```
(* Die Eindeutigkeit der Konstanten K1, K2, K3 *)
```

```
(* die stychiometrische Matrix: *)
S := {{-2, -2, -1}, {-1, 0, -1}, {0, 1, -1}}
```

```
(*die Funktion ρ: *)
```

```
ρ[{x_, y_, z_}, K1_, K2_, K3_] := S.{K1 * x^2 * y, K2 * x^2, K3 * x * y * z} + {x, y, z}
```

```
ρρ[{x_, y_, z_}, K1_, K2_, K3_] := ρ[ρ[{x, y, z}, K1, K2, K3], K1, K2, K3];
```

```
(* So sieht die Funktion ρρ aus: *)
```

```
Expand[ρρ[{x, y, z}, K1, K2, K3]]
```

$$
\begin{aligned}
&\{x - 4\,K2\,x^2 + 8\,K2^2\,x^3 - 8\,K2^3\,x^4 - 4\,K1\,x^2\,y + 16\,K1\,K2\,x^3\,y - K2\,K3\,x^3\,y + 2\,K1^2\,x^4\,y - 24\,K1\,K2^2\,x^4\,y + \\
&\quad 2\,K2^2\,K3\,x^4\,y - 8\,K1^2\,K2\,x^5\,y + K1\,K2\,K3\,x^5\,y + 8\,K1^2\,K2^2\,x^6\,y - 2\,K1\,K2^2\,K3\,x^6\,y + 8\,K1^2\,x^3\,y^2 - \\
&\quad 24\,K1^2\,K2\,x^4\,y^2 + 2\,K1\,K2\,K3\,x^4\,y^2 - 8\,K1^3\,x^5\,y^2 + 16\,K1^3\,K2\,x^6\,y^2 - 2\,K1^2\,K2\,K3\,x^6\,y^2 - \\
&\quad 8\,K1^3\,x^4\,y^3 + 8\,K1^4\,x^6\,y^3 - 2\,K3\,x\,y\,z + 6\,K2\,K3\,x^2\,y\,z + 3\,K1\,K3\,x^3\,y\,z - 8\,K2^2\,K3\,x^3\,y\,z - \\
&\quad 10\,K1\,K2\,K3\,x^4\,y\,z + K2\,K3^2\,x^4\,y\,z + 8\,K1\,K2^2\,K3\,x^5\,y\,z - 2\,K2^2\,K3^2\,x^5\,y\,z + 6\,K1\,K3\,x^2\,y^2\,z + \\
&\quad K3^2\,x^2\,y^2\,z - 16\,K1\,K2\,K3\,x^3\,y^2\,z - K2\,K3^2\,x^3\,y^2\,z - 14\,K1^2\,K3\,x^4\,y^2\,z - K1\,K3^2\,x^4\,y^2\,z + \\
&\quad 24\,K1^2\,K2\,K3\,x^5\,y^2\,z - K1\,K2\,K3^2\,x^5\,y^2\,z - 8\,K1^2\,K3\,x^3\,y^3\,z - 2\,K1\,K3^2\,x^3\,y^3\,z + 16\,K1^3\,K3\,x^5\,y^3\,z + \\
&\quad 2\,K1^2\,K3^2\,x^5\,y^3\,z + K3^2\,x^2\,y\,z^2 - 2\,K2\,K3^2\,x^3\,y\,z^2 + K3^2\,x\,y^2\,z^2 - 2\,K2\,K3^2\,x^2\,y^2\,z^2 - 7\,K1\,K3^2\,x^3\,y^2\,z^2 - \\
&\quad K3^3\,x^3\,y^2\,z^2 + 8\,K1\,K2\,K3^2\,x^4\,y^2\,z^2 + K2\,K3^3\,x^4\,y^2\,z^2 - 2\,K1\,K3^2\,x^2\,y^3\,z^2 - K3^3\,x^2\,y^3\,z^2 + \\
&\quad 10\,K1^2\,K3^2\,x^4\,y^3\,z^2 + 3\,K1\,K3^3\,x^4\,y^3\,z^2 - K3^3\,x^2\,y^2\,z^3 + 2\,K1\,K3^3\,x^3\,y^3\,z^3 + K3^4\,x^3\,y^3\,z^3, \\
&\ y - 2\,K1\,x^2\,y + 4\,K1\,K2\,x^3\,y - K2\,K3\,x^3\,y + K1^2\,x^4\,y - 4\,K1\,K2^2\,x^4\,y + 2\,K2^2\,K3\,x^4\,y - 4\,K1^2\,K2\,x^5\,y + \\
&\quad K1\,K2\,K3\,x^5\,y + 4\,K1^2\,K2^2\,x^6\,y - 2\,K1\,K2^2\,K3\,x^6\,y + 4\,K1^2\,x^3\,y^2 - 8\,K1^2\,K2\,x^4\,y^2 + 2\,K1\,K2\,K3\,x^4\,y^2 - \\
&\quad 4\,K1^3\,x^5\,y^2 + 8\,K1^3\,K2\,x^6\,y^2 - 2\,K1^2\,K2\,K3\,x^6\,y^2 - 4\,K1^3\,x^4\,y^3 + 4\,K1^4\,x^6\,y^3 - 2\,K3\,x\,y\,z + \\
&\quad 2\,K2\,K3\,x^2\,y\,z + 2\,K1\,K3\,x^3\,y\,z - 6\,K1\,K2\,K3\,x^4\,y\,z + K2\,K3^2\,x^4\,y\,z + 4\,K1\,K2^2\,K3\,x^5\,y\,z - \\
&\quad 2\,K2^2\,K3^2\,x^5\,y\,z + 4\,K1\,K3\,x^2\,y^2\,z + K3^2\,x^2\,y^2\,z - 4\,K1\,K2\,K3\,x^3\,y^2\,z - K2\,K3^2\,x^3\,y^2\,z - \\
&\quad 8\,K1^2\,K3\,x^4\,y^2\,z - K1\,K3^2\,x^4\,y^2\,z + 12\,K1^2\,K2\,K3\,x^5\,y^2\,z - K1\,K2\,K3^2\,x^5\,y^2\,z - 4\,K1^2\,K3\,x^3\,y^3\,z - \\
&\quad 2\,K1\,K3^2\,x^3\,y^3\,z + 8\,K1^3\,K3\,x^5\,y^3\,z + 2\,K1^2\,K3^2\,x^5\,y^3\,z + K3^2\,x^2\,y\,z^2 - 2\,K2\,K3^2\,x^3\,y\,z^2 + K3^2\,x\,y^2\,z^2 - \\
&\quad 5\,K1\,K3^2\,x^3\,y^2\,z^2 - K3^3\,x^3\,y^2\,z^2 + 4\,K1\,K2\,K3^2\,x^4\,y^2\,z^2 + K2\,K3^3\,x^4\,y^2\,z^2 - K1\,K3^2\,x^2\,y^3\,z^2 - \\
&\quad K3^3\,x^2\,y^3\,z^2 + 5\,K1^2\,K3^2\,x^4\,y^3\,z^2 + 3\,K1\,K3^3\,x^4\,y^3\,z^2 - K3^3\,x^2\,y^2\,z^3 + K1\,K3^3\,x^3\,y^3\,z^3 + K3^4\,x^3\,y^3\,z^3, \\
&\ 2\,K2\,x^2 - 4\,K2^2\,x^3 + 4\,K2^3\,x^4 - 4\,K1\,K2\,x^3\,y - K2\,K3\,x^3\,y + 8\,K1\,K2^2\,x^4\,y + 2\,K2^2\,K3\,x^4\,y + \\
&\quad K1\,K2\,K3\,x^5\,y - 2\,K1\,K2^2\,K3\,x^6\,y + 4\,K1^2\,K2\,x^4\,y^2 + 2\,K1\,K2\,K3\,x^4\,y^2 - 2\,K1^2\,K2\,K3\,x^6\,y^2 + \\
&\quad z - 2\,K3\,x\,y\,z + K1\,K3\,x^3\,y\,z + 4\,K2^2\,K3\,x^3\,y\,z - 2\,K1\,K2\,K3\,x^4\,y\,z + K2\,K3^2\,x^4\,y\,z - \\
&\quad 2\,K2^2\,K3^2\,x^5\,y\,z + 2\,K1\,K3\,x^2\,y^2\,z + K3^2\,x^2\,y^2\,z + 4\,K1\,K2\,K3\,x^3\,y^2\,z - K2\,K3^2\,x^3\,y^2\,z - \\
&\quad 2\,K1^2\,K3\,x^4\,y^2\,z - K1\,K3^2\,x^4\,y^2\,z - K1\,K2\,K3^2\,x^5\,y^2\,z - 2\,K1\,K3^2\,x^3\,y^3\,z + 2\,K1^2\,K3^2\,x^5\,y^3\,z + \\
&\quad K3^2\,x^2\,y\,z^2 - 2\,K2\,K3^2\,x^3\,y\,z^2 + K3^2\,x\,y^2\,z^2 + K2\,K3^2\,x^2\,y^2\,z^2 - 3\,K1\,K3^2\,x^3\,y^2\,z^2 - \\
&\quad K3^3\,x^3\,y^2\,z^2 + K2\,K3^3\,x^4\,y^2\,z^2 - K3^3\,x^2\,y^3\,z^2 + 3\,K1\,K3^3\,x^4\,y^3\,z^2 - K3^3\,x^2\,y^2\,z^3 + K3^4\,x^3\,y^3\,z^3\}
\end{aligned}
$$

```
Teil1 = Part[%, 1];
```

```
(* Als nächstes geben wir die Koeffizienten der Monome
     K1^i K2^j K3^m an in der ersten Zeile von ρρ an *)
```

```
Koeff1 = CoefficientList[Part[
   Expand[ρρ[{x, y, z}, K1, K2, K3] + {ϵ * K2^4, ϵ * K2^4, ϵ * K2^4 + ϵ * K1^4}], 1], {K1, K2, K3
```

