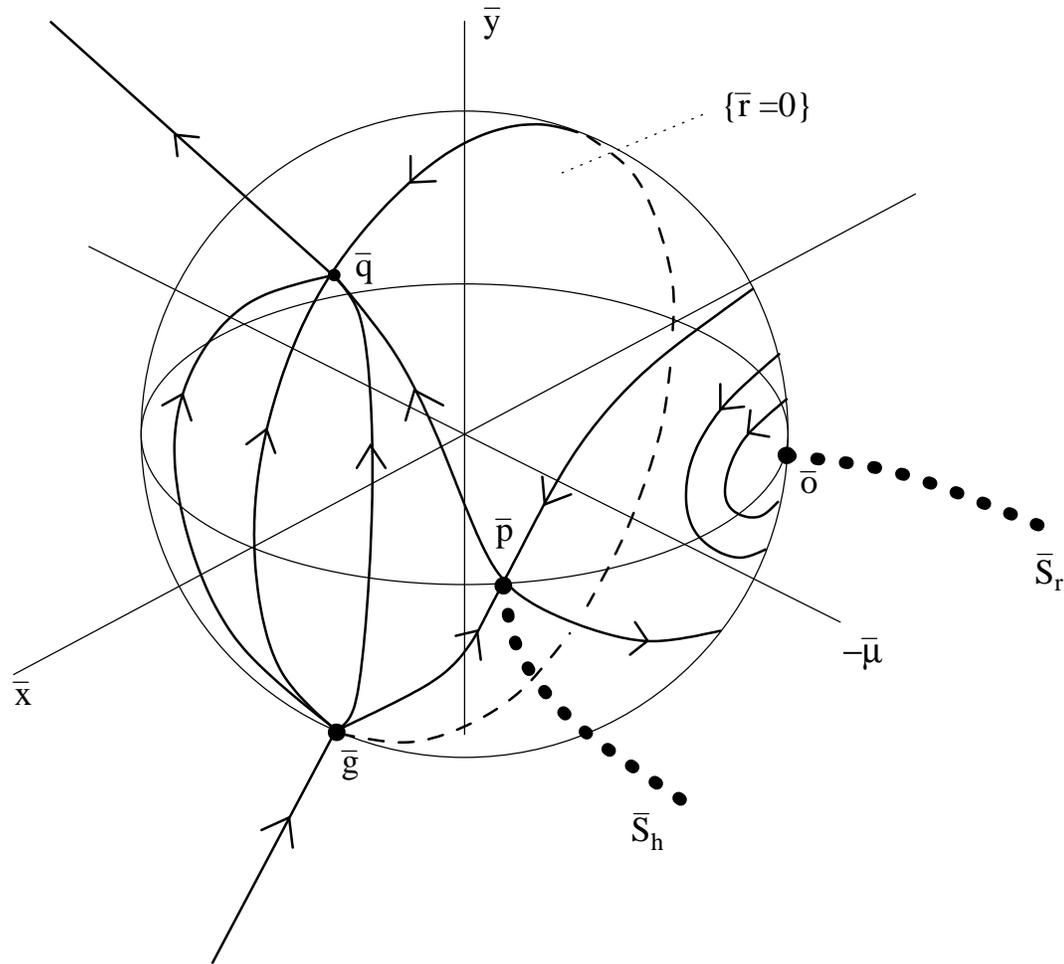


Abbildung 4.5:  $\Pi_3$  in Karte  $K_3$


 Abbildung 4.6: Der Fluß für  $\epsilon = 0$  in einer Umgebung von  $S^2$ 

sieht man, daß die Punkte auf  $S^3$  mit  $\bar{\epsilon} \in [0, 1]$  eindeutig auf der Kugeloberfläche mit dem Radius  $\sqrt{1 - \bar{\epsilon}^2}$  dargestellt werden können. Für die Oberfläche der Vollkugel gilt  $\bar{\epsilon} = 0$  und das Phasenportrait ist genau das in Abbildung 4.6 auf  $S^2$  dargestellte Phasenportrait. Die in Karte  $K_2$  berechneten Lösungen  $\bar{\eta}^i$ , die den Fluß auf  $S^3$  beschreiben, verlaufen daher in Abb. 4.7 durch das Innere der Vollkugel.