$\{\{\{x, -2xyz, x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2, -x^3y^2z^2 - x^2y^3z^2 - x^2y^2z^3, x^3y^3z^3\},$
$\{-4x^2, -x^3y + 6x^2yz, x^4yz - x^3y^2z - 2x^3yz^2 - 2x^2y^2z^2, x^4y^2z^2, 0\},$
$\{8x^3, 2x^4y - 8x^3yz, -2x^5yz, 0, 0\}, \{-8x^4, 0, 0, 0, 0\}, \{\epsilon, 0, 0, 0, 0\}\},$
$\{\{-4x^2y, 3x^3yz + 6x^2y^2z, -x^4y^2z - 2x^3y^3z - 7x^3y^2z^2 - 2x^2y^3z^2, 3x^4y^3z^2 + 2x^3y^3z^3, 0\},$
$\{16x^3y, x^5y + 2x^4y^2 - 10x^4yz - 16x^3y^2z, -x^5y^2z + 8x^4y^2z^2, 0, 0\},$
$\{-24x^4y, -2x^6y + 8x^5yz, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\},$
$\{\{2x^4y + 8x^3y^2, -14x^4y^2z - 8x^3y^3z, 2x^5y^3z + 10x^4y^3z^2, 0, 0\},$
$\{-8x^5y - 24x^4y^2, -2x^6y^2 + 24x^5y^2z, 0, 0, 0\}, \{8x^6y, 0, 0, 0, 0\},$
$\{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\}, \{\{-8x^5y^2 - 8x^4y^3, 16x^5y^3z, 0, 0, 0\},$
$\{16x^6y^2, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\},$
$\{\{8x^6y^3, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\}\}$

```
(* Das gleiche machen wir nun noch mit den Zeilen 2
    und 3 von ρρ *)
Teil2 = Part[Expand[ρρ[{x, y, z}, K1, K2, K3]], 2];
```

```
Koeff2 = CoefficientList[Part[
   Expand[ρρ[{x, y, z}, K1, K2, K3] + {ϵ * K2^4, ϵ * K2^4, ϵ * K2^4 + ϵ * K1^4}], 2], {K1, K2, K3
```

$\{\{\{y, -2xyz, x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2, -x^3y^2z^2 - x^2y^3z^2 - x^2y^2z^3, x^3y^3z^3\},$
$\{0, -x^3y + 2x^2yz, x^4yz - x^3y^2z - 2x^3yz^2, x^4y^2z^2, 0\},$
$\{0, 2x^4y, -2x^5yz, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{\epsilon, 0, 0, 0, 0\}\},$
$\{\{-2x^2y, 2x^3yz + 4x^2y^2z, -x^4y^2z - 2x^3y^3z - 5x^3y^2z^2 - x^2y^3z^2, 3x^4y^3z^2 + x^3y^3z^3, 0\},$
$\{4x^3y, x^5y + 2x^4y^2 - 6x^4yz - 4x^3y^2z, -x^5y^2z + 4x^4y^2z^2, 0, 0\},$
$\{-4x^4y, -2x^6y + 4x^5yz, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\},$
$\{\{x^4y + 4x^3y^2, -8x^4y^2z - 4x^3y^3z, 2x^5y^3z + 5x^4y^3z^2, 0, 0\},$
$\{-4x^5y - 8x^4y^2, -2x^6y^2 + 12x^5y^2z, 0, 0, 0\}, \{4x^6y, 0, 0, 0, 0\},$
$\{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\}, \{\{-4x^5y^2 - 4x^4y^3, 8x^5y^3z, 0, 0, 0\},$
$\{8x^6y^2, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\},$
$\{\{4x^6y^3, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\}\}$

```
(* Bei der dritten Zeile müssen wir ein wenig aufpassen *)
```

```
Koeff3 = CoefficientList[Part[
   Expand[ρρ[{x, y, z}, K1, K2, K3] + {ϵ * K2^4, ϵ * K2^4, ϵ * K2^4 + ϵ * K1^4}], 3], {K1, K2, K3
```

$\{\{\{z, -2xyz, x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2, -x^3y^2z^2 - x^2y^3z^2 - x^2y^2z^3, x^3y^3z^3\},$
$\{2x^2, -x^3y, x^4yz - x^3y^2z - 2x^3yz^2 + x^2y^2z^2, x^4y^2z^2, 0\},$
$\{-4x^3, 2x^4y + 4x^3yz, -2x^5yz, 0, 0\}, \{4x^4, 0, 0, 0, 0\}, \{\epsilon, 0, 0, 0, 0\}\},$
$\{\{0, x^3yz + 2x^2y^2z, -x^4y^2z - 2x^3y^3z - 3x^3y^2z^2, 3x^4y^3z^2, 0\},$
$\{-4x^3y, x^5y + 2x^4y^2 - 2x^4yz + 4x^3y^2z, -x^5y^2z, 0, 0\}, \{8x^4y, -2x^6y, 0, 0, 0\},$
$\{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\}, \{\{0, -2x^4y^2z, 2x^5y^3z, 0, 0\},$
$\{4x^4y^2, -2x^6y^2, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\},$
$\{\{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\},$
$\{\{\epsilon, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\}\}$

```
Flatten[Koeff1];

Flatten[Koeff2];

Flatten[Koeff3];

(* Als nächstes geben wir die Matrix, deren ite Zeile , wobei i von 1
    bis 3 rangiert, die Koeffizienten (meistens selber Polynome in x,y und
       z) enthält, die vor einem Ausdruck der Form (K1^j * K2^n * K3^m) in
       der i-ten Zeile von ρρ auftreten.
     Es ist etwa -2 xyz der Koeffizient von K3 in der ersten Zeile von
    ρρ , (x^2 y^2 z+x^2 y z^2+x y^2 z^2) der von K3^2 usw. *)
```

```
A = {Flatten[Koeff1], Flatten[Koeff2], Flatten[Koeff3]}
```