#### 4.4.1 Die Dynamik auf $S^3$

Das Verhalten der Lösungen in den einzelnen Karten ergibt den Fluß auf der invarianten Menge  $\{\bar{r} = 0\}$ . Auf  $\{\bar{r} = 0\}$  besitzen die Gleichgewichtslagen

- $\bar{p}$  eine 1-dimensionale Zentrums-, eine 1-dimensionale stabile und eine 1-dimensionale instabile Mannigfaltigkeit,

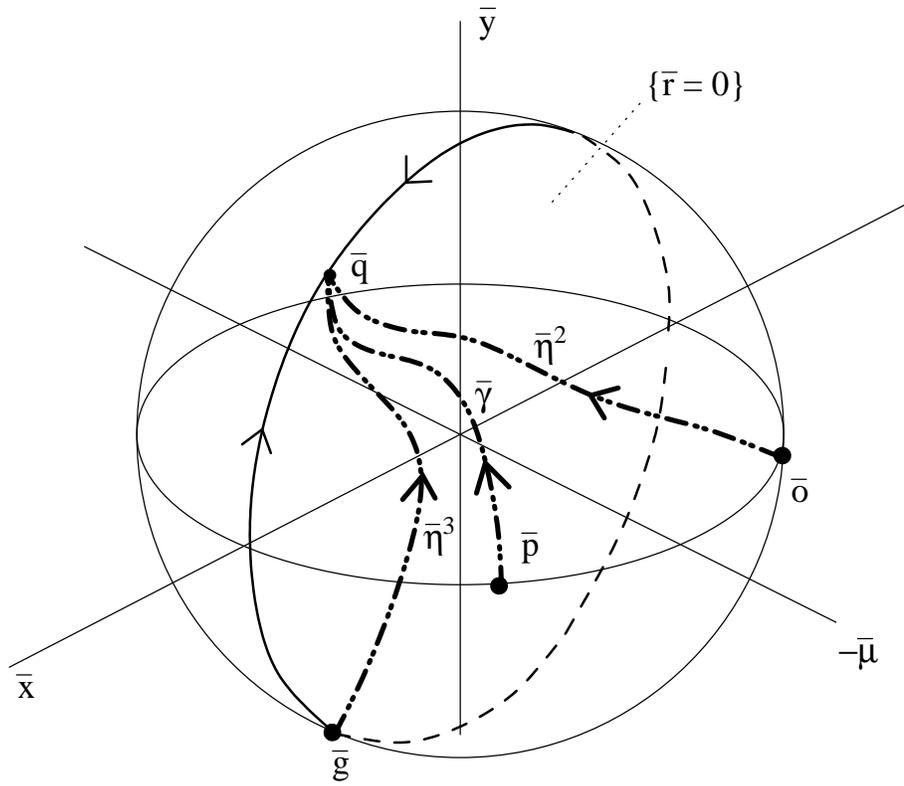


Abbildung 4.7: Der Fluß für  $\epsilon \geq 0$  und  $r = 0$  auf  $S^3$

- $\bar{o}$  eine 3-dimensionale Zentrumsmanifoldigkeit,
- $\bar{q}$  eine 3-dimensionale stabile Mannifoldigkeit und
- $\bar{g}$  eine 3-dimensionale instabile Mannifoldigkeit.

**Satz 27** *Alle Lösungen, die für einen Zeitpunkt  $\bar{\epsilon} > 0$  erfüllen, konvergieren in Vorwärtszeit gegen die Ruhelage  $\bar{q}$  (Abb. 4.7).*

Beweis: Da aus  $\bar{\epsilon} > 0$   $\epsilon_i > 0, i = 1, 2, 3$  folgt, liegen diese Lösungen in dem von Karte  $K_2$  überdeckten Gebiet. Außerdem gilt  $r_2 = 0$ . Aus Lemma 8 und Lemma 11 folgt der Satz.  $\square$

Auf der invarianten Mannifoldigkeit  $\{(\bar{r}, \bar{\epsilon}) = (0, 0)\}$  bezeichnen wir mit  $G$  die Menge, die die Gleichgewichtslagen, den homoklinen Orbit von  $\bar{p}$  und das darin eingeschlossene Gebiet, und die heteroklinen Orbits zwischen den Ruhelagen  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  bzw.  $\bar{g}$  und  $\bar{p}$ , enthält. Es gilt:

**Satz 28** *Das in  $G$  zwischen dem homoklinen Orbit und  $\bar{o}$  liegende Gebiet wird von periodischen Orbits ausgefüllt. Das Gebiet  $\{(\bar{r}, \bar{\epsilon}) = (0, 0)\}$  ohne  $G$  wird von heteroklinen Orbits, die von  $\bar{g}$  nach  $\bar{p}$  laufen, ausgefüllt (Abb. 4.6).*

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus den Berechnungen für die Karte  $K_1$ . Die Berechnung des blow-ups in den Richtungen  $\bar{x} < 0, \bar{\mu} > 0, \bar{y} < 0$  und  $\bar{y} > 0$  zeigt, daß dort keine neuen Ruhelagen auftreten.  $\bar{\mu} = 0$  ist eine weitere invariante Menge. Betrachten des Vektorfeldes in diesen Karten zeigt die zweite Behauptung.  $\square$

#### 4.4.2 Das Verhalten von $\bar{S}_h$

Wir können  $\bar{S}_h$  in den einzelnen Karten entlang der Kugel  $\{\bar{r} = 0\}$  bis zu  $\Sigma_3^{in}$  in einer Umgebung von  $q_2$  verfolgen. Es fehlt noch die Beschreibung der Abbildung  $\Pi_3 : \Sigma_3^{in} \rightarrow \Sigma_3^{out}$ . Damit können wir die Komposition der Abbildungen  $\Pi = \Pi_3 \circ \kappa_{23} \circ \Pi_2 \circ \kappa_{12} \circ \Pi_1$  bilden und diese auf die Mannifoldigkeit  $N_1^c \cap \Sigma_1^{in}$  anwenden und erhalten eine Kurve in  $\Sigma_3^{out}$ . Die Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten ergibt die Abbildung  $\Pi : \Delta_{in} \rightarrow \Delta_{out}$ :

$$\Pi(S_h^\epsilon) = (x, y, \mu) = (\beta, h^1(\epsilon), h^2(\epsilon)).$$

# Literaturverzeichnis

- [1] C. Bender, S.Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, Inc. (1978)
- [2] S. N. Chow, C. Li und D. Wang, Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields, Cambridge University Press, Cambridge (1994)
- [3] H.W. Broer, F.Dumortier, S.J. van Strien and F.Takens, Structures in Dynamics, Studies in Mathematical Physics, Volume 2, North-Holland, S.161-242 (1991)
- [4] N.Fenichel, Geomeric Singular Perturbation Theory, J.Diff.Equ. 31, S.53-98 (1979)
- [5] A. S. Fokas, U. Mugan, X. Zhou, On the solvability of Painleve I, III and V, Inverse Problems 8, S.757-785 (1992)
- [6] A. S. Fokas, M. J. Ablowitz, On a unified approach to transformations and elementary solutions of Painleve equations, J.Math.Phys. 23, S.2033-2042 (1982)
- [7] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York (1983)
- [8] C.K.R.T. Jones, Geometric singular perturbation theorie, in Dynamical Systems, Springer Lecture Notes Math. 1609, 44-120 (1995)
- [9] E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc.
- [10] A. R. Its, A. S. Fokas, A. A. Kapaev, On the asymptotic analysis of the Painleve equations via the isomonodromy method, Nonlinearity 7, S.1291-1325, (1994)
- [11] E.Benoit, Dynamic Bifurcations, Lecture Notes in Mathematics 1493, Springer, Berlin, S.1-13 (1991)
- [12] A.I.Neishtadt, Persistence of Stability Loss for Dynamic Bifurcations II, Differential Equations 24, S.171-176 (1988)

- [13] P. Szmolyan and M. Krupa, Geometric Analysis of the Singularly Perturbed Planar Fold, erscheint in: Multiple Time-Scale Dynamical Systems, IMA-Volumes in Applied Mathematics
- [14] P. Szmolyan, Transversal Heteroclinic and Homoclinic Orbits in Singular Perturbation Problems, J.Diff.Equ. 92, S.252-281
- [15] S.Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Texts in Applied Mathematics 2 (1990)