$\{\{x,\ -2\,x\,y\,z,\ x^2\,y^2\,z+x^2\,y\,z^2+x\,y^2\,z^2,\ -x^3\,y^2\,z^2-x^2\,y^3\,z^2-x^2\,y^2\,z^3,\ x^3\,y^3\,z^3,\ -4\,x^2,\ -x^3\,y+6\,x^2\,y\,z,$
$x^4\,y\,z-x^3\,y^2\,z-2\,x^3\,y\,z^2-2\,x^2\,y^2\,z^2,\ x^4\,y^2\,z^2,\ 0,\ 8\,x^3,\ 2\,x^4\,y-8\,x^3\,y\,z,\ -2\,x^5\,y\,z,\ 0,\ 0,\ -8\,x^4,$
$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \in,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -4\,x^2\,y,\ 3\,x^3\,y\,z+6\,x^2\,y^2\,z,\ -x^4\,y^2\,z-2\,x^3\,y^3\,z-7\,x^3\,y^2\,z^2-2\,x^2\,y^3\,z^2,$
$3\,x^4\,y^3\,z^2+2\,x^3\,y^3\,z^3,\ 0,\ 16\,x^3\,y,\ x^5\,y+2\,x^4\,y^2-10\,x^4\,y\,z-16\,x^3\,y^2\,z,\ -x^5\,y^2\,z+8\,x^4\,y^2\,z^2,$
$0,\ 0,\ -24\,x^4\,y,\ -2\,x^6\,y+8\,x^5\,y\,z,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2\,x^4\,y+8\,x^3\,y^2,$
$-14\,x^4\,y^2\,z-8\,x^3\,y^3\,z,\ 2\,x^5\,y^3\,z+10\,x^4\,y^3\,z^2,\ 0,\ 0,\ -8\,x^5\,y-24\,x^4\,y^2,\ -2\,x^6\,y^2+24\,x^5\,y^2\,z,$
$0,\ 0,\ 0,\ 8\,x^6\,y,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -8\,x^5\,y^2-8\,x^4\,y^3,$
$16\,x^5\,y^3\,z,\ 0,\ 0,\ 0,\ 16\,x^6\,y^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$
$0,\ 8\,x^6\,y^3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$
$\{y,\ -2\,x\,y\,z,\ x^2\,y^2\,z+x^2\,y\,z^2+x\,y^2\,z^2,\ -x^3\,y^2\,z^2-x^2\,y^3\,z^2-x^2\,y^2\,z^3,\ x^3\,y^3\,z^3,\ 0,\ -x^3\,y+2\,x^2\,y\,z,$
$x^4\,y\,z-x^3\,y^2\,z-2\,x^3\,y\,z^2,\ x^4\,y^2\,z^2,\ 0,\ 0,\ 2\,x^4\,y,\ -2\,x^5\,y\,z,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \in,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$
$-2\,x^2\,y,\ 2\,x^3\,y\,z+4\,x^2\,y^2\,z,\ -x^4\,y^2\,z-2\,x^3\,y^3\,z-5\,x^3\,y^2\,z^2-x^2\,y^3\,z^2,\ 3\,x^4\,y^3\,z^2+x^3\,y^3\,z^3,\ 0,\ 4\,x^3\,y,$
$x^5\,y+2\,x^4\,y^2-6\,x^4\,y\,z-4\,x^3\,y^2\,z,\ -x^5\,y^2\,z+4\,x^4\,y^2\,z^2,\ 0,\ 0,\ -4\,x^4\,y,\ -2\,x^6\,y+4\,x^5\,y\,z,\ 0,\ 0,\ 0,$
$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ x^4\,y+4\,x^3\,y^2,\ -8\,x^4\,y^2\,z-4\,x^3\,y^3\,z,\ 2\,x^5\,y^3\,z+5\,x^4\,y^3\,z^2,\ 0,\ 0,$
$-4\,x^5\,y-8\,x^4\,y^2,\ -2\,x^6\,y^2+12\,x^5\,y^2\,z,\ 0,\ 0,\ 0,\ 4\,x^6\,y,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$
$0,\ -4\,x^5\,y^2-4\,x^4\,y^3,\ 8\,x^5\,y^3\,z,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8\,x^6\,y^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$
$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 4\,x^6\,y^3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$
$\{z,\ -2\,x\,y\,z,\ x^2\,y^2\,z+x^2\,y\,z^2+x\,y^2\,z^2,\ -x^3\,y^2\,z^2-x^2\,y^3\,z^2-x^2\,y^2\,z^3,\ x^3\,y^3\,z^3,\ 2\,x^2,\ -x^3\,y,$
$x^4\,y\,z-x^3\,y^2\,z-2\,x^3\,y\,z^2+x^2\,y^2\,z^2,\ x^4\,y^2\,z^2,\ 0,\ -4\,x^3,\ 2\,x^4\,y+4\,x^3\,y\,z,\ -2\,x^5\,y\,z,\ 0,\ 0,\ 4\,x^4,$
$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \in,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ x^3\,y\,z+2\,x^2\,y^2\,z,\ -x^4\,y^2\,z-2\,x^3\,y^3\,z-3\,x^3\,y^2\,z^2,\ 3\,x^4\,y^3\,z^2,\ 0,$
$-4\,x^3\,y,\ x^5\,y+2\,x^4\,y^2-2\,x^4\,y\,z+4\,x^3\,y^2\,z,\ -x^5\,y^2\,z,\ 0,\ 0,\ 8\,x^4\,y,\ -2\,x^6\,y,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$
$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -2\,x^4\,y^2\,z,\ 2\,x^5\,y^3\,z,\ 0,\ 0,\ 4\,x^4\,y^2,\ -2\,x^6\,y^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$
$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$
$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \in,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}\}$

```
(* Es kann passieren, dass ein Ausdruck (K1^j * K2^n * K3^m) für gewisse j,n
    und m in keiner der drei Zeilen von ρρ auftritt. In jeder Zeile steht dann
    in der Matrix A an der entsprechenden Stelle eine Null. Diese Stellen werden
    wir jetzt eleminieren. Die so entstehende Matrix nennen wir die "Koeffizienten-
matrix" *)
```

```
B = Transpose[A];

Hilfsmatrix = DeleteCases[B, {0, 0, 0}];
```

**Koeffizientenmatrix = Transpose[Hilfsmatrix]**

$$
\begin{gathered}
\{\{x,\ -2\,x\,y\,z,\ x^2\,y^2\,z+x^2\,y\,z^2+x\,y^2\,z^2,\ -x^3\,y^2\,z^2-x^2\,y^3\,z^2-x^2\,y^2\,z^3,\ x^3\,y^3\,z^3,\ -4\,x^2,\\
-x^3\,y+6\,x^2\,y\,z,\ x^4\,y\,z-x^3\,y^2\,z-2\,x^3\,y\,z^2-2\,x^2\,y^2\,z^2,\ x^4\,y^2\,z^2,\ 8\,x^3,\ 2\,x^4\,y-8\,x^3\,y\,z,\\
-2\,x^5\,y\,z,\ -8\,x^4,\ \epsilon,\ -4\,x^2\,y,\ 3\,x^3\,y\,z+6\,x^2\,y^2\,z,\ -x^4\,y^2\,z-2\,x^3\,y^3\,z-7\,x^3\,y^2\,z^2-2\,x^2\,y^3\,z^2,\\
3\,x^4\,y^3\,z^2+2\,x^3\,y^3\,z^3,\ 16\,x^3\,y,\ x^5\,y+2\,x^4\,y^2-10\,x^4\,y\,z-16\,x^3\,y^2\,z,\ -x^5\,y^2\,z+8\,x^4\,y^2\,z^2,\\
-24\,x^4\,y,\ -2\,x^6\,y+8\,x^5\,y\,z,\ 2\,x^4\,y+8\,x^3\,y^2,\ -14\,x^4\,y^2\,z-8\,x^3\,y^3\,z,\ 2\,x^5\,y^3\,z+10\,x^4\,y^3\,z^2,\\
-8\,x^5\,y-24\,x^4\,y^2,\ -2\,x^6\,y^2+24\,x^5\,y^2\,z,\ 8\,x^6\,y,\ -8\,x^5\,y^2-8\,x^4\,y^3,\ 16\,x^5\,y^3\,z,\ 16\,x^6\,y^2,\ 8\,x^6\,y^3\},\\
\{y,\ -2\,x\,y\,z,\ x^2\,y^2\,z+x^2\,y\,z^2+x\,y^2\,z^2,\ -x^3\,y^2\,z^2-x^2\,y^3\,z^2-x^2\,y^2\,z^3,\ x^3\,y^3\,z^3,\ 0,\\
-x^3\,y+2\,x^2\,y\,z,\ x^4\,y\,z-x^3\,y^2\,z-2\,x^3\,y\,z^2,\ x^4\,y^2\,z^2,\ 0,\ 2\,x^4\,y,\ -2\,x^5\,y\,z,\ 0,\ \epsilon,\ -2\,x^2\,y,\\
2\,x^3\,y\,z+4\,x^2\,y^2\,z,\ -x^4\,y^2\,z-2\,x^3\,y^3\,z-5\,x^3\,y^2\,z^2-x^2\,y^3\,z^2,\ 3\,x^4\,y^3\,z^2+x^3\,y^3\,z^3,\ 4\,x^3\,y,\\
x^5\,y+2\,x^4\,y^2-6\,x^4\,y\,z-4\,x^3\,y^2\,z,\ -x^5\,y^2\,z+4\,x^4\,y^2\,z^2,\ -4\,x^4\,y,\ -2\,x^6\,y+4\,x^5\,y\,z,\\
x^4\,y+4\,x^3\,y^2,\ -8\,x^4\,y^2\,z-4\,x^3\,y^3\,z,\ 2\,x^5\,y^3\,z+5\,x^4\,y^3\,z^2,\ -4\,x^5\,y-8\,x^4\,y^2,\\
-2\,x^6\,y^2+12\,x^5\,y^2\,z,\ 4\,x^6\,y,\ -4\,x^5\,y^2-4\,x^4\,y^3,\ 8\,x^5\,y^3\,z,\ 8\,x^6\,y^2,\ 4\,x^6\,y^3\},\\
\{z,\ -2\,x\,y\,z,\ x^2\,y^2\,z+x^2\,y\,z^2+x\,y^2\,z^2,\ -x^3\,y^2\,z^2-x^2\,y^3\,z^2-x^2\,y^2\,z^3,\ x^3\,y^3\,z^3,\ 2\,x^2,\\
-x^3\,y,\ x^4\,y\,z-x^3\,y^2\,z-2\,x^3\,y\,z^2+x^2\,y^2\,z^2,\ x^4\,y^2\,z^2,\ -4\,x^3,\ 2\,x^4\,y+4\,x^3\,y\,z,\\
-2\,x^5\,y\,z,\ 4\,x^4,\ \epsilon,\ 0,\ x^3\,y\,z+2\,x^2\,y^2\,z,\ -x^4\,y^2\,z-2\,x^3\,y^3\,z-3\,x^3\,y^2\,z^2,\\
3\,x^4\,y^3\,z^2,\ -4\,x^3\,y,\ x^5\,y+2\,x^4\,y^2-2\,x^4\,y\,z+4\,x^3\,y^2\,z,\ -x^5\,y^2\,z,\ 8\,x^4\,y,\\
-2\,x^6\,y,\ 0,\ -2\,x^4\,y^2\,z,\ 2\,x^5\,y^3\,z,\ 4\,x^4\,y^2,\ -2\,x^6\,y^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \epsilon\}\}
\end{gathered}
$$

**(*Die neue Länge einer Zeile ist nun 33 (im Unterschied zu 125 vorher). Die künstlich und aufgrund technischer Gründe eingeführte Variable $\epsilon$ stelle man sich als Null vor. Wir werden sie auch gleich auf Null setzen. Wir stellen uns weiterhin x,y,z als Komponenten des Eingabevektors $\xi$ vor. *)**

**Length[Part[Koeffizientenmatrix, 1]]**

33

**(* Wir nehmen nun an, dass es einen festen Vektor v=(v[1],v[2],...,v[33]) gibt, der im Kern der Koeffizientenmatrix für ALLE Eingabedaten $\xi$ aus der Datenbasis liegt. Wir wollen nun zeigen, dass v der Nullvektor sein muss. Diese Tatsache würde dann sichern, dass wir mit genügend vielen Gleichungen unseren gesuchten Vektor ( der u.a. K1, K2 und K3 enthält ) eindeutig bestimmen könnten. *)**

**(* Wir multiplizieren die Koeffizientenmatrix mit einem Vektor *)**

```
Bestimmungsgl = Koeffizientenmatrix.Array[v, 33] /. {ϵ -> 0}
```

$$\begin{aligned}
&\{x\, v[1] - 2\, x\, y\, z\, v[2] + (x^2 y^2 z + x^2 y z^2 + x y^2 z^2)\, v[3] + (-x^3 y^2 z^2 - x^2 y^3 z^2 - x^2 y^2 z^3)\, v[4] + \\
&\quad x^3 y^3 z^3\, v[5] - 4\, x^2\, v[6] + (-x^3 y + 6\, x^2 y\, z)\, v[7] + (x^4 y\, z - x^3 y^2 z - 2\, x^3 y\, z^2 - 2\, x^2 y^2 z^2)\, v[8] + \\
&\quad x^4 y^2 z^2\, v[9] + 8\, x^3\, v[10] + (2\, x^4 y - 8\, x^3 y\, z)\, v[11] - 2\, x^5 y\, z\, v[12] - 8\, x^4\, v[13] - \\
&\quad 4\, x^2 y\, v[15] + (3\, x^3 y\, z + 6\, x^2 y^2 z)\, v[16] + (-x^4 y^2 z - 2\, x^3 y^3 z - 7\, x^3 y^2 z^2 - 2\, x^2 y^3 z^2)\, v[17] + \\
&\quad (3\, x^4 y^3 z^2 + 2\, x^3 y^3 z^3)\, v[18] + 16\, x^3 y\, v[19] + (x^5 y + 2\, x^4 y^2 - 10\, x^4 y\, z - 16\, x^3 y^2 z)\, v[20] + \\
&\quad (-x^5 y^2 z + 8\, x^4 y^2 z^2)\, v[21] - 24\, x^4 y\, v[22] + (-2\, x^6 y + 8\, x^5 y\, z)\, v[23] + \\
&\quad (2\, x^4 y + 8\, x^3 y^2)\, v[24] + (-14\, x^4 y^2 z - 8\, x^3 y^3 z)\, v[25] + (2\, x^5 y^3 z + 10\, x^4 y^3 z^2)\, v[26] + \\
&\quad (-8\, x^5 y - 24\, x^4 y^2)\, v[27] + (-2\, x^6 y^2 + 24\, x^5 y^2 z)\, v[28] + 8\, x^6 y\, v[29] + \\
&\quad (-8\, x^5 y^2 - 8\, x^4 y^3)\, v[30] + 16\, x^5 y^3 z\, v[31] + 16\, x^6 y^2\, v[32] + 8\, x^6 y^3\, v[33], \\
&\; y\, v[1] - 2\, x\, y\, z\, v[2] + (x^2 y^2 z + x^2 y z^2 + x y^2 z^2)\, v[3] + (-x^3 y^2 z^2 - x^2 y^3 z^2 - x^2 y^2 z^3)\, v[4] + \\
&\quad x^3 y^3 z^3\, v[5] + (-x^3 y + 2\, x^2 y\, z)\, v[7] + (x^4 y\, z - x^3 y^2 z - 2\, x^3 y\, z^2)\, v[8] + \\
&\quad x^4 y^2 z^2\, v[9] + 2\, x^4 y\, v[11] - 2\, x^5 y\, z\, v[12] - 2\, x^2 y\, v[15] + (2\, x^3 y\, z + 4\, x^2 y^2 z)\, v[16] + \\
&\quad (-x^4 y^2 z - 2\, x^3 y^3 z - 5\, x^3 y^2 z^2 - x^2 y^3 z^2)\, v[17] + (3\, x^4 y^3 z^2 + x^3 y^3 z^3)\, v[18] + 4\, x^3 y\, v[19] + \\
&\quad (x^5 y + 2\, x^4 y^2 - 6\, x^4 y\, z - 4\, x^3 y^2 z)\, v[20] + (-x^5 y^2 z + 4\, x^4 y^2 z^2)\, v[21] - 4\, x^4 y\, v[22] + \\
&\quad (-2\, x^6 y + 4\, x^5 y\, z)\, v[23] + (x^4 y + 4\, x^3 y^2)\, v[24] + (-8\, x^4 y^2 z - 4\, x^3 y^3 z)\, v[25] + \\
&\quad (2\, x^5 y^3 z + 5\, x^4 y^3 z^2)\, v[26] + (-4\, x^5 y - 8\, x^4 y^2)\, v[27] + (-2\, x^6 y^2 + 12\, x^5 y^2 z)\, v[28] + \\
&\quad 4\, x^6 y\, v[29] + (-4\, x^5 y^2 - 4\, x^4 y^3)\, v[30] + 8\, x^5 y^3 z\, v[31] + 8\, x^6 y^2\, v[32] + 4\, x^6 y^3\, v[33], \\
&\; z\, v[1] - 2\, x\, y\, z\, v[2] + (x^2 y^2 z + x^2 y z^2 + x y^2 z^2)\, v[3] + (-x^3 y^2 z^2 - x^2 y^3 z^2 - x^2 y^2 z^3)\, v[4] + \\
&\quad x^3 y^3 z^3\, v[5] + 2\, x^2\, v[6] - x^3 y\, v[7] + (x^4 y\, z - x^3 y^2 z - 2\, x^3 y\, z^2 + x^2 y^2 z^2)\, v[8] + \\
&\quad x^4 y^2 z^2\, v[9] - 4\, x^3\, v[10] + (2\, x^4 y + 4\, x^3 y\, z)\, v[11] - 2\, x^5 y\, z\, v[12] + 4\, x^4\, v[13] + \\
&\quad (x^3 y\, z + 2\, x^2 y^2 z)\, v[16] + (-x^4 y^2 z - 2\, x^3 y^3 z - 3\, x^3 y^2 z^2)\, v[17] + 3\, x^4 y^3 z^2\, v[18] - \\
&\quad 4\, x^3 y\, v[19] + (x^5 y + 2\, x^4 y^2 - 2\, x^4 y\, z + 4\, x^3 y^2 z)\, v[20] - x^5 y^2 z\, v[21] + 8\, x^4 y\, v[22] - \\
&\quad 2\, x^6 y\, v[23] - 2\, x^4 y^2 z\, v[25] + 2\, x^5 y^3 z\, v[26] + 4\, x^4 y^2\, v[27] - 2\, x^6 y^2\, v[28]\}
\end{aligned}$$

```
(* Da dieser entstehende Vektor für ALLE Punkte (x,y,z) der Datenbasis der
   Nullvektor ist, und die einzelnen Komponenten dieses Vektors Polynome
   in x,y,z sind, müssen bereits die Koeffizienten dieser Polynome Null sein
   ( wir setzen voraus, dass die Datenbasis gutartig genug ist ). Diese Koeffi-
     zienten sind aber gerade Ausdrücke in den Komponenten v[i] unseres zu be-
     stimmenden Kernvektors. *)
```

```
(* Für die erste Zeile erhalten wir also: *)
```

```
Gleichung1 = Flatten[CoefficientList[Part[Bestimmungsgl, 1], {x, y, z}]]
```

$$\begin{aligned}
&\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v[1], 0, 0, 0, 0, -2\, v[2], 0, 0, 0, 0, \\
&\; v[3], 0, 0, 0, 0, 0, -4\, v[6], 0, 0, 0, -4\, v[15], 6\, v[7], v[3], 0, 0, v[3] + 6\, v[16], \\
&\; -2\, v[8], -v[4], 0, 0, -v[4] - 2\, v[17], 0, 8\, v[10], 0, 0, 0, -v[7] + 16\, v[19], \\
&\; -8\, v[11] + 3\, v[16], -2\, v[8], 0, 8\, v[24], -v[8] - 16\, v[20], -v[4] - 7\, v[17], 0, 0, \\
&\; -2\, v[17] - 8\, v[25], 0, v[5] + 2\, v[18], -8\, v[13], 0, 0, 0, 2\, v[11] - 24\, v[22] + 2\, v[24], \\
&\; v[8] - 10\, v[20], 0, 0, 2\, v[20] - 24\, v[27], -v[17] - 14\, v[25], v[9] + 8\, v[21], 0, \\
&\; -8\, v[30], 0, 3\, v[18] + 10\, v[26], 0, 0, 0, 0, 0, v[20] - 8\, v[27], -2\, v[12] + 8\, v[23], \\
&\; 0, 0, -8\, v[30], -v[21] + 24\, v[28], 0, 0, 0, 2\, v[26] + 16\, v[31], 0, 0, 0, 0, 0, \\
&\; 0, -2\, v[23] + 8\, v[29], 0, 0, 0, -2\, v[28] + 16\, v[32], 0, 0, 0, 8\, v[33], 0, 0, 0\}
\end{aligned}$$

```
Length[Gleichung1]
```

112

```
(* Als nächstes bestimmen wir die Menge aller Vektoren v , so dass der
   erste Eintrag unseser Bestimmungsgleichung Null ist. Wir erinnern, dass
   der Vektor "Bestimmungsgl" 3 Einträge hat. *)

Identität = Solve[Gleichung1 == 0 Range[112], Array[v, 33]]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\{\{v[1]\to 0,\ v[2]\to 0,\ v[3]\to 0,\ v[4]\to 0,\ v[5]\to -\frac{160\,v[31]}{3},\ v[6]\to 0,\ v[7]\to 0,\ v[8]\to 0,\ v[9]\to -1536\,v[32],\ v[10]\to 0,\ v[11]\to 0,\ v[12]\to 16\,v[29],\ v[13]\to 0,\ v[15]\to 0,\ v[16]\to 0,\ v[17]\to 0,\ v[18]\to \frac{80\,v[31]}{3},\ v[19]\to 0,\ v[20]\to 0,\ v[21]\to 192\,v[32],\ v[22]\to 0,\ v[23]\to 4\,v[29],\ v[24]\to 0,\ v[25]\to 0,\ v[26]\to -8\,v[31],\ v[27]\to 0,\ v[28]\to 8\,v[32],\ v[30]\to 0,\ v[33]\to 0\}\}$$

```
(* Wir geben nun noch die beiden Gleichungen für die anderen Einträge des
   Bestimmungsgl-Vektors an *)

Gleichung2 = Flatten[CoefficientList[Part[Bestimmungsgl, 2], {x, y, z}]]
```

{0, 0, 0, 0, v[1], 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −2 v[2], 0, 0, 0, 0, v[3],
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −2 v[15], 2 v[7], v[3], 0, 0, v[3] + 4 v[16], 0, −v[4],
0, 0, −v[4] − v[17], 0, 0, 0, 0, 0, −v[7] + 4 v[19], 2 v[16], −2 v[8], 0, 4 v[24],
−v[8] − 4 v[20], −v[4] − 5 v[17], 0, 0, −2 v[17] − 4 v[25], 0, v[5] + v[18], 0, 0, 0,
0, 2 v[11] − 4 v[22] + v[24], v[8] − 6 v[20], 0, 0, 2 v[20] − 8 v[27], −v[17] − 8 v[25],
v[9] + 4 v[21], 0, −4 v[30], 0, 3 v[18] + 5 v[26], 0, 0, 0, 0, 0, v[20] − 4 v[27],
−2 v[12] + 4 v[23], 0, 0, −4 v[30], −v[21] + 12 v[28], 0, 0, 0, 2 v[26] + 8 v[31], 0, 0,
0, 0, 0, 0, −2 v[23] + 4 v[29], 0, 0, 0, −2 v[28] + 8 v[32], 0, 0, 0, 4 v[33], 0, 0, 0}

```
Identität = Solve[Gleichung2 == 0 Range[112], Array[v, 33]]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\{\{v[1]\to 0,\ v[2]\to 0,\ v[3]\to 0,\ v[4]\to 0,\ v[5]\to -\frac{20\,v[31]}{3},\ v[7]\to 0,\ v[8]\to 0,\ v[9]\to -192\,v[32],\ v[11]\to 2\,v[22],\ v[12]\to 4\,v[29],\ v[15]\to 0,\ v[16]\to 0,\ v[17]\to 0,\ v[18]\to \frac{20\,v[31]}{3},\ v[19]\to 0,\ v[20]\to 0,\ v[21]\to 48\,v[32],\ v[23]\to 2\,v[29],\ v[24]\to 0,\ v[25]\to 0,\ v[26]\to -4\,v[31],\ v[27]\to 0,\ v[28]\to 4\,v[32],\ v[30]\to 0,\ v[33]\to 0\}\}$$

```
Gleichung3 = Flatten[CoefficientList[Part[Bestimmungsgl, 3], {x, y, z}]]
```

{0, v[1], 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −2 v[2], 0,
0, 0, 0, v[3], 0, 0, 0, 0, 0, 2 v[6], 0, 0, 0, 0, 0, v[3], 0, 0, v[3] + 2 v[16],
v[8], −v[4], 0, 0, −v[4], 0, −4 v[10], 0, 0, 0, −v[7] − 4 v[19], 4 v[11] + v[16],
−2 v[8], 0, 0, −v[8] + 4 v[20], −v[4] − 3 v[17], 0, 0, −2 v[17], 0, v[5], 4 v[13],
0, 0, 0, 2 v[11] + 8 v[22], v[8] − 2 v[20], 0, 0, 2 v[20] + 4 v[27], −v[17] − 2 v[25],
v[9], 0, 0, 0, 3 v[18], 0, 0, 0, 0, 0, v[20], −2 v[12], 0, 0, 0, −v[21], 0, 0,
0, 2 v[26], 0, 0, 0, 0, 0, 0, −2 v[23], 0, 0, 0, −2 v[28], 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

```
Identität3 = Solve[Gleichung3 == 0 Range[112], Array[v, 33]]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

```
{{v[1] → 0, v[2] → 0, v[3] → 0, v[4] → 0, v[5] → 0, v[6] → 0, v[7] → -4 v[19], v[8] → 0,
  v[9] → 0, v[10] → 0, v[11] → 0, v[12] → 0, v[13] → 0, v[16] → 0, v[17] → 0, v[18] → 0,
  v[20] → 0, v[21] → 0, v[22] → 0, v[23] → 0, v[25] → 0, v[26] → 0, v[27] → 0, v[28] → 0}}
```

```
(* Aus den drei Identitäten sieht man schnell, dass v der Nullvektor sein
    muss. Zum Beispiel folgt aus der dritten Identität, dass v[5]=0 ist.
    Aus Identität1 erhalten wir deswegen auch v[31]=0. Ebenso muss v[29]=0
      sein, da v[23]=0 ist usw. *)
```